

UM ESTUDO ANALÍTICO-NUMÉRICO TERMOMECANICO EM ELEMENTOS SIMPLES DE CONCRETO COM VARIAÇÃO DO MÓDULO DE ELASTICIDADE

ONE THERMOMECHANICAL ANALYTICAL-NUMERICAL STUDY IN SIMPLE CONCRETE ELEMENTS WITH VARIATION OF THE ELASTICITY MODULUS

Coelho, Nailde de Amorim (1); Pedroso, Lineu José (2)

(1) Professora Doutora, Colegiado de Engenharia Civil, Universidade Federal do Vale do São Francisco- UNIVASF

(2) Professor Doutor, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília - UnB
nailde.coelho@univasf.edu.br

Resumo

As temperaturas impostas ou geradas nas estruturas podem ser desencadeadoras de tensões que podem ocasionar fissuras quando estas são maiores que a capacidade resistiva do corpo. Essas tensões ocorrem também pelo fato das estruturas estarem restritas, ou seja, não estão livres para se movimentar. As restrições impostas são denominadas condições de contorno, as quais influenciam diretamente nas tensões geradas, por isso, devem ser avaliadas cautelosamente. Além disso, as propriedades dos materiais também irão conduzir a variações de tensões, no caso do concreto, as propriedades dependem dos seus componentes, por isso, são facilmente modificadas com a alteração da composição ou resistência, por exemplo. O módulo de elasticidade varia também com a modificação da temperatura do corpo, no entanto, nem sempre essa transformação é levada em consideração. Alguns dos meios de cálculos das tensões são pela forma analítica e pelos métodos numéricos, como é o caso do Método dos Elementos Finitos – MEF. O MEF é aplicado em muitos programas computacionais, o Ansys, utilizado neste trabalho é um deles. Diante disso, são mostradas comparações entre resultados analíticos e numéricos para solução de problemas termomecânicos em placas simples com suas devidas restrições aplicadas, assim como é verificada a influência da mudança do módulo de elasticidade com a temperatura no cálculo das tensões, com o intuito de contribuir com o progresso nos estudos de problemas termomecânicos, apresentando as tensões oriundas das variações térmicas, através de métodos analíticos e numéricos. Com isso, situações mais complexas podem ser modeladas garantindo a correta aplicação do programa em estudo.

Palavra-Chave: Soluções analíticas-numéricas, Método dos Elementos Finitos, Concreto, Módulo de elasticidade

Abstract

The temperatures imposed or generated on the structures can be generate stress which can cause cracks when they are larger than the resistive capacity of the body. These tensions also occur because the

structures are restricted, that is, they are not free to move. The imposed constraints are called boundary conditions, which directly influence the generated stresses, so they should be carefully evaluated. In addition, the properties of the materials will also lead to stress variations, in the case of concrete, the properties depend on their components, so they are easily modified with change in composition or strength, for example. The elasticity modulus also varies with the modification of body temperature, however, this transformation is not always taken into account. Some of the means of stress calculations are by analytical form and by numerical methods, as is the case of the Finite Element Method - FEM. The FEM is applied in many computer programs, the Ansys, used in this work is one of them. Therefore, comparisons between analytical and numerical results are presented for the solution of simple thermomechanical problems with their applied restrictions, as well as the influence of the change of modulus of elasticity with temperature in the calculation of stresses, in order to contribute with the progress in the studies of thermomechanical problems, presenting the tensions arising from the thermal variations, through analytical and numerical methods. Thus, more complex problems can be modeled ensuring the correct implementation of the program under study. Thus, more complex problems can be modeled by the correct implementation of the program under study.

Keywords: Analytical-numerical solutions, Finite Element Method, Concrete, Modulus of elasticity

1 Introdução

Quando uma estrutura sofre efeitos térmicos e não está livre para se movimentar surgem as tensões oriundas das suas restrições. Estas podem causar danos ao material caso ultrapassagem a capacidade de suporte das peças.

O grau de restrição é a razão entre a tensão real resultante da variação de volume e a tensão que resultaria se estivesse completamente restrito. Numericamente, a tensão é igual ao produto do grau de restrição existente no ponto em questão e a mudança no comprimento que ocorreria se o concreto não estivesse restringido (ACI 207.2R, 2007).

Para verificar a possibilidade de ocorrência de manifestações patológicas de origem térmica não basta conhecer apenas a geometria. Para reduzir a possibilidade de fissuração de origem térmica, recomenda-se a realização de estudos térmicos para determinar os procedimentos necessários para a minimização deste problema potencial (Vicente *et al* 2014).

O aumento da temperatura modifica o módulo de elasticidade inicial de concreto. A taxa de fluência também aumenta com a temperatura mais elevada e a tensão de fluência é ampliada. Portanto, essas propriedades sofrem variações locais diferenciadas dentro das estruturas de concreto massa em uma função da temperatura e que, por sua vez, é uma função do tempo (Wu e Luna, 2001).

Uma forma de solução desses problemas é através das soluções analíticas, mas estas apresentam limitações. Nem todos os problemas podem ser resolvidos analiticamente, e

quanto mais complexa a equação, mais complicada será a solução e mais difícil de se obterem os resultados. Dessa forma, faz-se necessário a utilização de programas computacionais afim de se obter respostas para os diversos tipos de problemas. No entanto, é imprescindível que haja uma verificação da correta manipulação dos programas, garantido assim, a exatidão e confiança dos resultados obtidos. Isto é possível a partir da comparação dos resultados numéricos e analíticos obtidos de forma manual ou com softwares matemáticos mais simples com os programas mais rebuscados (Coelho, 2016).

O Método dos Elementos Finitos - MEF, por sua vez, surge como uma alternativa de solução por programas computacionais. Em princípio, não tem muitas limitações, atendendo a todo tipo de geometria, por isso é amplamente utilizado, como é o caso dos programas computacionais. Segundo Moaveni (1999), o MEF utiliza a formulação integral criando sistemas de equações algébricas e proporcionando uma solução aproximada em cada elemento. A solução completa é dada com o somatório dos resultados individuais para cada elemento.

A análise por elementos finitos pode integrar as medidas técnicas modernizadas e o projeto real, podendo fazer o controle da temperatura e da tensão térmica; é viável como método auxiliar de controle de temperatura e desfruta de ampla aplicação no projeto real (Yunchuan *et al* 2012).

Com base no exposto, a proposta deste trabalho é avançar nos estudos dos problemas termomecânicos, utilizando o método analítico e o MEF para resolver a equação do calor, e encontrar as tensões originadas das variações térmicas, a fim de compreender o fenômeno e subsidiar futuras pesquisas na área.

2 Fundamentos Teóricos

Para os problemas clássicos de vigas e placas estudados, serão apresentadas as equações que governam o problema térmico seguido dos modelos mecânicos. Os problemas termomecânicos trabalham de forma acoplada, ou seja, primeiramente são resolvidos os problemas térmicos e a partir dessas soluções, encontram-se as tensões para os elementos. Serão mostradas apenas as equações principais e maiores detalhes podem ser encontrados em Hetnaski & Eslami (2009), Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1989), Szilard (2004), Boley & Weiner (1976), Coelho (2012).

A equação da condução de calor com geração de calor interna é apresentada conforme a Equação (1).

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{Equação 1})$$

Em que:



- k = condutividade térmica do material;
- $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T =$ gradiente térmico;
- \dot{q} = geração de calor em função do tempo;
- ρ = massa específica;
- c = calor específico;
- $\frac{\partial T}{\partial t}$ = variação da temperatura com o tempo.

Dada a placa da figura 1, que apresenta temperaturas T_t e T_b nas suas extremidades de espessura h . Esta irá apresentar uma deflexão w , em torno do seu eixo Z .

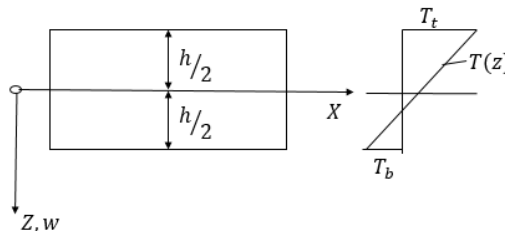


Figura 1 – Distribuição de temperatura através da espessura linear de chapa.

A equação geral da placa é dada pela equação 2:

$$D\nabla^4 w = P \quad (\text{Equação 2})$$

Em que:

- $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ = rigidez à flexão da placa;
- E = módulo de elasticidade;
- ν = coeficiente de Poisson;
- $\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ = deslocamento na direção Z ;
- P = carga térmica transversal equivalente

Sendo:

$$P = -\nabla^2 m \quad (\text{Equação 3})$$

Em que m é o momento, dado pelas equações 4 ou 5, onde α é o coeficiente de expansão térmica.

$$m = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \int_{-h/2}^{h/2} (\Delta T) z \, dz \quad (\text{Equação 4})$$

$$m = D\alpha \frac{T_t - T_b}{h} (1 + \nu) \quad (\text{Equação 5})$$

A partir da equação de placas, pode-se obter também a solução para as vigas, uma vez que pode-se considerar que a viga é um caso particular da placa em uma dimensão.

2.1 Condições iniciais e de contorno

As Condições de Contorno CC influenciam diretamente nos resultados obtidos. Nos problemas termomecânicos, que trabalham de forma acoplada, tem-se as CC para as análises térmicas e as CC para as análises mecânicas.

Para os problemas térmicos utilizados neste trabalho, as CC são impostas como:

- Temperatura prescrita: $T(x, y, z, t) = T$
- Perfeito isolamento: $k \frac{\partial T}{\partial n} = 0$

Para a placa retangular, foram aplicadas as seguintes CC no cálculo de tensões:

- Extremidade simplesmente apoiada: $w = 0$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{m}{D}$
- Extremidade fixa: $w = 0$ e $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$

3 Resultados

Para análise termomecânica analítica-numérica, foram investigadas uma viga engastada submetida à diferentes temperaturas nas superfícies superior e inferior, e uma placa sujeita a troca de calor, em duas condições, com o módulo de elasticidade constante e, posteriormente, variando com a temperatura, os quais são apresentados no itens que seguem.

3.1 Viga com Geração de Calor Interno

Primeiro foi estudada uma viga com distintas condições de contorno, para a qual as soluções analíticas são dadas por Hetnarski e Eslami (2009). A primeira verificação, será a térmica, em que a viga está com temperatura imposta T_1 e T_2 , geração de calor interno q , e o eixo cartesiano se encontra no meio da extremidade esquerda. A figura 2 representa o problema bidimensional e a equação 6, mostra a solução analítica.

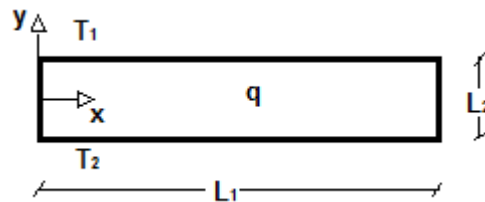


Figura 2 – Viga retangular para análise térmica.

$$T = \left(-\frac{q}{2k}\right)y^2 + \left(\frac{T_1 - T_2}{L_2}\right)y + \left(\frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{q}{8k}L_2^2\right) \quad (\text{Equação 6})$$

Utilizando-se os valores $T_1 = 100^\circ\text{C}$, $T_2 = 0^\circ\text{C}$, $L_2 = 0,5 \text{ m}$, $L_1 = 1 \text{ m}$, $q = 200\text{W}/\text{m}^3$, obtém-se as isotermas de temperatura conforme a figura 3.

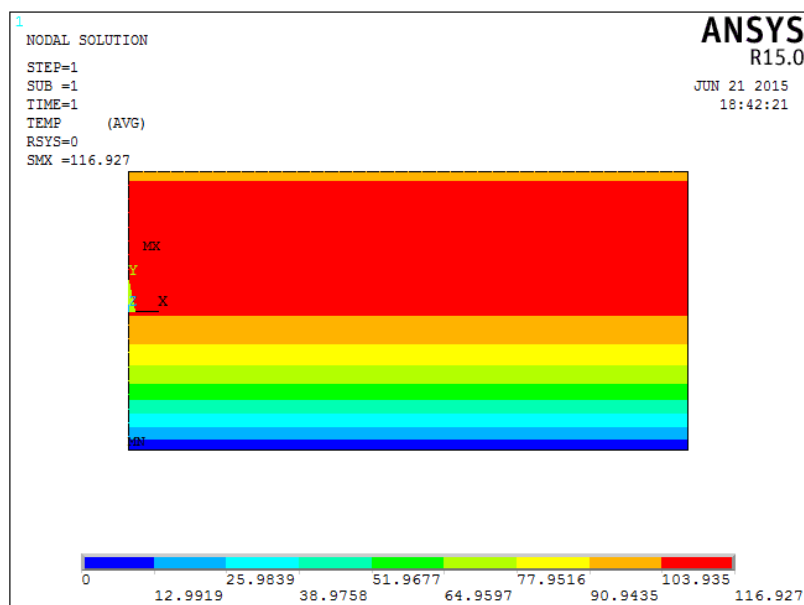


Figura 3 – Isotermas de temperatura para viga retangular pelo MEF (ANSYS).

Comparando os resultados analíticos obtidos com os valores numéricos tem-se o gráfico da figura 4. Nota-se que não há distinção entre eles.

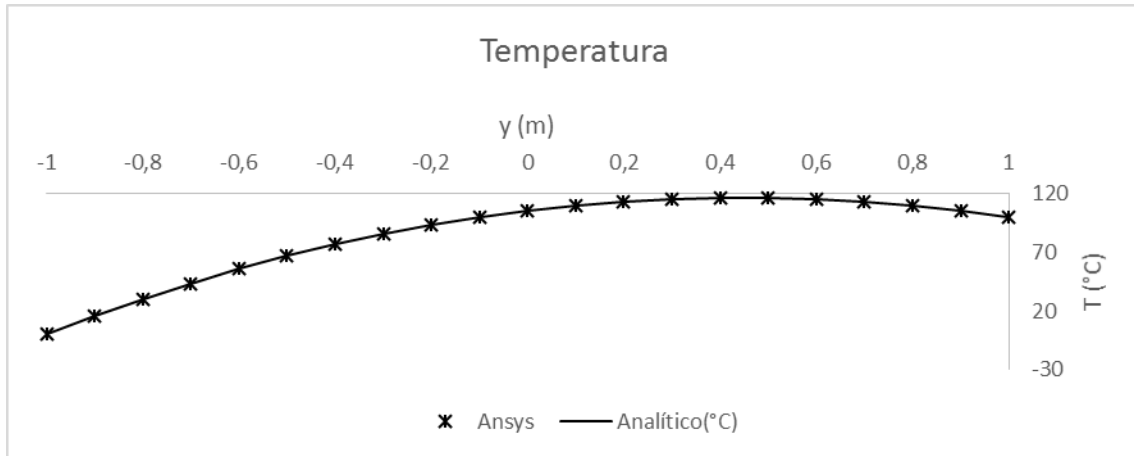


Figura 4 – Comparação dos resultados térmicos entre o método analítico e o MEF (ANSYS).

Para a tensão, foi considerada uma viga engastada nas duas extremidades, conforme a figura 5.

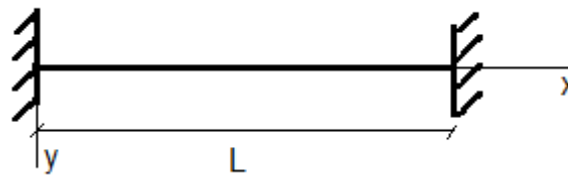


Figura 5 – Viga biengastada.

Neste caso, a deformação e a deflexão nesta extremidade deve ser igual a zero, equações 7 e 8:

$$v|_{x=L_1} = 0 \quad \text{(Equação 7)}$$

$$\frac{dv}{dx}|_{x=L_1} = 0 \quad \text{(Equação 8)}$$

E a equação da tensão em x é dada pela equação 9.

$$\sigma_{xx} = E\alpha \left[\frac{q}{2k} y^2 + \frac{T_1 - T_2}{L_2} y + \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{q}{8k} L_2^2 \right] \quad \text{(Equação 9)}$$

Para aplicação, foram utilizadas as propriedades mecânicas mostradas a seguir, as demais são propriedades térmicas. Ressalta-se que esses valores foram utilizados em todos os exemplos.

- Módulo de elasticidade: $E = 210000MPa$
- Coeficiente de dilatação térmica: $\alpha = 7 \times 10^{-6}/^{\circ}C$

Os resultados das tensões térmicas obtidos com o ANSYS podem ser vistos na figura 6 e a comparação com os pontos centrais de x é mostrada na figura 7, na qual nota-se uma boa correlação dos dados.

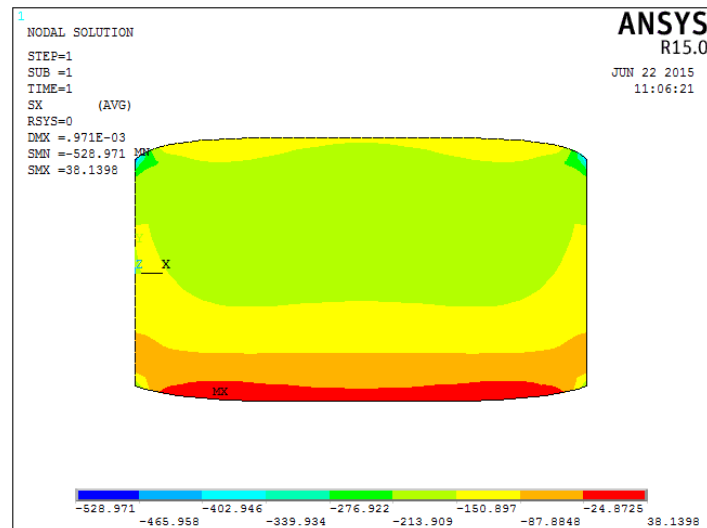


Figura 6 – Análise pelo MEF (ANSYS) dos resultados termomecânicos para a viga biengastada.

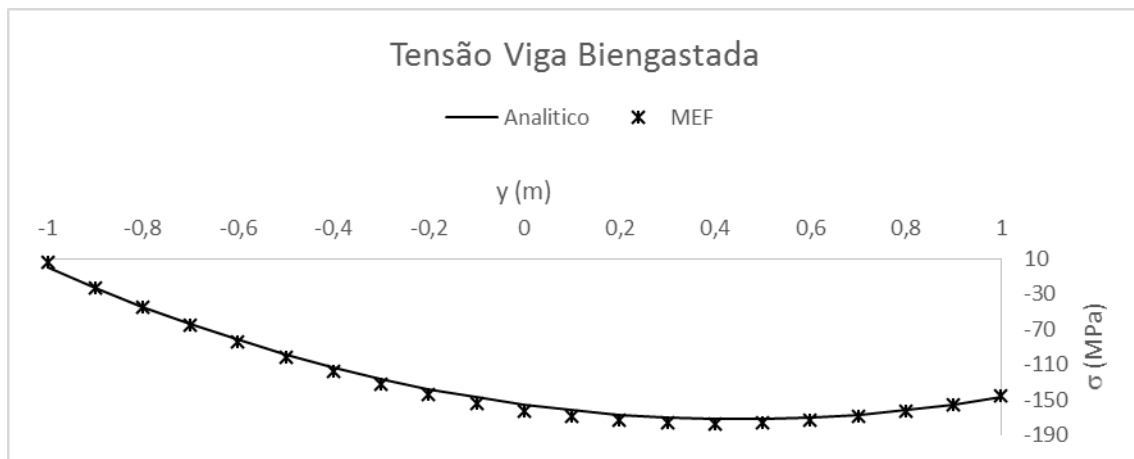


Figura 7 – Comparação dos resultados mecânicos para a viga biengastada.

Com os resultados obtidos, evidencia-se boas respostas do programa utilizado em comparação com os modelos analíticos, mostrando que o mesmo pode ser utilizado para análises termomecânicas simples e elásticas. A maioria dos problemas de engenharia são mais complexos, de difícil solução analítica. Porém, com o domínio sobre a ferramenta demonstrado, é possível fazer aplicações para conjunturas mais complicadas, pois, considera-se que havendo bons resultados nas situações mais simples, haverá também para as mais complicadas.

3.2 Placa retangular com módulo de elasticidade constante

Após a análise da viga, será apresentado o resultado de uma laje fixa, engastada nas suas laterais e na sua base, figura 8, proposta por Bofang (2014), para a qual foram adotadas temperaturas de 20°C na superfície superior e 100°C na sua base, cuja solução mecânica analítica é dada pela equação 10. Outros resultados de lajes abordadas por Szilard (2004) podem ser encontradas em Coelho *et al* (2016) e em Coelho (2016). As propriedades utilizadas no modelo são mostradas na tabela 1.

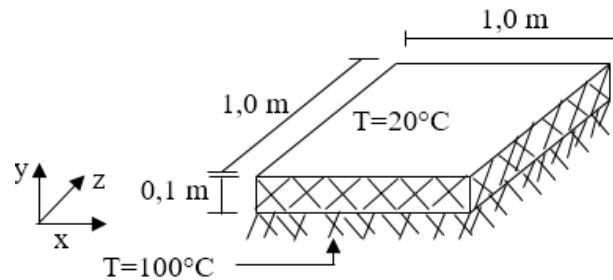


Figura 8 – Laje estudada.

$$\sigma_x = \sigma_z = \sigma = -\frac{E\alpha T}{1-\nu} \quad (\text{Equação 10})$$

Tabela 0.1 – Propriedades da placa.

Propriedade	Valor
Massa específica (ρ)	2500,00 kg/m ³
Coefficiente de dilatação térmica (α)	1,40 x 10 ⁻⁵ /°C
Modulo de elasticidade (E)	21000,00 MPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,18
Condutividade térmica (k)	2,00 W/m°C
Calor específico (c)	1000,00 J/kg°C

Como CC da temperatura foram adotadas as temperaturas de 100°C na base e 20°C na superfície superior, formando um gradiente térmico, conforme mostra a figura 9a. A figura 9b, representa as tensões térmicas em x, $\sigma(x,T)$. Sendo as CC iguais nos eixos x e z, as tensões serão equivalentes para os respectivos eixos.

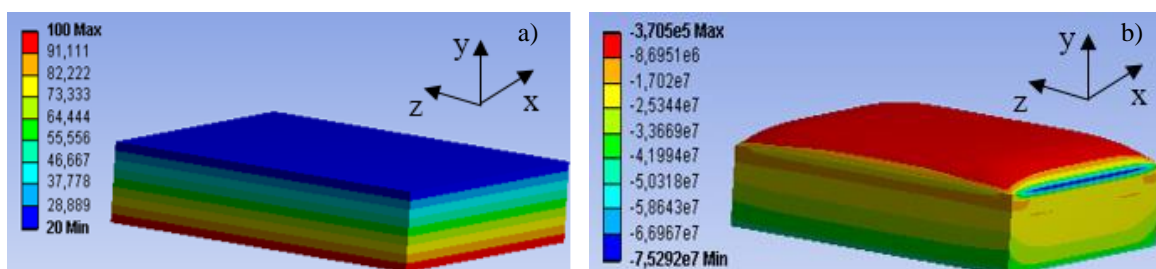


Figura 9 – a) Gradiente térmico e b) Tensões térmicas em x.

Fazendo as comparações entre os resultados analíticos e numéricos para o ponto central, figura 10, nota-se que não houve distinção entre as análises, mostrando que a validação

foi satisfatória. Ressalta-se que as tensões em x e z são iguais devido as CC impostas serem equivalentes. No eixo y a laje está livre para se movimentar na superfície, por isso as tensões são nulas.

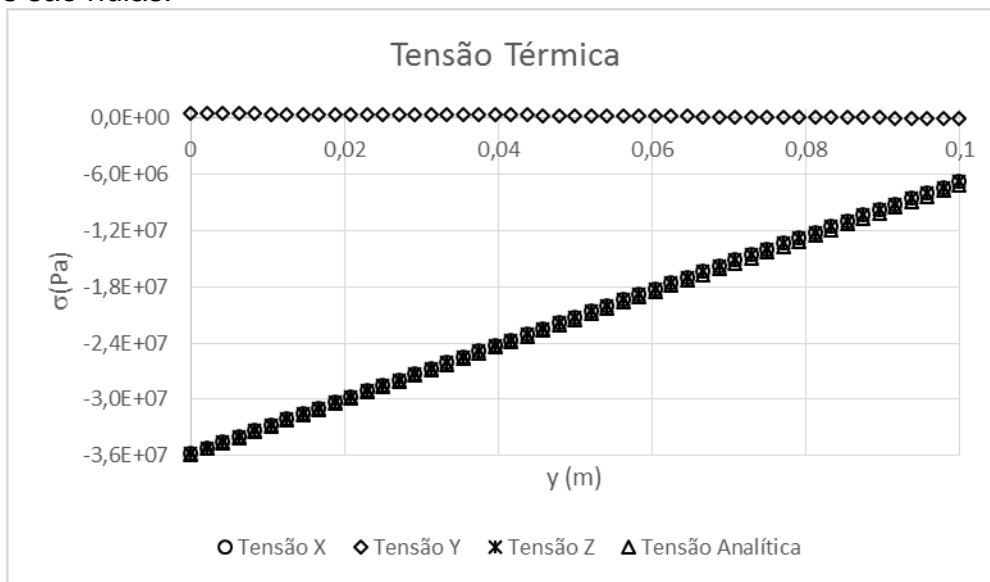


Figura 10 – Comparação analítica-numérica para os pontos centrais em y.

Para um ponto central e um ponto qualquer do corpo, figura 11, de onde foram extraídas as temperaturas e tensões em função do tempo, em segundos, observa-se que os resultados de ambos foram condizentes com os resultados analíticos, com boa precisão. Dessa forma, afirma-se que as tensões elásticas transientes ou estáticas podem ser tratadas com o programa de MEF.

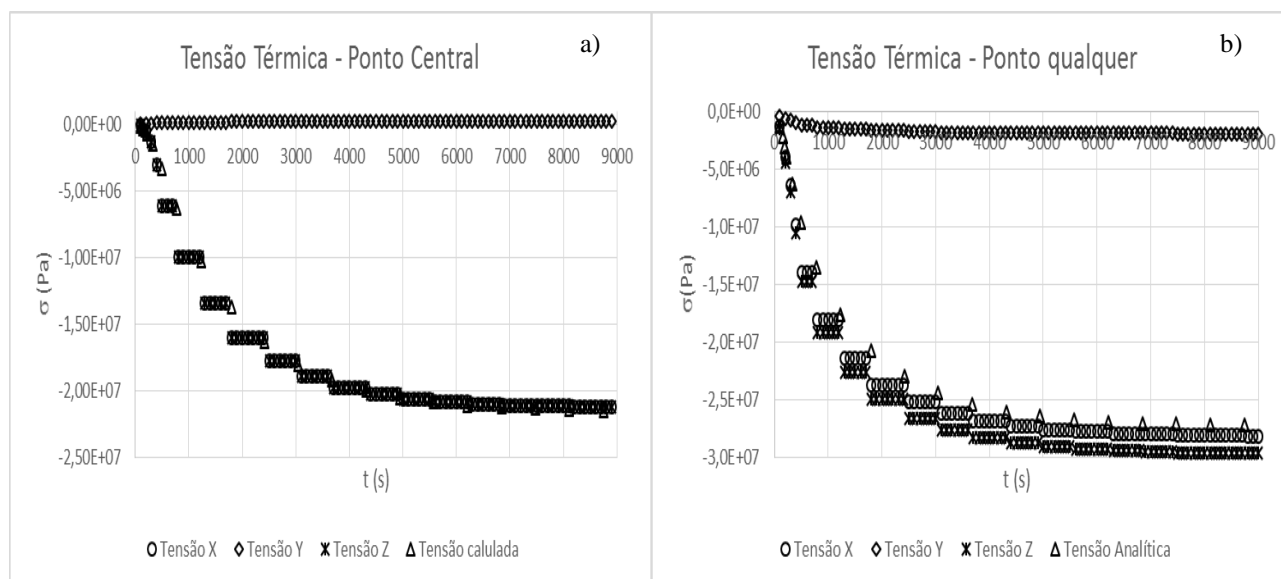


Figura 11 – Comparação analítico-numérica para a) um ponto em função do tempo; b) um ponto qualquer em função do tempo.

3.3 Placa retangular com módulo de elasticidade variando com a temperatura

Para o exemplo mostrado no item 3.2, proposto por Bofang (2014), o módulo de elasticidade foi colocado em função da temperatura, de acordo com a equação 11, considerando-se $E_0 = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$:

$$E(T) = E_0 [1 - \exp(-0,40T^{0,34})] \quad (\text{Equação 11})$$

Assim, fazendo-se a comparação entre os resultados analíticos e numéricos das tensões nas direções de X, Y e Z, eixo das ordenadas, em função do tempo, eixo das abscissas, figura 12, observa-se uma boa compatibilidade dos resultados, mostrando o acerto na utilização do programa para problemas elásticos.

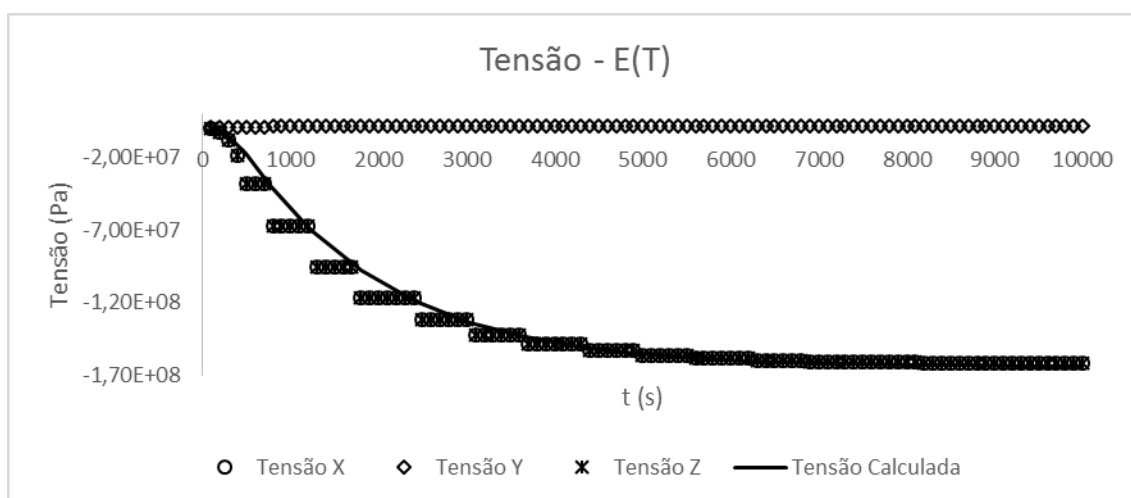


Figura 12 – Comparação dos resultados mecânicos para a viga biengastada.

Desta forma, verifica-se que para todas as análises os valores numéricos e analíticos apresentaram valores próximos ou coincidentes, podendo-se afirmar que o programa examinado foi validado com sucesso e outros problemas mais rebuscados podem ser estudados com confiabilidade nos resultados.

4 Conclusões

Os estudos termomecânicos são necessários na engenharia e o MEF mostra-se como uma ferramenta poderosa nesse tipo de análise. Para os casos verificados, tanto a viga quanto a laje mostraram resultados analíticos e numéricos satisfatórios, dentro de valores esperados. Com isso percebe-se que o programa foi validado e que problemas mais complexos podem ser efetuados com garantia da representação de situações práticas. Normalmente trabalha-se com módulo de elasticidade constante, sem levar em consideração a alteração deste devido à modificação térmica empregada nas estruturas, como de fato acontece. No entanto, este estudo mostrou que é possível fazer o módulo

de elasticidade ser modificado com a temperatura e os resultados se aproximam ainda mais dos resultados analíticos.

De forma geral, os estudos termomecânicos na engenharia necessitam de mais investigações a respeito dos fenômenos que ocorrem nas peças, as variações geométricas e o surgimento de tensões que podem desencadear em fissurações, caso ultrapassem a capacidade resistiva do material analisado. Este trabalho vem acrescentar dados e métodos de validações de programas que possam ser utilizados para situações em que as soluções analíticas sejam mais difíceis ou mesmo impossíveis.

5 Referências

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Report on Thermal and Volume Change Effects on Cracking of Mass Concrete**. ACI 207.2R-07. Farmington Hills, 2007.

BOFANG, Z.; **Thermal Stresses and Temperature Control of Mass Concrete**. 1 ed. Elsevier: 2014.

BOLEY, B. A; WEINER, J. H. **Theory of thermal stress**. New york: John Wiley & Sons, 1976.

COELHO, N. A.; **Métodos Analíticos e Numéricos para o Estudo dos Efeitos Termomecânicos no Concreto Massa Orientados às Barragens de Gravidade**. Tese de doutorado. Universidade de Brasília – UnB. Brasília: 2016.

COELHO, N. A.. **Um Estudo Numérico do Efeito Térmico em Concreto Massa**. 152 f. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília – UnB. Brasília: 2012.

COELHO, N. A.; GOMES, F. M. P.; PEDROSO, L. J.; SILVA, D. A.. **Um estudo comparativo analítico-numérico de tensões térmicas em casos clássicos de vigas e placas**. In: XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. Brasília: 2016.

HETNARSKI, R. B.; ESLAMI, M. R.; **Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications**. New York: Springer, 2009.

MOAVENI, S. **Finite Element Analyses: Theory and Application with ANSYS**. New Jersey: Editora Prentice-Hall, 1999.

SZILARD, R, 2004. **Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods**. John Wiley & Sons. New Jersey: 2004.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. New York: McGraw-Hill Book Company, 1989.



Anais do 59º Congresso Brasileiro do Concreto
CBC2017
Outubro-Novembro / 2017



@ 2017 - IBRACON - ISSN 2175-8182

VICENTE, G. R.; KUPERMAN, S. C.; FUNAHASHI JÚNIOR, E. I.. **Fissuração de Origem Térmica em Blocos de Fundação: Quando Refrigerar o Concreto?** In: 56º Congresso Brasileiro do Concreto. Natal: Ibracon: 2014.

WU, Y.; LUNA, R.. **Numerical implementation of temperature and creep in mass concrete.** Finite Elements in Analysis and Design. Elsevier: 2001.

YUNCHUAN, Z.; LIANG, B.; SHENGYUAN, Y.; GUTING, C.. **Simulation Analysis of Mass Concrete Temperature Field.** Procedia Earth and Planetary Science. Elsevier: 2012.