



Anais do  
60º Congresso Brasileiro do Concreto  
CBC2018  
Setembro / 2018



@ 2018 - IBRACON - ISSN 2175-8182

## APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS NO ESTUDO TÉRMICO DE ELEMENTOS DE CONCRETO

### APPLICATION OF THE FINITE DIFFERENCE METHOD IN THE STUDY OF CONCRETE ELEMENTS

Batista, Rafael Neponuceno (1); Coelho, Nailde de Amorim (2)

(1) *Graduando em Engenharia Civil, Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF*

(2) *Professora Doutora, Colegiado de Engenharia Civil - UNIVASF*

*rafaelneponuceno@outlook.com*

### Resumo

A análise dos efeitos térmicos ocasionados pela transferência de calor é um objeto de estudo bastante relevante para a engenharia. Dentre as distintas formas de transferência de calor, na análise térmica de estruturas se destaca a transferência por condução, na qual a energia é transferida de um corpo para outro através do contato físico ou ao longo do comprimento de um mesmo corpo, desde que diferentes pontos possuam diferentes temperaturas iniciais. O estudo da temperatura em cada ponto de determinado elemento pode ser realizado através da Equação de Calor, que, em alguns casos, possui soluções analíticas bastante complexas e difíceis de serem obtidas. No entanto, através da aplicação do Método das Diferenças Finitas (MDF), é possível resolvê-la numericamente de forma relativamente rápida e com baixo custo computacional. Neste trabalho, o MDF será utilizado na análise da transferência de calor entre corpos de diferentes propriedades térmicas, com a solução de problemas que envolvem o contato entre elementos estruturais de concreto e elementos de vedação de alvenaria, dadas as condições de contorno pré-definidas. Os algoritmos, desenvolvidos com auxílio da linguagem de programação Python, serão então validados, realizando-se a devida comparação com os resultados presentes na literatura que utilizam outro método numérico bastante aceito na engenharia, o Método dos Elementos Finitos (MEF). Desta forma, foi possível constatar a eficácia da aplicação do MDF em problemas de transferência de calor, com resultados condizentes com o esperado.

*Palavra-Chave: Transferência de calor; Método das Diferenças Finitas; Análise numérica.*

### Abstract

The analysis of thermal effects caused by heat transfer is a very relevant object of study for Engineering. Among the distinct forms of heat transfer, in the thermal analysis of structures the transfer by conduction stands out, where the energy is transferred from a body to another by physical contact, or over the length of the same body, as long as different points have different starting temperatures. The study of the temperature in each point of a particular element can be done by the Heat Equation, which, in some cases, has very complex analytical solutions that are also hard to be obtained. However, by the application of the Finite Difference Method (FDM), it is possible to solve it numerically in a relatively fast way, with a low computational cost. In this paper, the FDM will be used in the heat transfer analysis between bodies with distinct thermal properties, solving problems that involve the contact between structural elements of concrete and sealing masonry elements, given the pre-defined boundary conditions. The algorithms developed with the programming language Python will then be validated, performing the due comparison with the results available in the literature that uses another numerical method largely accepted in Engineering, the Finite Elements Method (FEM). In this way, it was possible to verify the effectiveness of the FDM applied in heat transfer problems, with the results fitting the expectation.

*Keywords: Heat transfer; Finite Difference Method; Numerical analysis.*



## 1 Introdução

A importância da análise térmica na engenharia se dá pela gama de aplicações que a mesma possui, estando presente desde o estudo do conforto e eficiência térmica em edificações até a avaliação de tensão de deformação de estruturas. Dessa forma, é necessário compreender os mecanismos de transferência de calor, que podem atuar tanto individualmente quanto simultaneamente. Esses mecanismos são a condução, convecção e radiação, cada um com suas particularidades a serem analisadas, apresentando, no entanto, um fator em comum, que é a necessidade de existência de diferença de temperatura entre os meios. A energia, em forma de calor, é transferida sempre do meio de maior temperatura para o de menor, respeitando as leis da termodinâmica (ÇENGEL e GHAJAR, 2012).

Cada um dos meios de troca de calor apresentados possui leis matemáticas utilizadas para a modelagem dos problemas que os envolvem, permitindo estimar a distribuição de temperatura ao longo de um corpo dadas as condições de contorno. Isso pode ser feito, de forma mais precisa, através de métodos analíticos. No entanto, esses métodos requerem soluções complicadas de serem obtidas. Assim, em problemas práticos, é preferível a utilização de métodos numéricos, que normalmente fornecem resultados bastante próximos dos analíticos, porém com uma velocidade consideravelmente maior (INCROPERA et al., 2008).

Neste artigo, será utilizado o Método das Diferenças Finitas (MDF), implementado na linguagem de programação *Python*, na análise de dois problemas de transferência de calor no regime permanente. O primeiro, unidimensional, envolve uma parede composta por três materiais distintos, sendo um deles o concreto. Já o segundo irá abordar um caso bidimensional, avaliando a distribuição de temperatura ao longo da seção de chaminé composta por um núcleo interno de concreto e um revestimento externo de alvenaria. Ambos os problemas possuem convecção como condição de contorno, e foram obtidos de Moaveni (1999), no qual são resolvidos pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) através do software *ANSYS APDL*. Os resultados obtidos pela implementação do MDF serão então comparados com os fornecidos pelo MEF na literatura.

Este trabalho faz parte do conjunto de pesquisas abordando o estudo da transferência de calor pelo MDF e MEF, realizado pelo grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura (GDFE) da Universidade de Brasília (UnB), das quais é possível citar Almeida, Coelho e Pedrosa (2016); Coelho, Rêgo e Pedrosa (2014); Vasconcelos, Pedrosa e Coelho (2015); Martins e Pedrosa (2016).

## 2 Fundamentação Teórica

### 2.1 Transferência de calor

Inicialmente, é preciso entender os conceitos básicos sobre transferência de calor e seus mecanismos. Uma das principais formas de realizar o estudo dessa transferência é através do balanço de energia em um elemento, baseado na lei da conservação de

energia (ÇENGEL e GHAJAR, 2012). A energia líquida transferida, diferença entre a energia que entra e a que sai, somada à energia gerada no elemento é igual à variação de energia do elemento. Nos casos de regime permanente, essa variação de energia é nula, e nos casos aqui abordados não haverá geração interna de energia, resultando na equação 1 para o balanço de energia no elemento, onde  $\dot{Q}$  é o fluxo de energia:

$$\dot{Q}_{entra} - \dot{Q}_{sai} = 0 \quad (\text{Equação 1})$$

Para aplicar o balanço de energia, é preciso avaliar quais os mecanismos de transferência de calor atuantes no elemento para, então, equacionar o problema. Serão abordados os mecanismos da condução e convecção, não entrando em detalhes sobre a radiação, uma vez que os problemas aqui apresentados não envolvem tal fenômeno.

### 2.1.1 Condução

O mecanismo da condução consiste na propagação do calor em um corpo, resultando em diferentes temperaturas ao longo de sua seção (ALMEIDA, COELHO e PEDROSO, 2016). Em sólidos, acontece através da propagação de vibração das moléculas mais energéticas. A taxa de condução de calor ao longo de um eixo X,  $\dot{Q}_{cond}$ , é dependente da condutividade térmica ( $k$ ), valor exclusivo para cada material, e pode ser expressa matematicamente conforme a equação 2, onde  $A$  é a área da superfície pela qual ocorre a transferência e  $T$  é a temperatura:

$$\dot{Q}_{cond} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (\text{Equação 2})$$

A equação 2 pode ser aplicada no balanço de energia de um elemento tridimensional, supondo que há apenas a transferência por condução, dando origem à equação de condução de calor, equação 3, expressa abaixo na sua forma geral em coordenadas cartesianas. O termo  $\dot{e}$  representa a taxa de energia gerada por um elemento de volume infinitesimal, enquanto  $\alpha$  é a difusividade térmica do material.

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{e}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{Equação 3})$$

Novamente, considerando nula a geração de calor no elemento, bem como um regime permanente, pode-se reescrever a equação de condução de calor conforme a equação 4:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (\text{Equação 4})$$

### 2.1.2 Convecção

O fenômeno da convecção está associado com a transferência de calor entre um fluido em movimento e uma superfície na qual há o contato, estando os dois meios em

diferentes temperaturas. De acordo com Incropera *et al.* (2008), o fluxo de calor por convecção,  $\dot{Q}_{conv}$ , pode ser equacionado pela Lei do resfriamento de Newton, expressa em termos de fluxo pela equação 5:

$$\dot{Q}_{conv} = hA(T_s - T_\infty) \quad (\text{Equação 5})$$

Onde  $h$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção,  $A$  é a área da superfície em contato com o fluido em movimento,  $T_s$  é a temperatura desta superfície e  $T_\infty$  é a temperatura do fluido.

## 2.2 Método das Diferenças Finitas

Diversos problemas na engenharia dependem de equacionamentos robustos, muitas vezes envolvendo Equações Diferenciais Parciais (EDP's), como é o caso da transferência de calor. Por apresentarem soluções analíticas complicadas de serem obtidas em tempo hábil, métodos numéricos são comumente utilizados, como, por exemplo, o Método das Diferenças Finitas (MDF).

A formulação do MDF tem como origem a expansão em Série de Taylor de uma função, dado um acréscimo no valor do argumento. Após ser truncada, a expressão fornece substituições aritméticas para os termos diferenciais das equações, permitindo uma discretização do problema (SOUSA JUNIOR, 2006). Através deste método, um determinado corpo pode ser discretizado em uma malha composta de nós, como mostra a figura 1. Cada nó representa um pequeno elemento deste corpo e possui uma equação que envolve apenas operações aritméticas, permitindo que sejam realizadas implementações computacionais mais facilmente. Nas situações aqui abordadas, envolvendo transferência de calor, essas equações fornecem a temperatura dos nós.

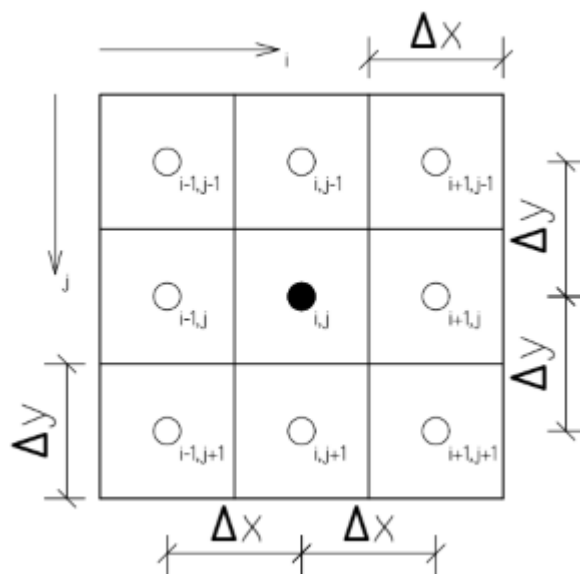


Figura 1 - Malha bidimensional para diferenças finitas (Acervo do autor).

A figura 1 mostra um exemplo de malha bidimensional e a notação utilizada para identificação dos nós. Os deslocamentos na direção horizontal são definidos pela letra  $i$  e os na direção vertical pela letra  $j$ . O objetivo é obter a temperatura no nó  $i,j$ , que por sua vez depende das temperaturas dos nós ao seu redor. Quanto menos espaçados forem os nós da malha ( $\Delta x$  e  $\Delta y$ ), maior a exatidão do método. Neste caso, cada nó é responsável por apresentar um valor correspondente à temperatura do elemento retangular no qual ele está inserido. As substituições das derivadas de primeira e segunda ordem, pelo MDF, adaptadas de Almeida, Coelho e Alkmim (2017), estão apresentadas nas equações 6, 7 e 8.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} \quad (\text{Equação 6})$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} \quad (\text{Equação 7})$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} \quad (\text{Equação 8})$$

As equações 6 e 7 representam duas formas de substituir uma derivada de primeira ordem, sendo a primeira chamada de diferença finita à direita e a segunda chamada de diferença finita à esquerda. A utilização de uma das duas depende do problema em questão.

### 3 Métodos

Para que fosse feita uma comparação entre o MDF e o MEF, foram escolhidos dois problemas de transferência de calor no regime permanente apresentados por Moaveni (1999), no qual são resolvidos pelo MEF através do software *ANSYS APDL*. Foram obtidos os equacionamentos desses problemas utilizando o MDF, sendo posteriormente implementado computacionalmente com o auxílio da linguagem de programação Python. Com os resultados em mãos, avaliou-se o quão próximo eles se encontravam dos obtidos pelo MEF.

#### 3.1 Primeiro problema – Parede de um forno industrial

O primeiro problema envolve a parede de um forno industrial, que é composta por três materiais diferentes: uma camada de 5 cm de argamassa isolante feita com argila no interior (material I), uma placa de amianto com espessura de 15 cm (material II) e uma camada de alvenaria comum com 10 cm de espessura (material III). A parte interna do forno é mantida a uma temperatura de 200°C, enquanto a parte externa se encontra em contato com um fluxo de ar com temperatura de 30°C, ocorrendo transferência de calor por convecção. É possível assumir uma transferência de calor unidirecional. A Figura 2 ilustra o problema, além de mostrar as propriedades físicas desses materiais.



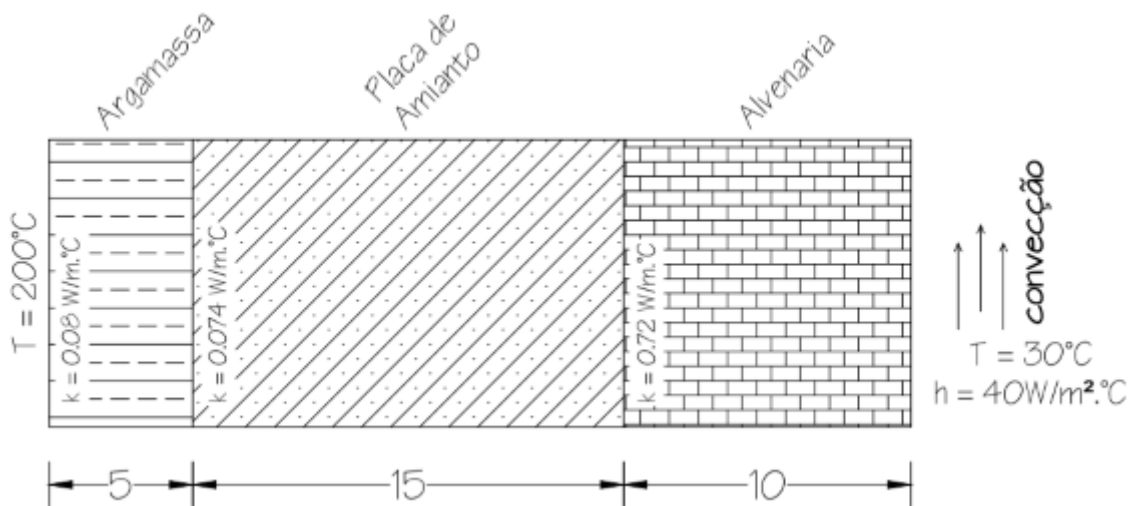


Figura 2 - Ilustração da seção da parede do forno industrial (Adaptado de MOAVENI, 1999).

A malha utilizada para a aplicação do MDF está representada na Figura 3. As dimensões dos elementos retangulares são apenas representativas, uma vez que na análise final foi adotada uma dimensão menor do que a que consta na Figura 3.

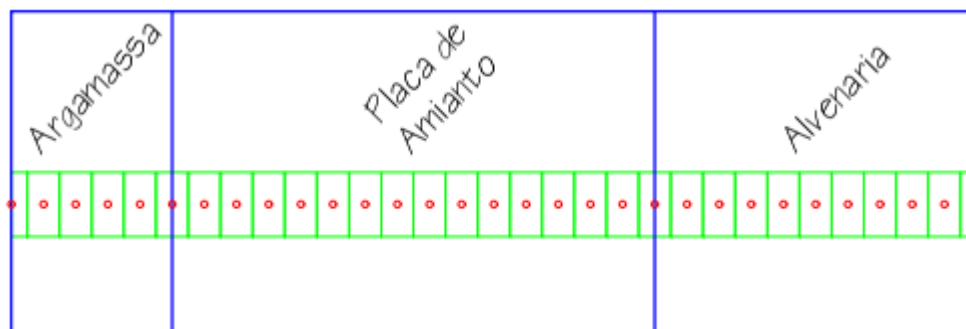


Figura 3 - Representação da malha utilizada no equacionamento do primeiro problema (Acervo do autor).

Para o equacionamento deste problema através do MDF, foi realizado o balanço de energia para os pontos mais notáveis da parede:

- Contorno interno – mantido a uma temperatura de  $200^\circ\text{C}$  ( $T_i = 200^\circ\text{C}$ );
- Interior dos materiais I, II e III – ocorrência exclusiva de condução, regida pela equação 4. Aplicando o MDF, obtém-se a equação 9, expressão para a temperatura destes pontos:

$$T_i = \frac{T_{i-1} + T_{i+1}}{2} \quad (\text{Equação 9})$$

- Interface entre material I e II – transferência unicamente por condução, no entanto, entre materiais de diferentes condutividades térmicas. Pelo MDF, a expressão se torna a equação 10:

$$T_i = \frac{k_1 T_{i-1} + k_2 T_{i+1}}{k_1 + k_2} \quad (\text{Equação 10})$$

- Interface entre material II e III – transferência unicamente por condução, no entanto, entre materiais de diferentes condutividades térmicas. Pelo MDF, a expressão se torna a equação 11:

$$T_i = \frac{k_2 T_{i-1} + k_3 T_{i+1}}{k_2 + k_3} \quad (\text{Equação 11})$$

- Contorno externo – condução pela esquerda e convecção pela direita. Utilizando as equações 2 e 5, juntamente com as substituições do MDF, obtém-se a equação 12:

$$T_i = \frac{k_3 T_{i-1} + h \Delta x T_{\infty}}{k_3 + h \Delta x} \quad (\text{Equação 12})$$

O valor de  $\Delta x$  é arbitrário, sendo que quando menor o valor adotado, mais exato é o método. As expressões acima foram utilizadas na implementação computacional do método, permitindo conhecer qual a temperatura em cada ponto da parede. A obtenção dessas temperaturas foi baseada no método de Gauss-Siedel para resolução de sistemas lineares, tendo sido adotado um valor inicial igual a zero para todos os pontos e realizadas iterações através das expressões acima, tornando os valores mais exatos a cada passo. Foi ainda calculado o erro relativo entre uma iteração e a anterior, que foi utilizado como critério de parada. As iterações eram interrompidas ao se obter um erro menor ou igual a  $10^{-6}$  %.

### 3.2 Segundo problema – Parede de uma chaminé

Este problema consiste na transferência de calor ao longo da seção de uma chaminé, estando tanto o contorno externo quanto o interno sob efeito da convecção. A análise é bidimensional e está definida no regime permanente. Os parâmetros fornecidos por Moaveni (1999) se encontram no sistema imperial de unidades, e serão aqui utilizados em detrimento do sistema métrico apenas para efeito de comparação com os resultados apresentados pelo Método dos Elemento Finitos presentes na literatura consultada.

A chaminé é composta por dois diferentes materiais: concreto na sua parte central e alvenaria no seu contorno externo. Serão consideradas as condutividades do concreto igual a 0,07 Btu/h.pol.°F e da alvenaria igual a 0,04 Btu/h.pol.°F. A figura 4 mostra o desenho da seção (dimensões em polegadas), bem como os parâmetros das condições de contorno adotadas para a convecção.

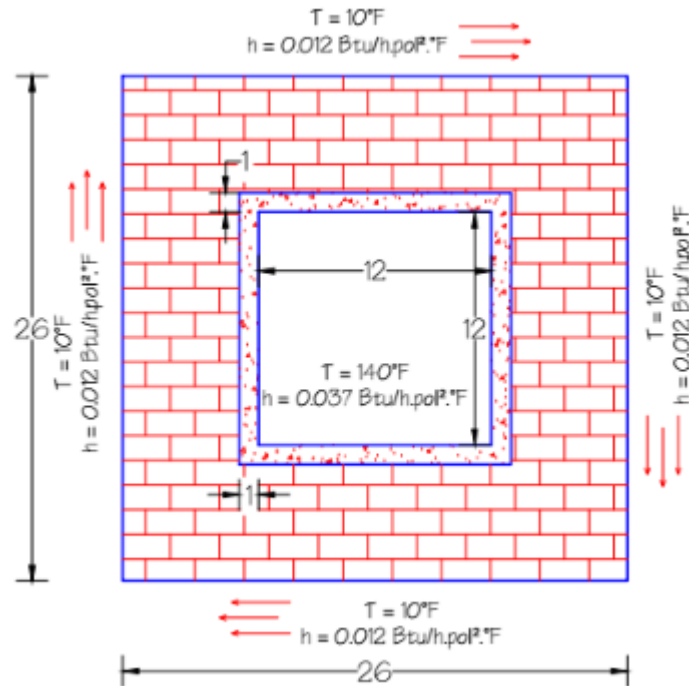


Figura 4 - Ilustração da seção da chaminé (Adaptado de MOEAVENI, 1999).

A seção acima foi discretizada em pequenos elementos representados pelos pontos da malha apresentada na Figura 5. Dessa forma, as temperaturas calculadas para cada ponto equivalem a temperatura em todo o elemento que o contém.

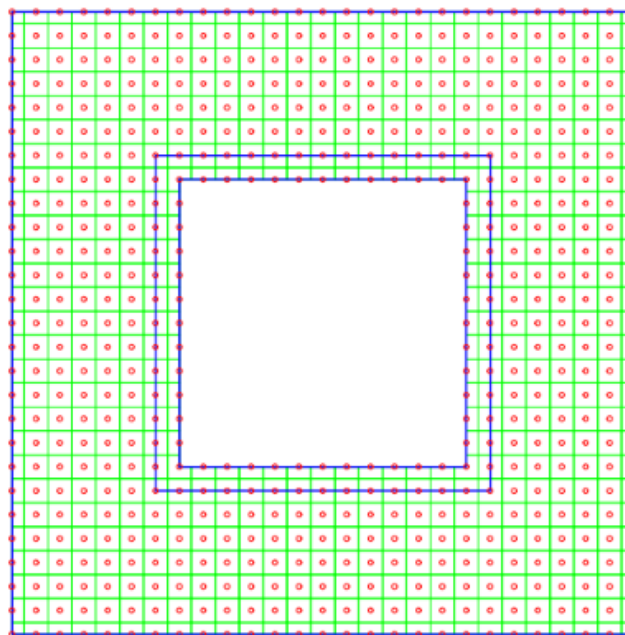


Figura 5 – Representação da malha utilizada no equacionamento do problema (Acervo do autor).

Devido à simetria, optou-se por desenvolver os cálculos para apenas um quarto da seção, espelhando posteriormente os resultados encontrados. Assim como no problema anterior, ANAIS DO 60º CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO - CBC2018 – 60CBC2018



foi realizado o balanço de energia para cada elemento bidimensional que se encontrava nos pontos de interesse. Optou-se por escolher o mesmo espaçamento tanto na direção do eixo x quanto na do eixo y, para uma maior facilidade no desenvolvimento do método, sendo esse espaçamento denotado simplesmente por  $\Delta$ .

- Interior dos materiais I, II e III – ocorrência exclusiva de condução, regida pela equação 4. Aplicando o MDF, obtém-se a equação 13, expressão para a temperatura destes pontos:

$$T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}}{4} \quad (\text{Equação 13})$$

- Vértices do contorno externo – ocorrência de convecção na duas faces externas e condução nas outras duas faces. Através das equações 2 e 5, além da aplicação do MDF, obtém-se a equação 14:

$$T_{i,j} = \frac{2h_1 \cdot \Delta \cdot T_{\infty 1} + k_1(T_{i+1,j} + T_{i,j+1})}{2(k_1 + h_1 \cdot \Delta)} \quad (\text{Equação 14})$$

- Arestas do contorno externo – pode ser feita a formulação da expressão tanto para a aresta lateral quanto para a aresta superior. Em ambos os casos, há ocorrência de convecção em apenas uma face e condução nas demais. A expressão para a lateral é dada pela equação 15, lembrando que a do contorno superior é bastante similar, ocorrendo a mudança apenas de alguns índices:

$$T_{i,j} = \frac{2h_1 \cdot \Delta \cdot T_{\infty 1} + k_1(2T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1})}{2(2k_1 + h_1 \cdot \Delta)} \quad (\text{Equação 15})$$

- Vértice da interface entre materiais I e II – transferência exclusivamente por condução, no entanto através de materiais com diferentes condutividades térmicas. Através do MDF, obtém-se a equação 16:

$$T_{i,j} = \frac{k_1(2T_{i-1,j} + 2T_{i,j-1} + T_{i+1,j} + T_{i,j+1}) + k_2(T_{i+1,j} + T_{i,j+1})}{2(3k_1 + k_2)} \quad (\text{Equação 16})$$

- Aresta da interface entre materiais I e II – caso semelhante ao apresentado acima, podendo tratar da interface lateral ou superior. Para a lateral, obtém-se a equação 17:

$$T_{i,j} = \frac{k_1(2T_{i-1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) + k_2(T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1})}{4(k_1 + k_2)} \quad (\text{Equação 17})$$

- Vértice do contorno interno – há ocorrência de convecção, no contato do material II com os gases expelidos pela chaminé, bem como de condução para o restante do material, o que fornece a equação 18:

$$T_{i,j} = \frac{2h_2 \cdot \Delta T_{\infty 2} + k_2(2T_{i-1,j} + 2T_{i,j-1} + T_{i+1,j} + T_{i,j+1})}{2(3k_1 + h_2 \cdot \Delta)} \quad (\text{Equação 18})$$

- Aresta do contorno interno – pode se tratar do contorno superior ou lateral, ambos os casos possuindo formulação semelhante. Para a lateral, obtém-se a equação 19:

$$T_{i,j} = \frac{2h_2 \cdot \Delta T_{\infty 2} + k_2(2T_{i-1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1})}{2(2k_2 + h_2 \cdot \Delta)} \quad (\text{Equação 19})$$

Com as equações em mãos, foi feita a implementação em Python. O processo de resolução foi semelhante ao apresentado no primeiro problema, adotando-se um erro relativo máximo de 0,01%.

## 4 Resultados e discussão

### 4.1 Primeiro problema – Parede de um forno industrial

A distribuição de temperatura ao longo de uma seção da parede pode ser observada na Figura 6, através de um mapa de calor. As temperaturas se encontram em °C e o eixo da parede está indicado em centímetros. Além disso, foi adotado um espaçamento entre pontos (delta) igual a 0,1 centímetros.

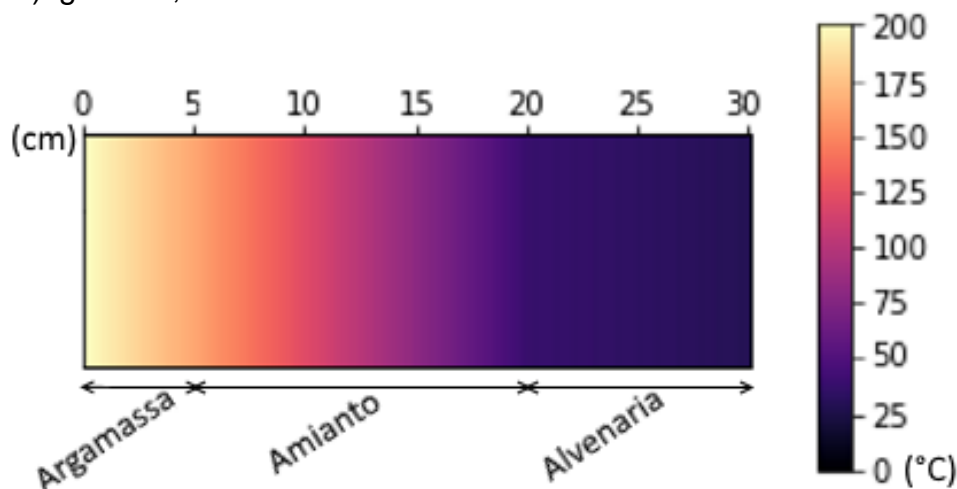


Figura 6 - Mapa de calor da seção da parede do problema 1 (Acervo do autor).

Para efeito de comparação entre o MEF e o MDF, estão dispostos na Tabela 1 os valores de temperaturas obtidas pelos dois métodos para os pontos de interesse do problema (contornos externos e interfaces entre materiais).

Tabela 1 - Comparação entre as temperaturas pelo MEF e MDF.

	Temperaturas (°C)			
	Face Interna	Interface Argamassa/Amianto	Interface Amianto/Alvenaria	Face externa
MEF	200	162,27	39,894	31,509
MDF	200	161,93	38,472	30,015
Erro relativo (%)	0	0,21	3,56	4,74

Pode-se notar que os resultados obtidos pelos dois métodos numéricos se encontram bastante próximos entre si, diferindo um máximo de 4,74% para os pontos indicados acima. Desta forma, as expressões obtidas pelo MDF através do balanço de energia podem ser consideradas válidas para uma análise numérica de temperaturas. É interessante perceber que, neste caso, o erro relativo percentual decresce à medida que se trabalha com maiores temperaturas.

#### 4.2 Segundo problema – Parede de uma chaminé

Os resultados obtidos através da implementação do MDF para a seção da chaminé podem ser visualizados na Figura 7, na qual o contorno verde indica a interface entre a alvenaria e o concreto. Foi adotado um espaçamento entre pontos de 0,25 polegadas.

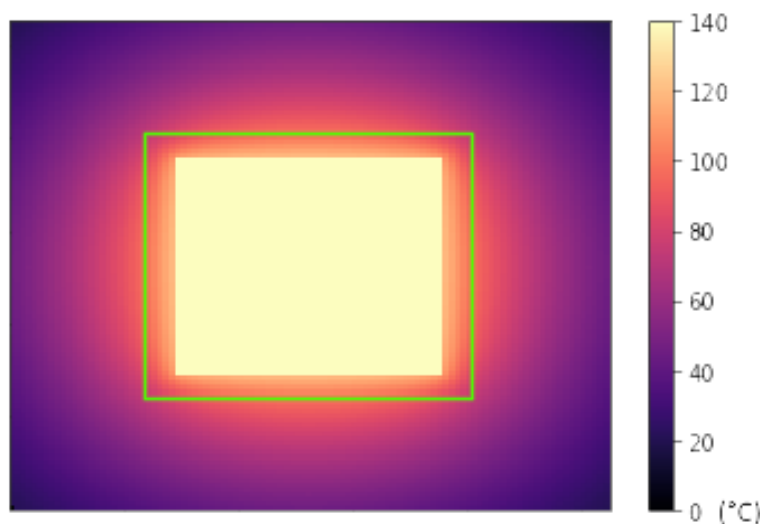


Figura 7 - Mapa de calor da temperatura na seção da chaminé (Acervo do autor).

Foram obtidas as temperaturas de alguns pontos de interesse, como do contorno externo da alvenaria e sua interface com o concreto, além do contorno interno do concreto, que se encontra em contato com os gases expelidos pela chaminé, tanto no centro da face quanto no vértice. Esses pontos estão apresentados na Figura 8.

A título de comparação com o MEF do *ANSYS APDL*, apresentado na literatura, foram coletadas as temperaturas máxima e mínima pelo MDF, que ocorrem, respectivamente, no centro das faces internas do núcleo de concreto e nos vértices externos da alvenaria. Essas temperaturas podem ser avaliadas na Tabela 2 para os dois métodos.

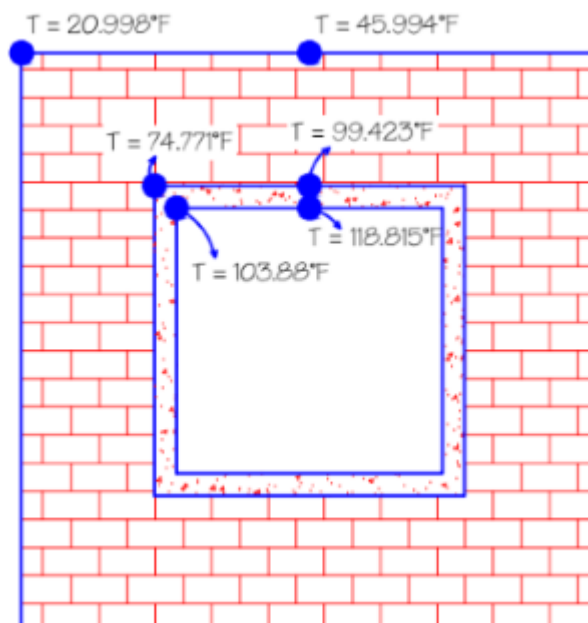


Figura 8 - Temperaturas em alguns pontos notáveis da seção da chaminé (Acervo do autor).

É importante notar que, devido a simetria, as temperaturas exibidas acima são as mesmas dos pontos simétricos nos demais quadrantes da seção. Além disso, é possível perceber que os trechos mais centrais possuem maior temperatura quando comparados com os pontos dos vértices. Isso ocorre porque a distância percorrida ao longo das diagonais é claramente maior, e este é um fator que afeta diretamente os fenômenos de transferência de calor por condução.

Tabela 2 - Temperaturas máxima e mínima no problema da chaminé.

	Temperaturas (°C)	
	Máxima	Mínima
MEF	124,67	19,877
MDF	118,81	20,998
Erro relativo (%)	4,70	5,64

Assim como no primeiro problema, o erro encontrado para os pontos comparados é relativamente baixo. Além disso, novamente foi obtido um menor erro para temperaturas mais elevadas, o que está de acordo com o padrão notado na análise da parede do forno industrial.

## 5 Conclusões

Este artigo mostra a proximidade entre os resultados do Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) na análise de problemas que envolvem transferência de calor no regime permanente em corpos com diferentes materiais. Foram avaliadas as temperaturas nas seções de uma parede de um forno industrial composto por argamassa, placa de amianto e alvenaria (problema unidimensional) e de uma



Anais do  
60º Congresso Brasileiro do Concreto  
CBC2018  
Setembro / 2018



@ 2018 - IBRACON - ISSN 2175-8182

chaminé composta por um núcleo de concreto revestido por alvenaria (problema bidimensional). Pôde-se compreender que a diferença entre os resultados obtidos pela implementação do MDF e os fornecidos pelo MEF, presente na literatura, é relativamente baixa, especialmente para valores mais elevados de temperatura nos casos aqui analisados.

Desta forma, o Método das Diferenças Finitas pode ser uma opção viável para análises térmicas, uma vez que possui boa precisão e sua fundamentação e formulação é bastante simples, o que facilita a implementação em linguagens de programações mais comuns.

## 6 Agradecimentos

Agradeço ao CNPq e à Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF) pela oportunidade de participar do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), o que permitiu o meu desenvolvimento em temas não abordados na minha graduação e o ingresso no grupo de pesquisa Dinâmica e Fluido-Estruturas (GDFE), do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, da Universidade de Brasília (UnB).





Anais do  
60º Congresso Brasileiro do Concreto  
CBC2018  
Setembro / 2018



@ 2018 - IBRACON - ISSN 2175-8182

## 7 Referências

ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J. **Transferência de calor e massa: uma abordagem prática**. 4. ed. São Paulo, McGraw-Hill, 2012.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S. **Fundamentos de transferência de calor e de massa**. 6. ed. Rio de Janeiro, LTC, 2008.

SOUSA JUNIOR, L. C. de. **Uma aplicação dos métodos dos elementos finitos e diferenças finitas à interação fluido-estrutura**. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília – UnB. 2006.

MOAVENI, Saeed. **Finite Element Analysis: theory and application with ANSYS**. New Jersey, Prentice-Hall, 1999.

ALMEIDA, G. V.; COELHO, N. A.; ALKMIM, N. **Comparative analysis of a transient heat flow and thermal stresses by analytical and numerical methods**. VII International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering, 2017.

COELHO, N. A.; RÊGO, J. H. S.; PEDROSO, L. J. **Comparação de resultados analíticos para a equação do calor com o ANSYS**. 56º Congresso Brasileiro do Concreto. 2014.

ALMEIDA, G. V.; COELHO, N. A.; PEDROSO, L. J. **Distribuição de temperatura em placas em regime transiente: comparação entre solução analítica e numérica**. XXXVII Iberian-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. 2016.

VASCONSELOS, M. A.; PEDROSO, L. J.; COELHO, N. A. **Estudo de Diferenças Finitas para a equação do calor em barragens de concreto**. XXXVI Iberian-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. 2015.

MARTINS, E. F. R.; PEDROSO, L. J. **Um estudo analítico-numérico da equação de Laplace orientado à problemas térmicos em estruturas de concreto**. XXXVII Iberian-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. 2016.