XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering
CILAMCE
Rio de Janeiro, 22-25 Nov 2015

ESTUDO DE DIFERENÇAS FINITAS PARA A EQUAÇÃO DO CALOR EM BARRAGENS DE CONCRETO

Marcelo Augusto Vasconcelos

Lineu José Pedroso

Nailde de Amorim Coelho

heimarcelo@hotmail.com

lineu@unb.br

naildea@yahoo.com.br

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – Grupo de Dinâmica e Fluido – Estrutura (GDFE). Caixa Postal 04492, Campus Darcy Ribeiro, CEP 70919 – 970, Brasília – DF.

Asa Norte, Brasília - CEP 70919 – 900, DF, Brazil.

Abstract. *Neste trabalho resolve-se numericamente a equação do calor, para se determinar a temperatura no interior de um bloco retangular de concreto, que pode ser representativo de uma zona de barragem em construção. A formulação matemática desenvolvida, e as equações resolvidas pela técnica de Diferenças Finitas, permitem se obter respostas coerentes ao problema em questão.*

Keywords: *Diferenças finitas, Efeitos Térmico, Temperatura, Transiente*

1 INTRODUÇÃO

Neste artigo, efetua-se uma análise transiente para o estudo do comportamento da temperatura em um sólido bidimensional, sem geração interna de calor, e sujeita a determinadas condições de contorno que dependem da exposição ao meio ambiente. O tratamento de problemas térmicos em barragens de concreto tem sido objeto de vários estudos anteriores pelo Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura (GDFE) da UnB. No caso do presente texto, ele está baseado numa série de trabalhos anteriores elaborados pelo GDFE utilizando o Método das Diferenças Finitas (MDF), entre os quais, podemos citar Pedroso (2011), Vasconcelos & Pedroso (2014a, 2014b), assim como Bofang (2014), Haberman (1887), R.D.C (1977) e Tveito (1998)

2 FORMULAÇÃO TEÓRICA

A equação geral do fluxo de calor, considerando a lei de Fourier e geração de calor interna, pode ser dada pela Eq. (1):

$$k\nabla^2 T + H = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

Onde ,

$k =$ Condutividade térmica ($\frac{W}{m^oC}$); $H =$ Geração de calor ($\frac{W}{m^3}$); $\rho =$ Densidade ($\frac{Kg}{m^3}$); $C_p =$ Calor específico ($\frac{J}{g^oC}$);

A aproximação por Diferenças Finitas nos permite expressar a equação diferencial parcial (equação do calor), por um conjunto de pontos discretos nos quais se determinará as temperaturas. A ideia básica é encontrar a temperatura desses pontos por meio da solução da Equação de Diferenças Finitas explícitas.

Em termos de solução computacional temos o seguinte algoritmo para o problema estudado:

$$\frac{1}{Fo} T_{i,j}^{n+1} = T_{i+1,j}^n + T_{i-1,j}^n + T_{i,j+1}^n + T_{i,j-1}^n - \left(4 - \frac{1}{Fo}\right) T_{i,j}^n + \frac{H\Delta^2}{k} \tag{2}$$

O algoritmo é aplicado em cada ponto da malha, portanto $T_{i,j}^n$ significa a temperatura no ponto (i, j) e $Tempo\ n$.

Em problemas transientes temos limitações, na escolha do incremento de tempo (ΔT), que deve atender a relação: $Fo \leq \frac{1}{4}$.

Onde,

$$Fo = \frac{k\Delta t}{\rho C_p \Delta^2}, \qquad com \quad \Delta = \Delta x = \Delta y \tag{3}$$

$Fo =$ número de Fourier.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para diminuir o tamanho dos sistemas a resolver, o problema proposto consiste em determinar a temperatura em três pontos no interior de uma região retangular representativa do domínio de uma barragem de concreto em construção por camadas, onde se extrai um bloco retangular, em separado do maciço completo da estrutura, para uma análise transiente preliminar simples. A Figura 1 apresenta o modelamento do problema físico de interesse nesse estudo. As condições de contorno e os parâmetros adotados são fictícios e sevem apenas para testar o método numérico.

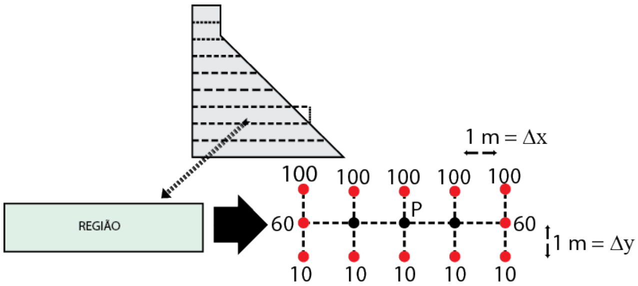

Figura 1: Problema físico proposto, limitado a uma região do domínio de interesse

A análise deste caso tem o objetivo de observar como a temperatura dos pontos internos da região se comporta ao longo do tempo. Assumimos para o caso, que a temperatura inicial (t = 0) nos pontos internos seja igual a zero.

Na solução desse problema não há geração interna de calor $(H = 0)$, e adotou-se $(Fo = 0.25)$, de acordo com a condição necessária. Temos que a cada iteração (incremento de tempo ΔT), calcula-se os valores da temperatura nos três pontos (P-1), (P) e (P+1) e constrói-se o gráfico da temperatura. Isso significa, que para o problema em estudo foram necessárias 7 iterações para que a solução do problema transiente convergisse para valores constantes. Outra observação importante foi que para $Tempo = 7\Delta T$ a solução transiente coincide com a solução estacionária, como se mostra na Figura 2 para o ponto (P) da malha, no qual a temperatura de equilíbrio é de 55,7 ºC. As Figuras de 3 a 6 ilustram as Respostas Tansientes da temperatura para a região retangular.

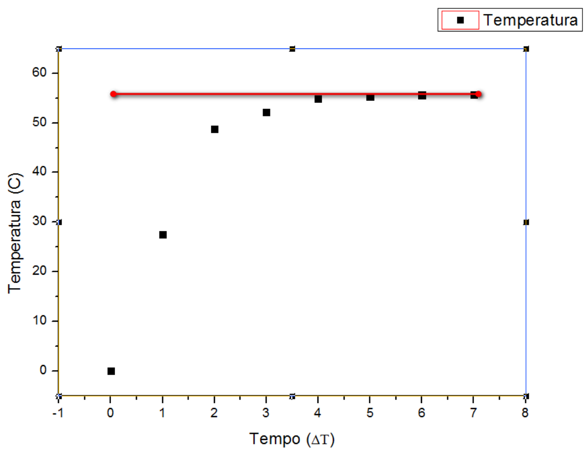

Figura 2: Comparação entre os regimes Estacionário (linha vermelha) e Transiente (pontos pretos)

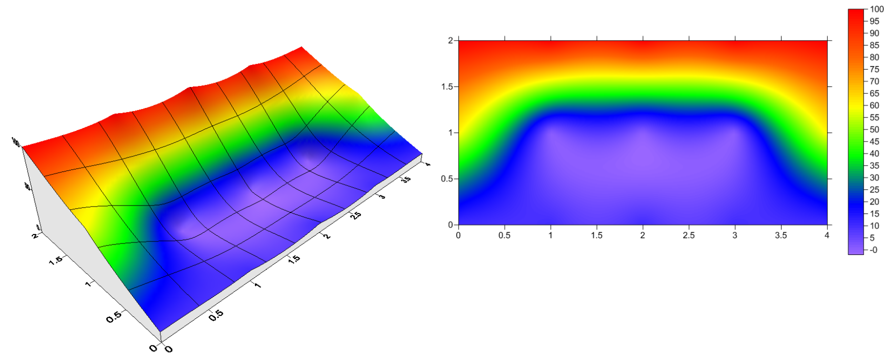

Figura 3: Resposta Transiente no $Tempo = 0$

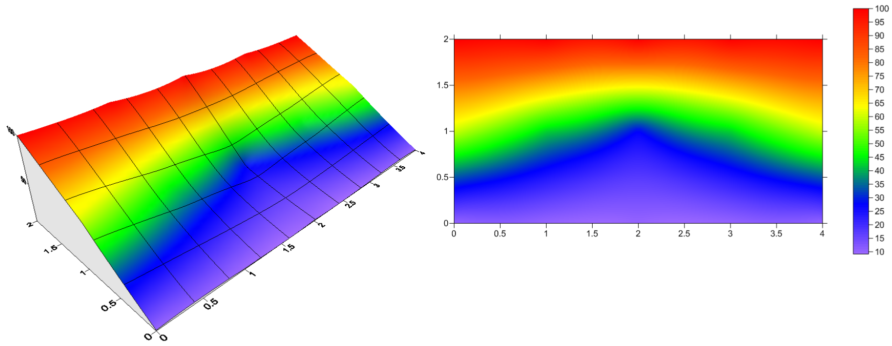

Figura 4: Resposta Transiente no $Tempo = 1\Delta T$

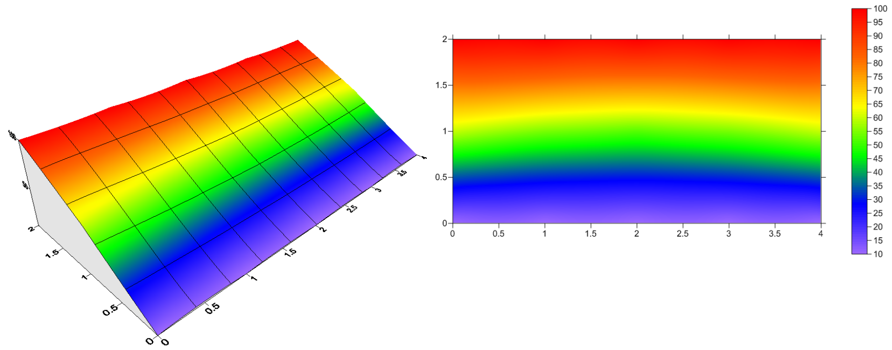

Figura 5: Resposta Transiente no $Tempo = 3\Delta T$

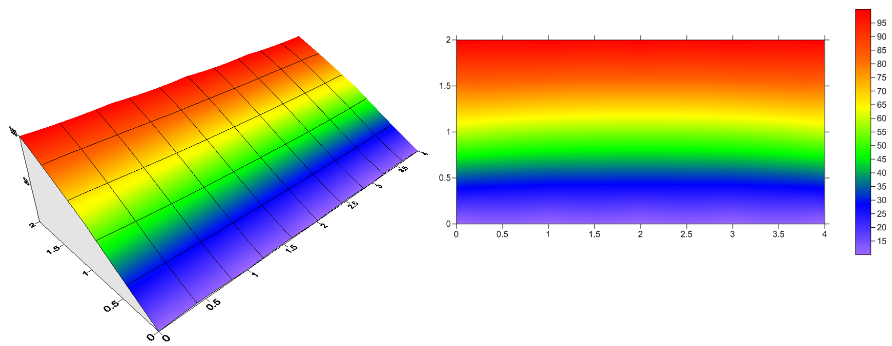

Figura 6: Resposta Transiente no $Tempo = 7\Delta T$

O algoritmo apresentado na Eq. (2) foi implementado em linguagem MATLAB para a solução iterativa dos sistemas. Os resultados obtidos para a região retangular são apresentados nas Figuras 3 a 7, e foram plotados usando o software Surfer versão 9.8.669. A Figura 3 representa a condição inicial ($Tempo = 0$) para a análise. E a cada incremento de tempo (ΔT), a temperatura dos três pontos internos aumenta até que haja convergência dos valores após 7 períodos de tempo. Assim, a Resposta Transiente tende ao comportamento do mesmo problema em regime Estacionário.

4 CONCLUSÃO

Dada a importância e variedade dos problemas envolvendo condução de calor em corpos sólidos, podemos afirmar que o Método das Diferenças Finitas (MDF) é um método simples, mas efetivo para resolver problemas complexos em engenharia, como por exemplo a solução da equação diferencial parcial do calor. Nesse trabalho, determinou-se numericamente a temperatura em três pontos no interior de uma região representativa da barragem. No problema Transiente, além da mudança interna da temperatura ao longo do tempo, a temperatura final coincide com a solução do problema estacionário.

REFERENCIAS

Bofang, Z., 2014. *Thermal Stresses and Temperature Control of Mass Concrete*. Tsinghua University Press.

Haberman, R. (1987). *Elementary Applied Partial Differential Equations*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Pedroso, L. J., 2011. *Uma Introdução do Método das Diferenças Finitas Centrais em Cavidades Acústicas 2D*. Publicação Didática, Universidade de Brasília.

R., D. C., & G., D. L. (1977). *Heat Transfer Calculations Using Finite Difference Equations*. London: Applied Science Publishers LTD.

Tveito, A., & Winther, R. (1998). *Introduction to Partial Differential Equations: A Computational Approach* (Vol. 29). New York: Springer-Verlag.

Vasconcelos, M. A., & Pedroso, L. J. (2014a). *Aplicação do Método das Diferenças Finitas a Problemas Envolvendo Barragem-Reservatório*. 20º Congresso de Iniciação Científica da UnB, 11º Congresso de Iniciação Científica do DF, Brasília.

Vasconcelos, M. A., & Pedroso, L. J. (2014b). *Um Estudo do Método das Diferenças Finitas Aplicado a Problemas Estacionários e Transientes em Barragens e Reservatórios*. Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Brasília: CILAMCE 2014 - Proceedings of the XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering.