

## MATEMÁTICA

### GRUPOS I, II, III e IV

- 01.** Para revestir o piso do seu quarto, que tem forma retangular, com lajotas iguais, Júnior utilizou 7 caixas de lajota. Agora, ele pretende revestir o piso da sala, que também tem forma retangular, com comprimento o dobro do comprimento do quarto, e largura o triplo da largura do quarto. Quantas caixas de lajota serão necessárias para revestir a sala?

A) 35  
B) 36  
C) 38  
D) 40  
E) 42

**Resposta: E**

Justificativa:

A área da sala é  $2.3 = 6$  vezes a área do quarto. Portanto, serão necessárias  $6.7 = 42$  caixas de lajota.

- 02.** Um produto podia ser comprado, há algum tempo atrás, por 80% do seu valor atual. Qual o aumento percentual sofrido pelo preço do produto neste período de tempo?

A) 20%  
B) 23%  
C) 24%  
D) 25%  
E) 28%

**Resposta: D**

Justificativa:

Se  $p$  é o preço atual do produto, então, há algum tempo atrás, ele poderia ser comprado por  $0,8p$ . O aumento foi de  $0,2p$ , e, em relação ao preço de  $0,8p$ , temos um aumento percentual de  $0,2p/(0,8p) = 1/4 = 25\%$ .

- 03.** Se, ao adicionarmos  $x$  ao numerador e subtrairmos  $x$  do denominador da fração  $a/b$ , com  $a$  e  $b$  reais, obtemos a fração  $c/d$ , com  $c$  e  $d$  reais e  $c \neq -d$ , qual o valor de  $x$ ?

A)  $(bc + ad)/(c + d)$   
B)  $(ab + cd)/(c + d)$   
C)  $(bc - ad)/(c + d)$   
D)  $(ab - cd)/(c + d)$   
E)  $(bd + ac)/(c + d)$

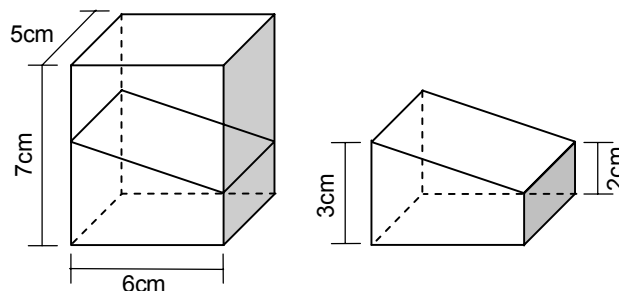
**Resposta: C**

Justificativa:

Temos  $(a + x)/(b - x) = c/d$ , que é equivalente a  $(c + d)x = bc - ad$  e, como  $c \neq -d$ , deduzimos que

$$x = (bc - ad)/(c + d).$$

- 04.** De um paralelepípedo reto de madeira foi cortado um prisma tendo um trapézio como base, conforme ilustrado a seguir.



Qual o volume do prisma ilustrado acima, à direita?

A)  $90\text{cm}^3$   
B)  $86\text{cm}^3$   
C)  $82\text{cm}^3$   
D)  $78\text{cm}^3$   
E)  $74\text{cm}^3$

**Resposta: A**

Justificativa:

O prisma trapezoidal tem área da base  $(2 + 6).2/2 = 8\text{cm}^2$  e altura 5cm; portanto, seu volume é  $8.5 = 40\text{cm}^3$ .

- 05.** Se, em cada período de 20 anos, o percentual de fumantes no Brasil se reduzir à metade do valor que era antes, em quantos anos, a partir de hoje, este percentual se reduzirá a um décimo do valor atual? Indique o valor inteiro mais próximo. Dado: use a aproximação  $\log_{10} 2 \approx 0,30$ .

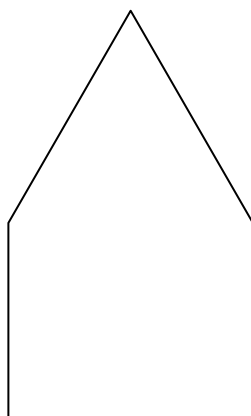
A) 65 anos  
B) 67 anos  
C) 69 anos  
D) 71 anos  
E) 73 anos

**Resposta: B**

Justificativa:

Se  $p$  o atual percentual de fumantes, de hoje a  $x$  anos este percentual será de  $p \cdot (1/2)^{x/20}$  e será  $p/10$  para  $x$  tal que  $p(1/2)^{x/20} = p/10$ . Segue que  $2^{x/20} = 10$  e que  $x = 20 / \log_{10} 2 = 20/0,30 \approx 66,66$ .

06. Uma janela, na forma de um retângulo com um triângulo equilátero justaposto, como ilustrado a seguir, deve ser construída de modo que o seu perímetro seja de 6,6m, e a área delimitada pela janela seja a maior possível. Qual o valor desta área? Indique o valor mais próximo. Dado: use a aproximação  $\sqrt{3} \approx 1,73$ .



- A) 2,45 m<sup>2</sup>  
B) 2,55 m<sup>2</sup>  
C) 2,65 m<sup>2</sup>  
D) 2,76 m<sup>2</sup>  
E) 2,84 m<sup>2</sup>

**Resposta: B**

Justificativa:

Sejam  $x$  a base do retângulo e  $h$  a sua altura. Temos que  $2h + 3x = 6,6$  e a área delimitada pela janela é  $xh + x^2 \sqrt{3} / 4 = x(6,6 - 3x)/2 + x^2 \sqrt{3} / 4 = (\sqrt{3} / 4 - 3/2) x^2 + 3,3x$  que tem valor máximo  $3,3^2 / (-\sqrt{3} + 6) = 3,3^2 (\sqrt{3} + 6) / 33 \approx 0,33 \cdot 4,27 = 2,55 \text{ m}^2$ . O valor máximo é atingido em  $x = 3,3 / (3 - \sqrt{3} / 2) \approx 1,55 \text{ m}$ .

07. Uma loja vende uma televisão em duas prestações; a primeira, de R\$ 1.650,00, a ser paga um mês após a compra, e a segunda, de R\$ 1.815,00, a ser paga dois meses após a compra. Se a loja cobra juros mensais cumulativos de 10% ao mês, qual o preço da televisão à vista?

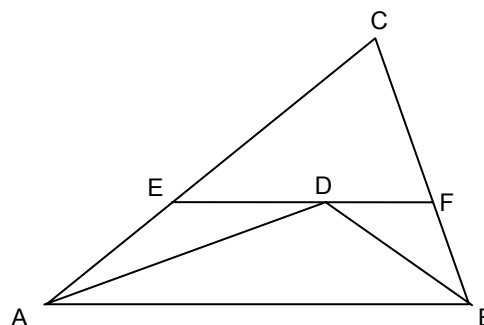
- A) R\$ 3.000,00  
B) R\$ 3.100,00  
C) R\$ 3.200,00  
D) R\$ 3.300,00  
E) R\$ 3.400,00

**Resposta: A**

Justificativa:

Em valores do dia da compra, a primeira prestação vale  $1650/1,1 = 1500$  reais, e a segunda vale  $1815/1,1^2 = 1815/1,21 = 1500$  reais. O preço à vista da televisão é de R\$ 3.000,00.

08. Na ilustração abaixo, AD e BD estão nas bissetrizes respectivas dos ângulos CAB e CBA do triângulo ABC, e EF, que contém D, é paralela a AB. Se AC = 12 e BC = 8, qual o perímetro do triângulo CEF?



- A) 16  
B) 18  
C) 20  
D) 22  
E) 24

**Resposta: C**

Justificativa:

O triângulo AED é isósceles, pois os ângulos EAD e EDA são congruentes. Segue que  $EA = ED$ . Similarmente, o triângulo FBD é isósceles, com  $FD = FB$ . Daí, o perímetro do triângulo CEF é dado por  $CE + ED + CF + FD = CE + EA + CF + FB = CA + CB = 12 + 8 = 20$ .

09. O consumo de 12 lâmpadas de mesma potência, acesas durante 3 horas por dia, em 10 dias é de 7 quilowatts. Qual será o consumo, em 30 dias, deixando acesas somente 10 destas lâmpadas, durante 6 horas por dia?

- A) 42 quilowatts  
B) 40 quilowatts  
C) 37 quilowatts  
D) 35 quilowatts  
E) 32 quilowatts

**Resposta: D**

Justificativa:

Cada lâmpada consome por hora  $7/(12,3 \cdot 30) = 7/360$  quilowatts. O consumo de 10 lâmpadas, acesas durante 6 horas por dia, em 30 dias, será de  $10 \cdot 6 \cdot 30 \cdot 7/360 = 35$  quilowatts.

10. Quantos são os divisores naturais do número  $1.003.003.001 = (10^3 + 1)^3$ ?

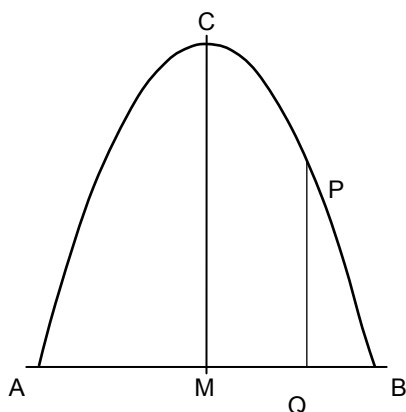
A) 64  
B) 60  
C) 56  
D) 52  
E) 48

**Resposta: A**

Justificativa:

A fatoração em primos de  $10^3 + 1 = 1001$  é  $7 \cdot 11 \cdot 13$ . Portanto  $(10^3 + 1)^3 = 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13^3$  que tem  $(3 + 1)(3 + 1)(3 + 1) = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$  divisores naturais.

11. A ilustração a seguir é de um arco de uma parábola. A parábola passa pelos pontos A, B e C, seu eixo contém os pontos C e M, e AB é perpendicular a CM. Se  $AB = 10$  e  $CM = 50$ , qual a medida de PQ, se P está na parábola, Q está no segmento AB, PQ é perpendicular a AB e  $QM = 3$ ? OBS: Na ilustração a seguir as medidas na horizontal e na vertical estão em escalas diferentes.



A) 29  
B) 30  
C) 31  
D) 32  
E) 33

**Resposta: D**

Justificativa:

Em relação ao sistema de eixos cartesianos BMC, com origem M e eixos positivos perpendiculares contendo MB e MC, a equação da parábola é  $y = a(x - 5)(x + 5) = a(x^2 - 25)$ , e como a parábola passa pelo ponto (0, 50), temos  $50 = -25a$  e  $a = -2$ . A equação da parábola é  $y = -2x^2 + 50$ . O ponto P tem abscissa -3, e sua ordenada será  $-2 \cdot 3^2 + 50 = 32$ . Segue que  $PQ = 32$ .

12. Uma pesquisa entre todos os alunos de uma escola revelou que: 180 alunos tomam refrigerante da marca C, 130 tomam refrigerante da marca G, 40 tomam refrigerantes das duas marcas, e 30 não tomam refrigerante. Escolhendo ao acaso um aluno desta escola, qual a probabilidade percentual de ele tomar refrigerante da marca G, mas não tomar da marca C?

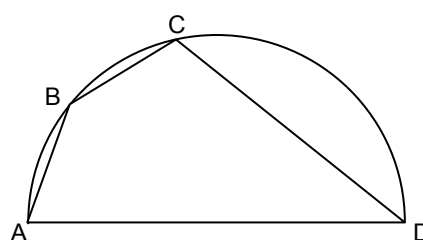
A) 20%  
B) 25%  
C) 30%  
D) 35%  
E) 40%

**Resposta: C**

Justificativa:

Considerando que 40 alunos tomam refrigerantes das duas marcas, temos que  $180 - 40 = 140$  tomam somente da marca C,  $130 - 40 = 90$  tomam somente da marca G, e o total de alunos da escola é  $40 + 140 + 90 + 30 = 300$ . A probabilidade de um aluno da escola, escolhido ao acaso, tomar refrigerante da marca G, mas não da marca C, é  $90/300 = 30/100 = 30\%$ .

13. Na ilustração a seguir, AD é um diâmetro da semicircunferência, que tem raio 3, e as cordas AB e BC medem 2. Qual a medida de CD?



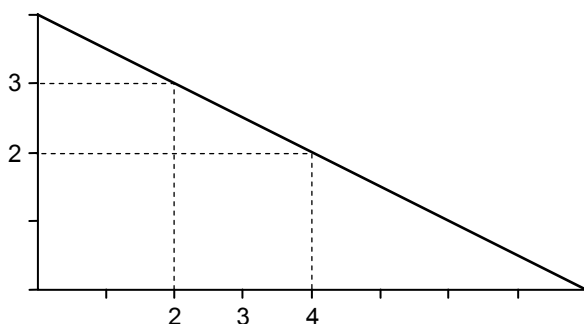
A)  $14/3$   
B)  $7/2$   
C)  $13/3$   
D)  $15/4$   
E)  $16/5$

**Resposta: A**

Justificativa:

Os ângulos ADB e BDC têm a mesma medida, que denotaremos por  $\alpha$ . Como o triângulo ADB é retângulo, temos  $\sin \alpha = 2/6 = 1/3$  e  $\cos(2\alpha) = 1 - 2 \cdot (1/3)^2 = 7/9$ . Como o triângulo ADC é retângulo, temos  $\cos(2\alpha) = CD/6$  e  $CD = 6 \cdot 7/9 = 14/3$ .

14. Se a soma das distâncias do ponto com coordenadas (3, m) aos pontos com coordenadas (2, 3) e (4, 2) é a menor possível, qual o valor de m? Abaixo, estão ilustrados os pontos (2, 3) e (4, 2) e a reta que passa por eles.



- A)  $3/2$
- B)  $5/2$
- C)  $7/2$
- D)  $9/2$
- E)  $11/2$

**Resposta: B**

Justificativa:

A soma das distâncias será a menor possível quando os pontos estiverem alinhados. A reta passando por (2, 3) e (4, 2) tem equação  $y - 3 = -1/2(x - 2)$  ou  $y = -x/2 + 4$ . O ponto (3, m) está na reta se e somente se  $m = -3/2 + 4 = 5/2$ .

15. Em um teste contendo 30 questões, cada questão certa vale 3 pontos, e cada erro vale -1 ponto. Se um estudante respondeu todas as questões, e teve nota 46, quantas questões ele errou?

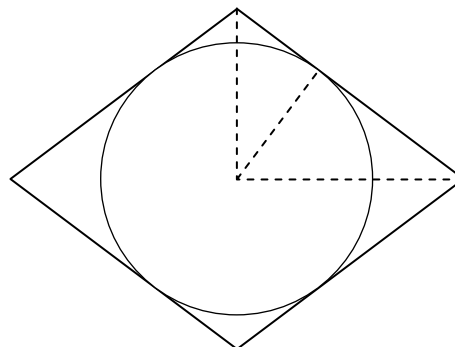
- A) 8
- B) 9
- C) 10
- D) 11
- E) 12

**Resposta: D**

Justificativa:

Seja x o número de questões que o estudante errou; o número de questões certas foi  $30 - x$  e, considerando que sua nota foi 46, temos  $3(30 - x) - x = 46$  e, daí,  $4x = 44$  e  $x = 11$ .

16. Na ilustração abaixo, temos um losango, com diagonais medindo 6cm e 8cm, e a circunferência inscrita no losango. Qual a área da região do losango externa à circunferência inscrita? Indique o valor mais próximo. Dado: use a aproximação  $\pi \approx 3,14$ .



- A)  $5,91\text{cm}^2$
- B)  $5,83\text{cm}^2$
- C)  $5,75\text{cm}^2$
- D)  $5,67\text{cm}^2$
- E)  $5,59\text{cm}^2$

**Resposta: A**

Justificativa:

O raio do círculo é  $3 \cdot 4/5 = 2,4\text{cm}$ . A área colorida é  $6 \cdot 8/2 - 3 \cdot 14 \cdot 2,4^2 = 5,91\text{cm}^2$ .