



COMPARAÇÃO DE RESULTADOS ANALÍTICOS PARA A EQUAÇÃO DO CALOR COM O ANSYS

COMPARISON OF ANALYTICAL RESULTS FOR THE HEAT EQUATION WITH ANSYS

Coelho, Nailde de Amorim (1); Rêgo, João Henrique da Silva (2); Pedroso, Lineu José (3);

(1) *Doutoranda em Estruturas e Construção Civil, Universidade de Brasília – UnB;*
(2) e (3) *Professor Doutor, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – UnB;*
naildea@yahoo.com.br

Resumo

O estudo da temperatura nas estruturas pode ser um fator determinante no desenvolvimento de fissurações, por exemplo. Este fato pode ser encontrado em estruturas de concreto-massa ou qualquer outra estrutura que apresente variações bruscas de temperatura. Por isso, é imprescindível o estudo da equação que governa esse tipo de problema, a Equação de Fourier. A utilização de programas computacionais na solução de problemas reais tem sido cada vez mais frequente, no entanto, nem sempre é feita uma análise dos resultados para verificar a sua veracidade. Existem duas formas de se mostrar o correto uso da ferramenta computacional, a comparação com dados experimentais ou com dados analíticos. Sendo a demonstração experimental onerosa, que requer grandes laboratórios e demandas de tempo para execução de experimentos termomecânicos, escolheu-se a segunda opção, trabalhar matematicamente as equações e comparar os resultados com um programa computacional. No intuito de avaliar as respostas obtidas pelo programa Ansys, este relatório busca comparar os resultados analíticos com os numéricos para algumas situações de problemas térmicos, que envolvem a equação de calor. Desta forma, é possível dispensar experimentos e problemas complexos poderão ser resolvidos de forma rápida, precisa e eficaz.

Palavra-Chave: Análise analítica, Ansys, Concreto Massa.

Abstract

The study of the structures temperature can be a factor in the development of cracks, for example. This fact can be found in concrete mass structures or any other structure that presents rapid changes in temperature. Therefore, it is essential the study the equation that governs this type of problem, the Fourier equation. The use of computer programs in solving real problems have been increasingly frequent, however, an analysis of the results is not always taken to verify its veracity. There are two ways to show the correct use of computational tools, the comparison with experimental data or with analytical data. Being an expensive experimental demonstration, which requires large laboratories and demands of time for execution of thermomechanical experiments, we chose the second option, working mathematically equations and compare the results with a computer program. In order to evaluate the responses obtained by Ansys program, this paper seeks to compare the analytical results with the numerical values for some situations of thermal problems, involving the heat equation. Thus, it is possible to dispense experiments and complex problems can be resolved quickly, accurately and effectively.

Keywords: Analytical analysis, Ansys, Mass Concrete.



1 Introdução

A variação de temperatura é um grande problema em algumas estruturas, como é o caso de estruturas com um grande volume de concreto, concreto massa. Essa mudança de temperatura pode ser analisada através de equações matemáticas, o problema da transferência de calor no concreto é conduzido pela equação de Fourier, também conhecida como equação do calor. Um dos principais objetivos da condução de calor é determinar o campo de temperatura em um meio resultante das condições impostas em suas fronteiras, ou seja, com a equação é possível conhecer a distribuição de temperaturas, que representa como a temperatura varia com a posição no meio. Outra forma de conhecer essa distribuição térmica é através de programas, como é o caso do Ansys.

Muitos problemas de Engenharia são devidos a variações térmicas que levam, muitas vezes, a gradientes de temperatura elevados podendo causar danos às estruturas, como é o caso das fissurações. Esse gradiente térmico pode ser provocado por efeitos externos, temperatura ambiente, condução, convecção, radiação, ou também por fatores internos, quando há geração interna de calor, como é o caso do calor de hidratação originado no processo de hidratação do cimento. Independente dos meios e fatores que ocorrem, o fenômeno da variação do calor é conduzido pela Equação de Fourier, que também pode ser reduzida à Equação de Laplace ou à Equação de Poisson, dependendo dos fatores que estão ou não influenciando o meio.

O estudo do fenômeno termomecânico é de grande importância em grandes estruturas, como é o caso de barragens, grandes fundações, pontes. Esse tipo de estrutura requer grandes dimensões, conseqüentemente, grande volume de concreto. As empresas que trabalham com essas obras têm investido bastante na simulação computacional afim de reduzir gastos com experimentos, uma vez que solicitam elevada quantidade de material, elevado tempo de preparação e obtenção de resultados e alto custo.

Vários autores estudam esta temática em seus trabalhos, ou seja, a análise termomecânica em concreto massa, por exemplo: Azenha (2009); Gomes (2011); Coelho (2012); Kamaruva (2005); Faria (2004); Carvalho (2002); Fairbairn (2003); Kruger (2001); Kavamura (2005); entre outros.

A utilização de programas computacionais na solução de problemas reais tem sido cada vez mais frequente, no entanto, nem sempre é feita uma análise dos resultados para verificar a sua veracidade. No intuito de avaliar as respostas obtidas pelo programa Ansys, este trabalho busca comparar os resultados analíticos com os numéricos para algumas situações de problemas térmicos, que envolvem a equação de calor. Desta forma, futuras análises poderão ser feitas sem a necessidade de soluções analíticas; e problemas complexos poderão ser resolvidos de forma rápida, precisa e eficaz resolvendo, inclusive, situações de difícil solução analítica.

Sabendo-se que as soluções matemáticas e analíticas são as respostas que condizem com os fenômenos físicos, este trabalho busca fazer a comparação entre alguns desses resultados de forma a comprovar a correta utilização do programa e, conseqüentemente, ser possível a utilização do Ansys para problemas complexos sem solução analítica.

2 Equação do Calor

Os fenômenos térmicos em concreto são regidos pela Equação de Fourier. Com ela é possível determinar o campo de temperatura em um domínio, resultante das condições impostas em suas fronteiras, ou fontes de calor geradas no interior desse domínio. Assim, pode-se conhecer a distribuição final de temperaturas, ao longo do tempo e da posição de um ponto dentro desse domínio. Uma vez conhecida essa distribuição, o fluxo de calor por condução em qualquer ponto do meio ou na sua superfície pode ser determinado. A dedução da equação do calor pode ser deduzida conforme Azenha (2009), Rao (1999) e Coelho, et all, (2013), sendo dada pela equação de taxa de condução nos sólidos. Em uma dimensão a Lei de Fourier é expressa conforme a Eq. 1.

$$q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{Equação 1})$$

Onde:

- q_x = fluxo de calor;
- A = área;
- k = condutividade térmica;
- T = temperatura (K);
- x = coordenada espacial.

A equação de equilíbrio de energias em coordenadas cartesianas pode ser mostrado com relação a um volume infinitesimal elementar de matéria como representado na Fig. 1.

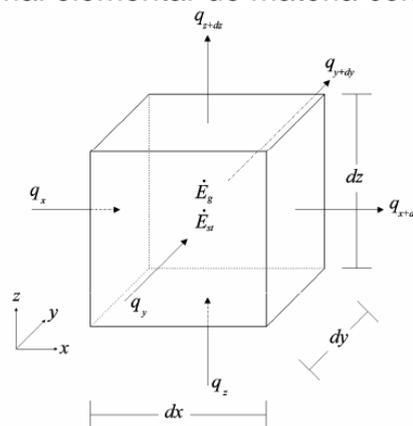


Figura 1 – Volume infinitesimal elementar de matéria (Azenha, 2009).

Com base na figura mostrada, a equação do balanço energético é dado conforme segue:

Calor que entra durante o tempo dt	+	Calor gerado durante o tempo dt	=	Calor que sai durante o tempo dt	+	Armazenamento de energia interna durante o tempo dt
--------------------------------------	---	-----------------------------------	---	------------------------------------	---	---

Fazendo o tratamento matemático do balanço energético, tem-se a equação 2, que descreve a Equação de Fourier com geração de calor interno.



$$k\nabla T^2 + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{Equação 2})$$

Ou ainda:

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{Equação 3})$$

Sendo que a equação 4, quando o laplaciano é nulo, é denominada Equação de Laplace, e a equação 5, é chamada Equação de Poisson.

$$\nabla^2 T = 0 \quad (\text{Equação 4})$$

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (\text{Equação 5})$$

Sendo:

- T = temperatura;
- \dot{q} = geração de calor;
- k = condutividade térmica;
- c = calor específico;
- ρ = massa específica;
- t = tempo.

3 Método Computacional

A maior parte dos problemas práticos de engenharia envolvem problemas complexos que não apresentam solução analítica. O nível de dificuldade está relacionado com a complexidade da geometria envolvida, as equações que descrevem o fenômeno físico (por exemplo, escoamento fluido envolvendo viscosidade, plasticidade em estruturas, propriedades que dependem da temperatura, etc.), ou a variação das grandezas envolvidas (por exemplo, estruturas sujeitas à grandes deformações).

Problemas de transferência de calor é um exemplo aonde métodos numéricos vêm sendo aplicados há muito tempo. No entanto, soluções analíticas são obtidas apenas para problemas simples, como, por exemplo, o fluxo de calor num domínio unidimensional.

Diante disso, buscou-se um software para solução computacional do problema térmico utilizando o método dos elementos finitos, também conhecido por MEF. Existem vários programas para tal utilização, a escolha do ANSYS para o trabalho foi motivada por este se tratar de uma ferramenta de análise versátil com uma boa aceitação e utilização no mercado. É uma boa ferramenta que tem uma boa interação entre temperatura e tensão e também possui recursos que permitem visualizar os resultados através de uma excelente interface software-usuário.

Com o ANSYS pode-se fazer análises de modelos desde os mais simples aos mais complexos, com extrema flexibilidade e com a vantagem de ser um software já utilizado pela comunidade científica e pela indústria, em particular, em nosso meio. O domínio é subdividido em pequenas regiões discretas, conhecidas como elementos finitos. Estes elementos são definidos pela geometria, por nós e funções de interpolação. No entanto, a

quantidade de elementos a ser utilizado deve ser estudado para cada caso, deve-se buscar sempre a convergência.

Resumidamente, pode-se afirmar que o ANSYS é um pacote de modelagem em elementos finito com o propósito geral de resolver numericamente uma grande variedade de problemas mecânicos.

Para a análise dos efeitos térmicos nas estruturas analisadas foi utilizado o elemento PLANE55 do ANSYS 14.5 que tem capacidade de condução térmica em duas dimensões, 2D. O elemento tem quatro nós e um único grau de liberdade em cada nó, a temperatura. O elemento é mostrado na figura 2 (biblioteca do ANSYS).

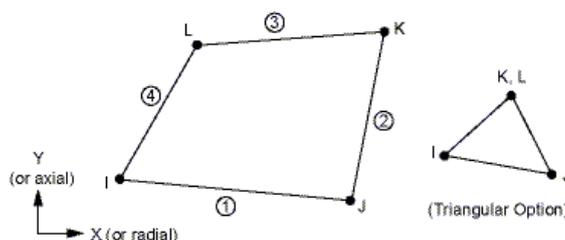


Figura 2 - Geometria do elemento PLANE55 (biblioteca do ANSYS).

Um outro elemento que poderia ser usado seria o elemento PLANE 77, também para análises térmicas em duas dimensões. Apresenta um grau de liberdade, a temperatura e oito nós, adequado para desenhar fronteiras curvas.

4 Resultados

As soluções matemáticas e os problemas mostrados neste tópico de resultados são baseados nas seguintes bibliografias: Haberman (1987), Hildebrand (1965), Incropera (2008), Kreyszig (2006).

4.1 Análise Unidimensional:

Analisando uma barra uniforme de comprimento L , com temperatura fixa A na extremidade esquerda, e B à direita. Se a condição inicial é prescrita, o problema matemático para a temperatura $T(x, t)$, é:

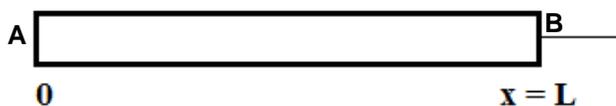


Figura 3 – Problema Unidimensional.

A equação que governa o problema (Equação do Calor) é mostrada na Eq. 6:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = h^2 \nabla^2 T \quad (\text{Equação 6})$$



Onde:

$$h^2 = \frac{k}{\rho c}$$

Ou, ainda:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = h^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{Equação 7})$$

As condições de contorno e condição inicial são mostradas, respectivamente, nas equações 8 e 9.

$$CC: \begin{cases} T(0, t) = A \\ T(L, t) = B \end{cases} \quad \forall t \quad (\text{Equação 8})$$

$$CI: \{T(x, 0) = f(x)\} \quad (\text{Equação 9})$$

Como não há variação no tempo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Neste caso, o método de separação de variáveis não pode ser usado diretamente, uma vez que, mesmo para este exemplo simples as condições de contorno não são homogêneas.

Para esta análise, primeiramente obtém-se uma distribuição de temperatura de equilíbrio, $T_E(x)$. Se essa distribuição de temperatura existe, ela deve satisfazer a equação de calor no estado estacionário (independente do tempo).

$$\frac{\partial^2 T_E}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{Equação 10})$$

Aplicando as condições de contorno:

$$T_E(0) = A \quad (\text{Equação 11})$$

$$T_E(L) = A \quad (\text{Equação 12})$$

Para a temperatura de equilíbrio a condição inicial é ignorada. Para satisfazer as equações 7 e 8, a equação de equilíbrio é dada por:

$$T_E(x) = A + \frac{B-A}{L}x \quad (\text{Equação 13})$$

Aplicando para o exemplo 4.1 o comprimento $L = 1$ m (um metro), 5 cm (cinco centímetros) de espessura, é realizada a análise térmica estática unidimensional, ou seja, independentemente do tempo e apenas na direção de x . Dessa forma, os resultados do programa computacional, o *Ansys*, são mostrados na Fig. 4 e comparados com os resultados analíticos pela Fig. 5 e Tabela 1.

Neste exemplo, o mais simples de todos, percebe-se que os resultados são exatamente iguais para todos os pontos verificados: 0.00 m, 0.25 m, 0.50 m, 0.75 m, 1.00 m. Dessa forma, pode-se afirmar que o programa está sendo utilizado corretamente.

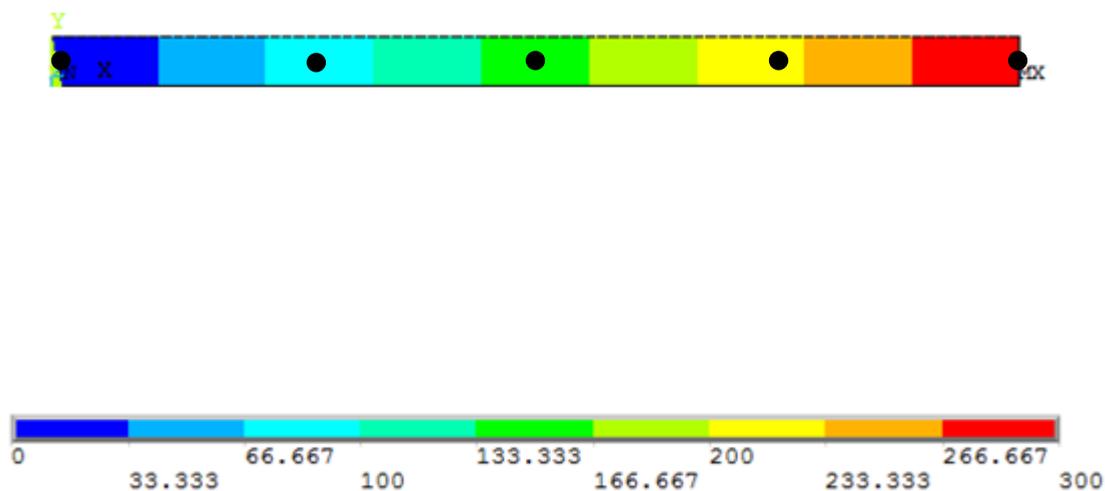


Figura 4 - Resultados do Ansys para barra unidimensional.

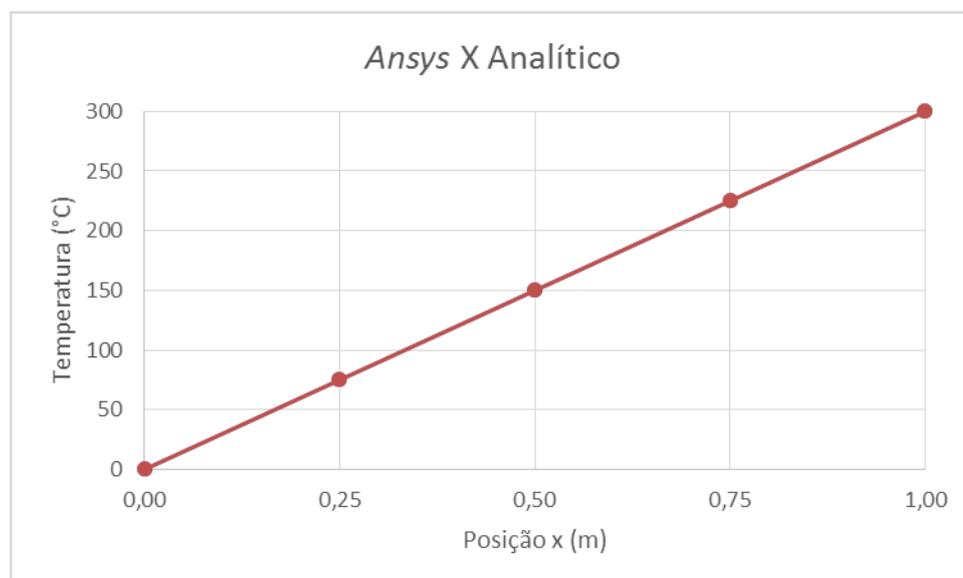


Figura 5 – Comparação entre resultados analíticos e numéricos para uma barra estática.

Tabela 1 - Comparação entre resultados analíticos e numéricos para uma barra estática.

x (m)	T (°C) (Ansys)	T (°C) (Analítico)	Δ (%)
0,00	0,00	0,00	0,00
0,25	75,00	75,00	0,00
0,50	150,00	150,00	0,00
0,75	225,00	225,00	0,00
1,00	300,00	300,00	0,00

T = temperatura;
Δ (%) = Diferença entre as temperaturas analisadas em porcentagem.

4.2 Análise Unidimensional Transiente:

Analisando o exemplo anterior, do tópico 4.1, agora variando com o tempo, ou seja, numa análise transiente, configurando dessa forma, uma análise bidimensional, dependente do espaço e do tempo, para as condições iniciais, considera-se o deslocamento da temperatura a partir da temperatura de equilíbrio:

$$v(x, t) = T(x, y) - T_E(x) \quad (\text{Equação 14})$$

Em vez de resolver a equação 14 para $T(x, y)$, será determinado o valor de $v(x, t)$. Desde que $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, tem-se que $v(x, t)$ também é satisfeita pela equação 15, uma vez que $T_E(x)$ é linear em x .

$$\frac{\partial v}{\partial t} = h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{Equação 15})$$

Além disso, tanto $T(x, y)$ quanto $T_E(x)$ são iguais a A quando $x = 0$ e igual a B quando $x = L$, com isso sua diferença é igual a zero para $x = 0$ e $x = L$, ou seja:

$$v(0, t) = 0 \quad (\text{Equação 16})$$

$$v(L, t) = 0 \quad (\text{Equação 17})$$

Resolvendo $v(x, t)$ pelo método de separação de variáveis, a solução é dada pela equação 18:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-h^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (\text{Equação 18})$$

A equação 14 pode ser descrita como a equação 19:

$$T(x, y) = T_E(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-h^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (\text{Equação 19})$$

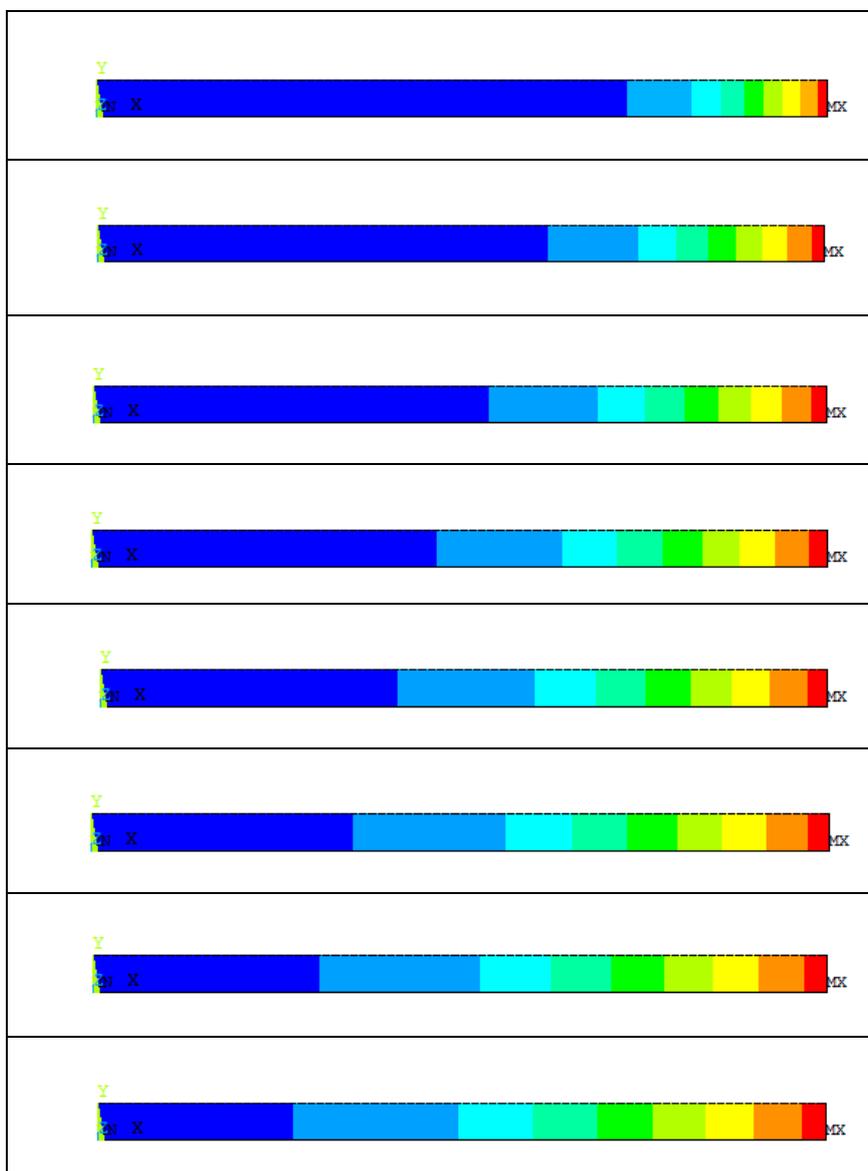
Observa-se que quando $t \rightarrow \infty$, $T(x, y) = T_E(x)$, independente da condição inicial. E a temperatura se aproxima da sua distribuição de equilíbrio para todas as condições iniciais.

Para a mesma barra foi feita a análise transiente no programa *Ansys* no ponto médio da barra, a 0.5 m, para um intervalo de tempo de dois dias. Os resultados são mostrados para diferentes intervalos de tempo no mesmo ponto, como mostram as Fig. 6 e 7 e a Tabela 2.

As análises foram realizadas com apenas cinco termos do somatório, pois já há a convergência. Observa-se pelos resultados que os valores são equivalentes, apenas nos primeiros instantes há uma diferença imperceptível nas curvas da Fig. 4 e insignificante pelos resultados da Tabela 2.

Para esta análise foram utilizadas também as seguintes propriedades:

- Condutividade térmica $\rightarrow k = 1,79 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$;
- Calor específico $\rightarrow c = 1000 \text{ J/g.}^\circ\text{C}$;
- Massa específica $\rightarrow \rho = 2300 \text{ kg/m}^3$;



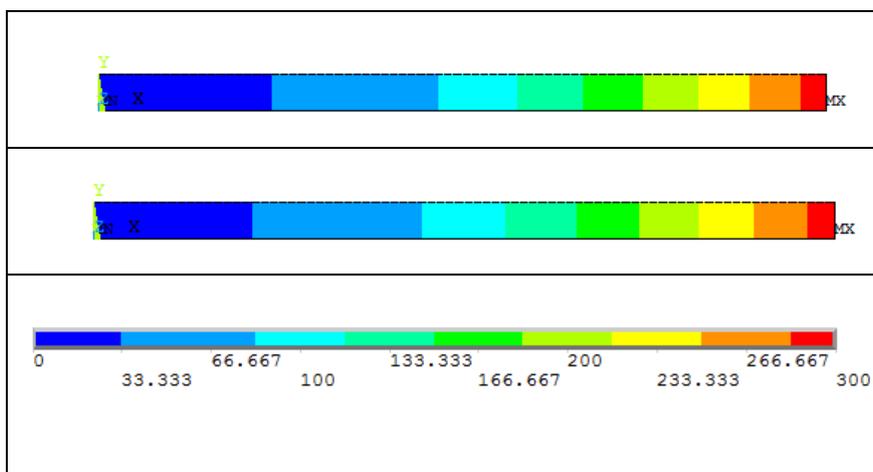


Figura 6 - Resultados do Ansys para barra transiente.

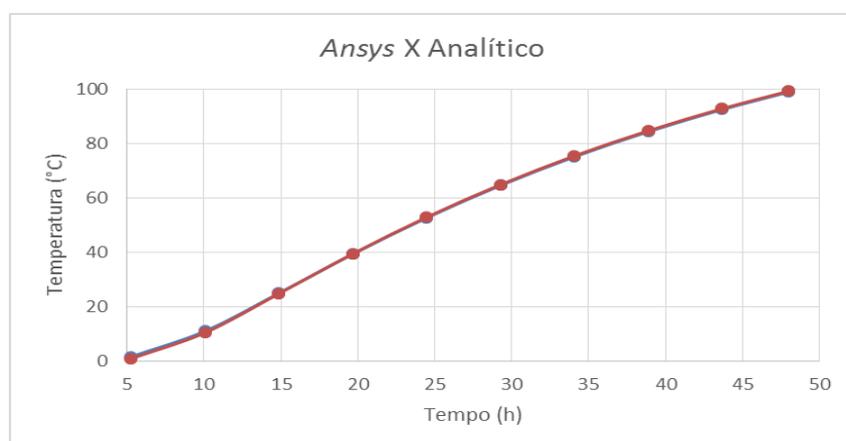


Figura 7 - Comparação entre resultados analíticos e numéricos para uma barra transiente na posição 0,5 m.

Tabela 2 - Comparação entre resultados analíticos e numéricos para uma barra transiente na posição 0,5 m.

x (m)	t (h)	T (°C) (Ansys)	T (°C) (Analítico)	Δ (%)
0,50	5,28	1,68	0,99	0,70
0,50	10,08	11,09	10,51	0,06
0,50	14,88	25,03	24,88	0,01
0,50	19,68	39,40	39,51	0,00
0,50	24,48	52,72	52,95	0,00
0,50	29,28	64,62	64,92	0,00
0,50	34,08	75,13	75,45	0,00
0,50	38,88	84,37	84,70	0,00
0,50	43,68	92,47	92,80	0,00
0,50	48,00	98,91	99,24	0,00

T = temperatura;
Δ (%) = Diferença entre as temperaturas analisadas em porcentagem.

4.3 Problema Bidimensional - Equação de Laplace

A forma de solução para um problema bidimensional é semelhante ao problema unidimensional, ou seja, utiliza-se o método de separação de variáveis pelas EDPs. Neste caso o estudo será realizado em uma placa ao invés de uma barra.

Seja uma placa de comprimento L e comprimento H , com seção transversal constante e de material homogêneo, orientada ao longo dos eixos x e y , conforme a Fig. 9. Considere-se que o fluxo de calor se propaga nas direções de x e y .

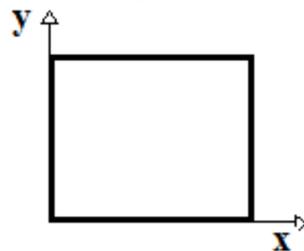


Figura 8 – Placa considerada.

A equação que governa o problema (Equação de Laplace) é dada pela Eq. 20:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Equação 20})$$

Onde as condições de contorno e inicial são fornecidas pelas Eq. 21 e 22:

$$CC: \begin{cases} T(0, y) = 0 \\ T(L, y) = 0 \quad \forall t \\ T(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{Equação 21})$$

$$CI: \{T(x, H) = f(x)\} \quad (\text{Equação 22})$$

Pelas condições de contorno, tem-se também que $f(0) = 0$ e $f(L) = 0$.

Seja a Eq. 23:

$$T(x, y) = F(x)G(y) \quad (\text{Equação 23})$$

Tem-se, pelo método de separação de variáveis a Eq. 24:

$$FG'' = F''G \quad (\text{Equação 24})$$

Em que:

$$G = \frac{d^2 G}{dy^2} \quad e \quad F'' = \frac{d^2 F}{dx^2} \quad (\text{Equação 25 a e b})$$

Dividindo a Eq. 24 por FG tem-se:

$$F''G + FG'' = 0 \quad \div \quad FG$$

$$\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} = 0 \quad (\text{Equação 26})$$

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = k \quad (\text{Equação 27})$$



Resolvendo as equações analiticamente, chega-se a:

$$F_n(x) = \bar{B} \sin \frac{n\pi}{L} x = 0 \quad (\text{Equação 28})$$

$$G(y) = C \sinh \frac{n\pi}{L} y \quad (\text{Equação 29})$$

Sabendo-se que $T(x, y) = F(x)G(y)$, tem-se:

$$T(x, y) = \left(\bar{B} \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \left(C \sinh \frac{n\pi}{L} y \right) \quad (\text{Equação 30})$$

Ou ainda:

$$T_n(x, y) = B_n \left(\sin \frac{n\pi}{L} x \right) \left(\sinh \frac{n\pi}{L} y \right) \quad (\text{Equação 31})$$

Em que:

$$B_n = \frac{2 \int_0^L f(x) \left(\sin \frac{n\pi}{L} x \right) dx}{\sinh \frac{n\pi}{L} H} \quad (\text{Equação 32})$$

Assim, a solução completa para a equação de Laplace é dada pela Eq. 33:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \left[\frac{\int_0^L f(x) \left(\sin \frac{n\pi}{L} x \right) dx \cdot \left(\sin \frac{n\pi}{L} x \right) \cdot \left(\sinh \frac{n\pi}{L} y \right)}{\sinh \frac{n\pi}{L} H} \right] \quad (\text{Equação 33})$$

A terceira situação estudada, a Equação de Laplace, sem análise transiente, independentemente do tempo, em duas direções, também foi feita no *Ansys*. Neste caso, a avaliação é em termos dos eixos cartesianos x e y , e não mais em uma única direção como nos casos anteriores.

Sendo o bloco estudado de dimensões 1,0 m x 1,0 m, analisando os pontos em $x = 0,5$ m para diferentes valores de y , como mostram as Fig. 9 e 10 e a Tabela 3. Nota-se que os valores são equivalentes, apenas nos pontos mais próximos a extremidade com fonte de calor apresentam uma pequena diferença nos resultados. No entanto, esses valores foram encontrados analiticamente utilizando apenas três termos do somatório de equações, o que pode ter ocasionado essa diferença. Mas como apenas um ponto se desloca da curva, pode-se afirmar que o programa representa o problema analítico em estudo.

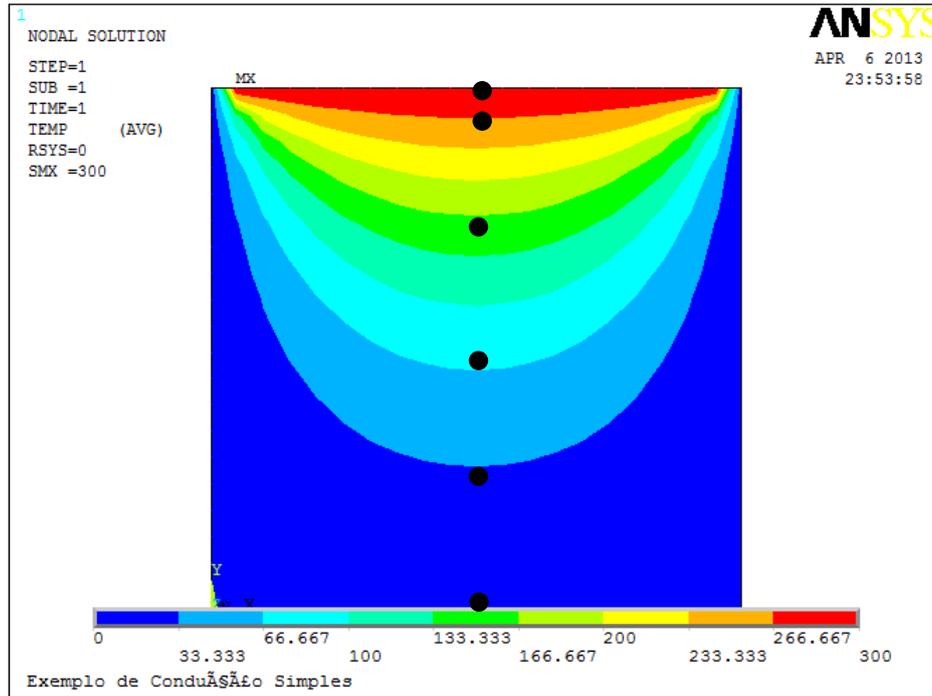


Figura 9 – Resultados do Ansys para a Equação de Laplace.

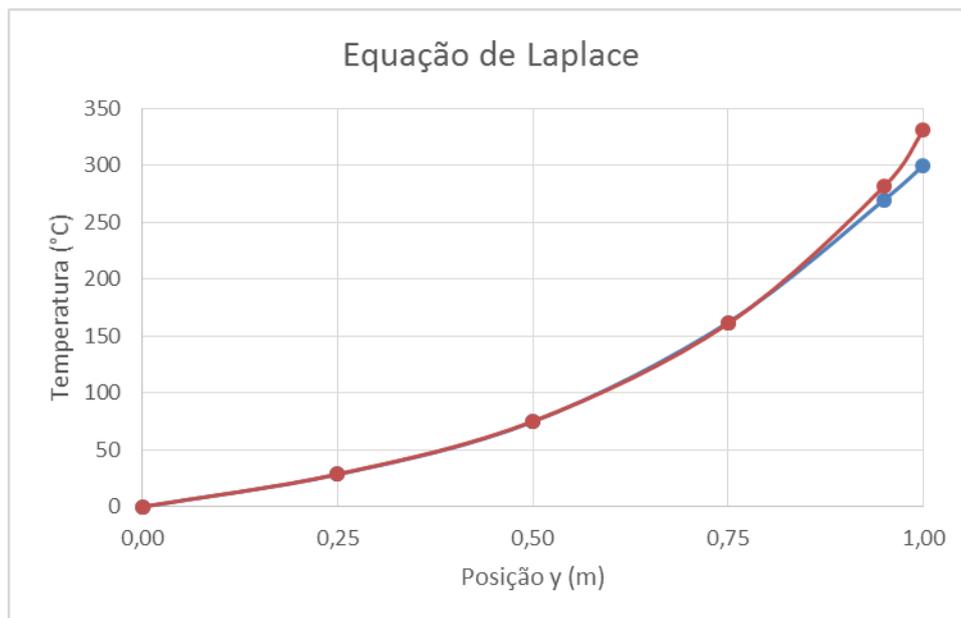


Figura 10 - Comparação entre resultados analíticos e numéricos para a Equação de Laplace na posição $x = 0,5$ m.



Tabela 3 - Comparação entre resultados analíticos e numéricos para a Equação de Laplace na posição $x = 0,5$ m.

y (m)	T (°C) (Ansys)	T (°C) (Analítico)	Δ (%)
0,00	0,00	0,00	0,00
0,25	28,47	28,67	0,71
0,50	74,73	75,09	0,49
0,75	162,01	161,01	0,62
0,95	269,90	281,74	4,39
1,00	300,00	331,21	10,40

T = temperatura;
 Δ (%) = Diferença entre as temperaturas analisadas em porcentagem.

5 Conclusões

Este trabalho mostra a análise da equação do calor para três diferentes situações e condições de contorno. Tais variações são representadas por uma avaliação em um único eixo, unidimensional, sem variação no tempo; em um único eixo com variação no tempo, ou seja transiente, e em dois eixos, bidimensional, em análise estática; Posteriormente, utilizou-se o *Ansys*, que é um software que utiliza o método dos elementos finitos na solução dos problemas, para representar as mesmas equações deduzidas analiticamente.

Observa-se, que, embora a equação parta do mesmo princípio, as análises são diferentes e dependem das dimensões, das condições de contorno, das propriedades e das geometrias estudadas. Assim, não adianta conhecer apenas a equação de calor, deve saber exatamente como aplicá-la, dependendo do problema que se tenha. E, embora a solução analítica seja semelhante para os diferentes casos, apresentam uma série de diferenças no decorrer do tratamento matemático. É possível verificar também que, as soluções sempre serão dadas em torno das funções de seno, cosseno, seno-hiperbólico e cosseno-hiperbólico.

Afirma-se, então, que o uso de um programa computacional pode ser fundamental na resolução de alguns problemas. Pois de uma forma rápida e precisa é possível encontrar valores de equações que podem ser demasiadamente trabalhosas quando tratadas analiticamente. O uso do *Ansys* mostrou-se eficaz na busca de resultados de equações simples.

6 Referências

ANSYS. **Modeling and Meshing Guide**. Canonsburg: ANSYS, INC, 2004.

AZENHA, M. A. D.; **Numerical Simulation of The Structural Behaviour of Concrete Since Its Early Ages**. 379 f. Tese de Doutorado. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto – FEUP. Porto: 2009.

Carvalho, A. G.; **Energia de Ativação dos Concretos: Experimentação e Modelagem**. 144 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE-UFRJ. Rio de Janeiro: 2002.



COELHO, N. A.. **Um Estudo Numérico do Efeito Térmico em Concreto Massa**. 152 f. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília – UnB. Brasília: 2012.

COELHO, N. A.; PEDROSO, L. J.; RÊGO, J. H. S.; **Estudo numérico através do mef para uma estrutura de concreto massa construída em camadas e com diferentes propriedades físicas**. Pirinópolis-GO. XXXIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering: 2013

FAIRBAIRN, E. M. R.; Silvos, M. M.; Filho, R. D. T.; Alves, J. L. D.; Ebecken, N. F. F.; **Optimization of mass concrete construction using genetic algorithms**. Rio de Janeiro. Elsevier: 2003.

FARIA, E. F.; **Predição da exotermia da reação de hidratação do concreto através de modelo termo-químico e modelo de dados**. 145 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio De Janeiro – COOPE/UFRJ. Rio de Janeiro: 2004.

GOMES, F.M.P.; **Concreto nas primeiras idades: propriedades e modelagem termomecânica simplificada**. 160f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Goiás – UFG. Goiânia: 2011.

HABERMAN, R.; **Elementary Applied Partial Differential Equations**. 2ª ed. New Jersey: Prentice-Hall: 1987.

HILDEBRAND, F. B. **Advanced Calculus for Applications**. New Jersey: Prentice-Hall: 1965.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S.. **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa**. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

KAVAMURA, E. E.; **Estudo do comportamento termo-estrutural bidimensional de barragens de concreto utilizando o Método dos Elementos Finitos**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná - UFPR, Curitiba: 2005.

KREYSZIG, E.; **Advanced Engineering Mathematics**. 10ª ed. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.: 2006.

KRÜGER, D. A. V.; **Análise térmica transiente de estruturas de concreto executadas por camadas**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná - UFPR, Curitiba: 2001.

RAO, S. S.; **The Finite Element Method in Engineering**. 3ª ed. United States of America: Butterworth Heinemann: 1999.