



## **UM ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO-NUMÉRICO DE TENSÕES TÉRMICAS EM CASOS CLÁSSICOS DE VIGAS E PLACAS**

**Nailde de Amorim Coelho**

nailde.coelho@univasf.br

Universidade de Brasília – UnB e Universidade Federal do Vale do São Francisco - Univasf

**Flávio Mamede Pereira Gomes**

fmpgomes@furnas.com.br

Universidade de Brasília (UnB) e Furnas

**Lineu José Pedroso**

lineu@unb.br

Universidade de Brasília (UnB)

**Dyorgge Alves Silva**

dyorggeasilva@utfpr.edu.br

Universidade de Brasília (UnB) e Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Universidade de Brasília – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental- Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil - Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura. Caixa Postal 04492, Campus Darcy Ribeiro, CEP 70919-9700, Brasília-DF.

**Resumo.** *A avaliação do fenômeno térmico em estruturas típicas, como por exemplo, vigas, laje, pilares e blocos é importante para que se evite fissuração indesejável e que podem induzir a deterioração do material. Diante deste fato surge a necessidade de uma avaliação mais rigorosa da temperatura e da conseqüente geração de tensões internas nestes tipos de estruturas com dimensões consideráveis. A resolução de tal problema pode ser realizada de diversas formas, entre elas têm-se as soluções analíticas e os métodos numéricos, que podem ser resolvidos com programas que utilizam o Método dos Elementos Finitos. Para os cálculos apresentados neste trabalho, adotou-se ambas as metodologias como forma de solução do problema afim de comparar e validar a obtenção desses efeitos de origem térmica. Para isto é apresentado um estudo de dois tipos de estruturas diferentes, vigas e placas; cada estrutura possui características diferentes de contorno, totalizando cinco estudo de caso, e devido a este fato, o tratamento dos resultados das simulações e das equações analíticas são exclusivo para cada uma destas estruturas, apesar do fenômeno termomecânico ser o mesmo e apresentar excelente confiabilidade entre os resultados.*

**Palavras-chaves:** *Tensões-térmicas, temperatura, ANSYS.*

## 1 INTRODUÇÃO

Muitos materiais apresentam tensões devido a alterações térmicas no seu interior. As diferenças de temperatura produzem gradientes que provocam alongamentos ou encurtamento das peças, proporcional ao seu coeficiente de dilatação térmica, e, conseqüentemente, surgem tensões, que podem provocar fissuras. Essas tensões podem ainda estar associadas à tensões oriundas de cargas externas ou pelo seu peso próprio, aumentando ainda mais a possibilidade de se obter problemas.

Esse fenômeno pode ser encontrado em estruturas de concreto massa, que tem geração interna de calor, reatores nucleares, que devem suportar altas temperaturas, situações de incêndio, onde há uma troca brusca de temperatura, na parte mecânica dos veículos, enfim, há uma gama de situações práticas que requerem o estudo desse tema.

Tensões térmicas no concreto são geralmente causadas pela restrição de deformações volumétricas logo após o seu lançamento. Estes tipos de tensões causa danos nas estruturas ou degradação do seu bom funcionamento estrutural. Elas também podem causar uma perda de estanqueidade e durabilidade, especialmente em ambientes marinhos (Amin, et al, 2009).

A investigação preliminar desses elementos proporciona um conhecimento prévio do que pode ocorrer e que tipo de intervenções podem ser feitas antes que o problema apareça. Isso pode ser realizado através de programas computacionais que aproximam-se da realidade. No entanto, antes de assumir como verdadeiras as soluções apresentadas, deve-se fazer estudos em exemplos mais simples de forma que se possa garantir a correta utilização dos programas.

O uso de um programa baseado no método dos elementos finitos na solução dos problemas, pode ser um meio rápido e prático para uma análise térmica em estruturas. Isso possibilita que as estruturas sejam analisadas antes mesmo da construção, permitindo assim estratégias para a redução de tensões devido aos efeitos térmicos (Coelho, et al., 2014).

As propriedades dos materiais influenciam diretamente no gradiente térmico. Uma menor condutividade térmica do concreto implica em uma maior temperatura máxima devido à dificuldade de dissipação do calor nesse corpo. Com a redução da massa específica tem-se o

aumento da temperatura. Isso porque têm-se uma maior porosidade, o que dificulta a dissipação interna de calor. Para o calor específico, quanto menor o valor, maior a temperatura, pois uma quantidade menor de calor é necessária para que haja elevação de temperatura (Coelho, Nepomuceno & Pedroso, 2014).

Com a mudança de temperatura, a expansão da placa pode ocorrer. Para a maioria dos materiais estruturais, estes movimentos são diretamente proporcionais à mudança da temperatura. Dentro de certa gama de temperaturas, tais relações lineares podem ser expressas pelo coeficiente de expansão térmica  $\alpha$ , que representa a alteração no comprimento do corpo provocada por um grau ( $T = 1^\circ\text{C}$ ) de mudança de temperatura. Em unidades SI,  $\alpha$  é expresso em metros por grau Celsius. Podem surgir então as tensões térmicas, as quais estão presentes se os movimentos causados por mudanças de temperatura são restringidos; caso contrário, ocorrem apenas as deformações térmicas  $\varepsilon$  (Szilard, 2004).

Um corpo constituído por uma série de pequenos elementos cúbicos de igual tamanho, se encaixam para formar o corpo dado contínuo. Se a temperatura do corpo é elevada uniformemente, e se as suas superfícies delimitadoras não são restringidas, cada elemento irá expandir uma quantidade igual (proporcional ao aumento de temperatura) de maneira uniforme em todas as direções. Os elementos ainda são, portanto, cubos de tamanhos iguais; eles ainda se encaixam para formar um corpo contínuo, e não surgem tensões. Se, no entanto, o aumento da temperatura não é uniforme, cada elemento tenderá a expandir por uma quantidade diferente, que é uma proporcional à sua própria elevação da temperatura. Os cubos de diferentes tamanhos resultantes não podem, em geral, se encaixar; desde que, no entanto, o corpo deve permanecer constante, cada elemento deve conter as distorções dos seus vizinhos, ou, em outras palavras, devem surgir tensões (Boley & Weiner, 1960).

Uma mudança na temperatura pode provocar alterações nas dimensões de um material. Em geral, se a temperatura aumenta, o material se expande; se a temperatura diminui, o material se contrai (Hibbeler, 2010). O quanto o material vai se expandir ou contrair depende do coeficiente de expansão térmica, que determina a deformação obtida a cada unidade de temperatura.

Segundo Hetnaski & Eslami (2009), a lei da termoelasticidade, inclui as equações de movimento, as equações de compatibilidade e a lei constitutiva. Na teoria clássica da elasticidade há situações em que um problema pode ser bem aproximado pela teoria bidimensional. Estas formulações são classificadas como estados plano de tensão ou deformação. Cada classe de problemas é dividida em simples ou plano de tensão ou deformação generalizada.

As formulações empregadas para as tensões térmicas partem de quatro pressuposto (Carannante, 2013):

- 1) A temperatura pode ser determinada independentemente das deformações do corpo;
- 2) As deformações são pequenas;
- 3) O material comporta-se elasticamente no decorrer do tempo;
- 4) As relações tensão-deformação estão relacionadas à isotérmica linear e a material homogêneo;

A primeira dessas hipóteses requer a omissão de termos mecânicos de acoplamento nas equações de condução de calor. O segundo implica que os deslocamentos são suficientemente pequenos de modo que nenhuma distinção é necessária entre as coordenadas de uma partícula antes e após a deformação e que os gradientes de deslocamento são suficientemente pequenos de modo que os seus produtos podem ser negligenciadas. Finalmente, o terceiro pressuposto

implica que nem as alterações de temperatura, nem as tensões são demasiado grandes; Muitos dos conceitos e equações necessárias para a formulação que se seguem são idênticos aos da teoria isotérmica de elasticidade (Carannante, 2013).

Afim de estudar os problemas de tensão térmica, este trabalho apresenta comparações analíticas-numéricas para problemas termomecânicos em elementos de vigas e placas. Esses estudos fazem parte de uma fase preliminar que busca aperfeiçoar os usuários na utilização de programas que utilizam o Método dos Elementos Finitos em suas análises. Parte-se do pressuposto que após conseguir validar exemplos simples outros mais complexos podem ser modelados com garantia de resultados coerentes.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Para os problemas clássicos de vigas e placas estudados, serão apresentadas as equações que governam o problema térmico seguido dos modelos mecânicos. Os problemas termomecânicos trabalham de forma acoplada, ou seja, primeiramente são resolvidos os problemas térmicos e a partir dessas soluções, encontram-se as tensões para os elementos. Serão mostradas apenas as equações principais e maiores detalhes podem ser encontrados em Hetnaski & Eslami (2009), Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1989), Szilard (2004), Boley & Weiner (1976), Coelho (2012).

A equação da condução de calor com geração de calor interna é apresentada conforme a Eq. (1).

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Em que:

- $k$  = condutividade térmica do material;
- $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T$  = gradiente térmico;
- $\dot{q}$  = geração de calor em função do tempo;
- $\rho$  = massa específica;
- $c$  = calor específico;
- $\frac{\partial T}{\partial t}$  = variação da temperatura com o tempo.

Dada a placa da Fig. 1, que apresenta temperaturas  $T_t$  e  $T_b$  nas suas extremidades de espessura  $h$ . Esta irá apresentar uma deflexão  $w$ , em torno do seu eixo  $Z$ .

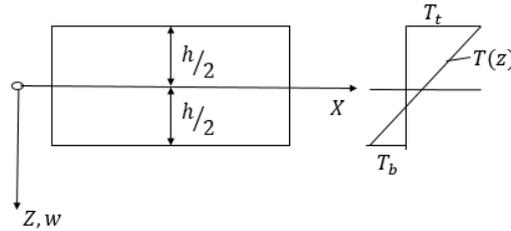


Figura 1 – Distribuição de temperatura através da espessura linear de chapa.

A equação geral da placa é dada pela Eq. 2:

$$D\nabla^4 w = P \quad (2)$$

Em que:

- $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$  = rigidez à flexão da placa;
- $E$  = módulo de elasticidade;
- $\nu$  = coeficiente de Poisson;
- $\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4}$  = deslocamento na direção Z;
- $P$  = carga térmica transversal equivalente

Sendo:

$$P = -\nabla^2 m \quad (3)$$

Em que  $m$  é o momento, dado pelas Eq. 4 ou 5, onde  $\alpha$  é o coeficiente de expansão térmica.

$$m = \frac{\alpha E}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} (\Delta T) z \, dz \quad (4)$$

$$m = D\alpha \frac{T_t - T_b}{h} (1 + \nu) \quad (5)$$

A partir da equação de placas, pode-se obter também a solução para as vigas, uma vez que pode-se considerar que a viga é um caso particular da placa em uma dimensão.

## 2.1 Condições iniciais e de contorno

As Condições de Contorno C.C. influenciam diretamente nos resultados obtidos. Nos problemas termomecânicos, que trabalham de forma acoplada, tem-se as C.C. para as análises térmicas e as C.C. para as análises mecânicas.

Para os problemas térmicos utilizados neste trabalho, as C.C. são impostas como:

- Temperatura prescrita:  $T(x, y, z, t) = T$

- Perfeito isolamento:  $k \frac{\partial T}{\partial n} = 0$

Para a placa retangular, foram aplicadas as seguintes C.C. no cálculo de tensões:

- Extremidade simplesmente apoiada:  $w = 0$  e  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{m}{D}$
- Extremidade fixa:  $w = 0$  e  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$

### 3 RESULTADOS

Os resultados apresentados na sequencia foram obtidos analiticamente e comparados com os resultados numéricos obtidos pelo método dos elementos finitos com a utilização do programa Ansys 15.0.

Inicialmente, serão mostrados estudos comparativos analíticos-numéricos para vigas, Caso 1, sendo o A para uma viga biengastada e o B para uma viga com geração de calor constante; seguido da análise de placas, Caso 2, para duas C.C. distintas.

#### 3.1 Caso 1-A - Viga biengastada

A primeira análise termomecânica será de uma viga biengastada, como mostrada na Fig. 2, a qual está submetida a uma temperatura de 20°C na face inferior, B, e 40°C na face superior, A. A altura,  $h$ , foi adotada de 0,1 m e o comprimento,  $L$ , 1,5 m. Como C.C. mecânica foram adotados engastes nas suas extremidades em  $x$ , lembrando que as temperaturas foram aplicadas em  $y$ , e as análises efetuadas ao longo do eixo  $y$ , na linha central do eixo  $x$ .

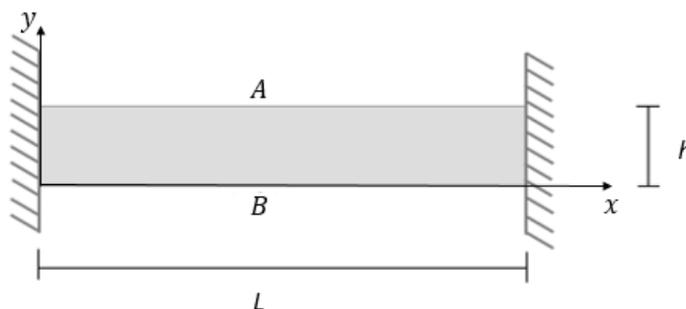


Figura 2 - Viga biengastada analisada.

#### Solução analítica

A temperatura ( $T$ ) de equilíbrio para a viga da Fig. 2 é dada pela Eq. (6):

$$T(y) = T_A + \frac{T_B - T_A}{h} y \quad (6)$$

Em que  $y$  é a altura da viga,  $T_A = 40^\circ\text{C}$  e  $T_B = 20^\circ\text{C}$ , são as temperaturas inferior e superior da viga, respectivamente.

Para a tensão térmica ( $\sigma$ ), sabe-se que esta pode ser representada pela Eq. (7):

$$\sigma = -\alpha E T(y) \quad (7)$$

Em que  $\alpha$  é o coeficiente de dilatação térmica e  $E$  o módulo de elasticidade.

### **Solução numérica**

Pelo efeito físico de condução, há um gradiente de temperaturas no interior da viga. Os resultados das isotermas de temperatura encontrados pelo *ANSYS APDL* podem ser observados na Fig. 3.a, em que é mostrado o gradiente de temperatura e as temperaturas nos nós para a posição de  $x = 0,75$  m, ponto médio, com relação ao eixo horizontal. Enquanto os valores de tensão obtidos, a partir das isotermas de temperatura, são mostrados na Fig. 3.b.

Para análise térmica foi utilizado o elemento PLANE 55 e para análise de tensões o elemento utilizado foi o PLANE 77, com uma malha de 0,025, e utilizando as propriedades apresentadas na Tabela 1.

**Tabela 1. Propriedades térmicas e mecânicas utilizadas.**

Propriedade	Nomenclatura	Valor
Massa específica	$\rho$	2388,00 Kg /m <sup>3</sup>
Calor específico	c	1105,00 J/Kg°C
Condutividade térmica		1,79 W/mK
Coeficiente de dilatação térmica	$\alpha$	16,67E – 6/°C
Módulo de elasticidade	E	210000 MPa
Coeficiente de transferência de calor	h	13,95W/mK
Coeficiente de Poisson	v	0,3

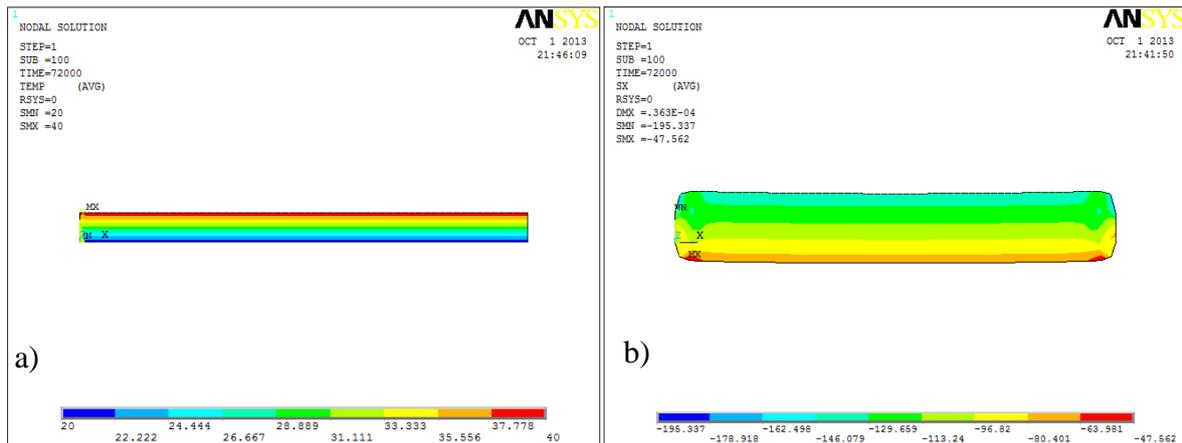


Figura 3 – a) Resultado para análise térmica; b) Análise termomecânica.

### Comparação de Resultados

A Fig. 4.a mostra a comparação entre os resultados analíticos e numéricos para a temperatura, sendo a altura ( $y$ ) representada pelo eixo das ordenadas e a temperatura ( $T$ ) pelo eixo das abscissas. Nota-se que os resultados para o pontos analisados numericamente são idênticos aos valores analíticos mostrando um bom tratamento dos dados. Assim como para a Fig. 4.b, sendo a altura ( $y$ ) representada pelas ordenadas e a tensão ( $\sigma$ ) indicada nas abscissas, observa-se que não houve diferença entre os valores encontrados analiticamente e pelo MEF. Dessa forma, pode-se afirmar que o ANSYS pode ser utilizado para esse tipo de análise de forma mais prática e rápida que os resultados analíticos.

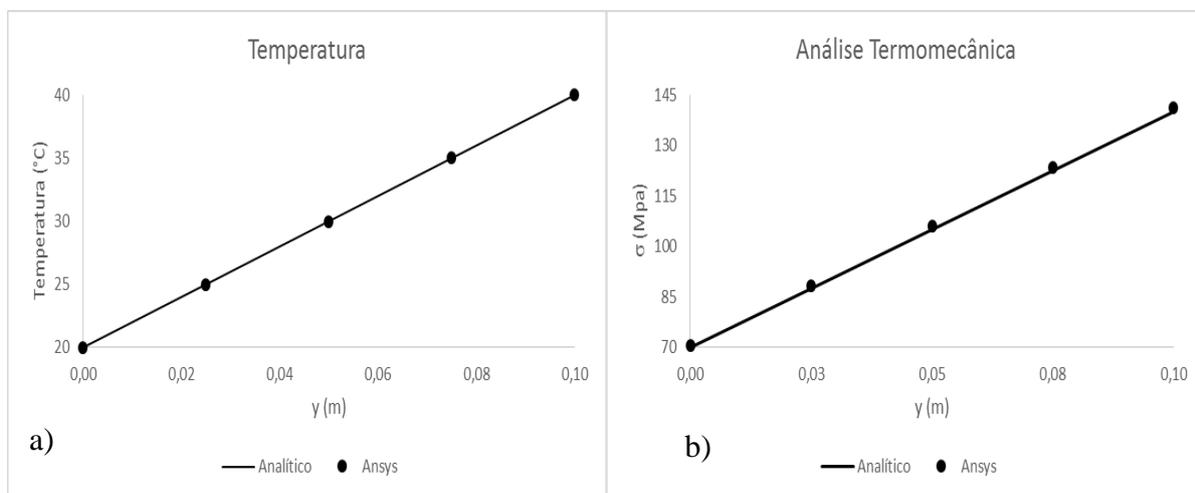


Figura 4 - Comparação entre resultados analíticos e o ANSYS APDL para: a) temperatura; b) tensão em viga biapoiada.

### 3.2 Caso 1-B - Viga com Geração de Calor Interno

Será apresentado neste tópico uma análise termomecânica para uma viga com geração de calor interno e com distintas condições de contorno, para a qual as soluções analíticas são dadas por Hetnarski e Eslami (2009).

#### Solução analítica - Temperatura

Primeiro serão verificados os resultados térmicos, em que a viga está com temperatura imposta  $T_1$  e  $T_2$ , geração de calor interno  $q$ , e o eixo cartesiano se encontra no meio da extremidade esquerda. A Fig. 5 representa o problema bidimensional e a Eq. (8), mostra a solução dada.

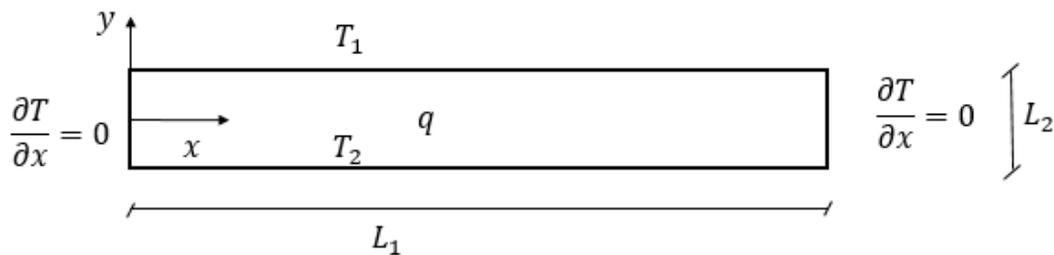


Figura 5 – Viga retangular para análise térmica.

$$T = \left(-\frac{q}{2k}\right)y^2 + \left(\frac{T_1 - T_2}{L_2}\right)y + \left(\frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{q}{8k}L_2^2\right) \quad (8)$$

Em que:

- $k$  = condutividade térmica;
- $q$  = geração interna de calor;
- $T_1$  e  $T_2$  = temperaturas impostas;
- $L_1$  e  $L_2$  = comprimentos horizontal e vertical, respectivamente.

#### Solução numérica - Temperatura

Sendo  $k = 1,79 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ ,  $T_1 = 100^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 0^\circ\text{C}$ ,  $L_2 = 0,5 \text{ m}$ ,  $L_1 = 1 \text{ m}$ ,  $q = 200 \text{ W/m}^3$ , obtêm-se as isotermas de temperatura com o programa de MEF, ANSYS APDL, com os mesmos elementos e malha do exemplo anterior, conforme a Fig. 6.

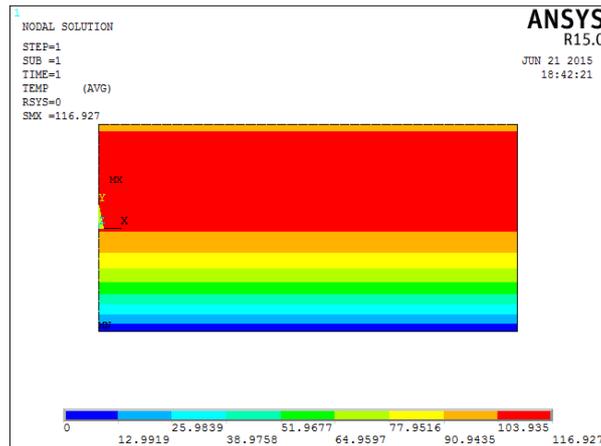


Figura 6 – Isotermas de temperatura para viga retangular pelo MEF (ANSYS).

### Comparação de Resultados - Temperatura

Comparando os resultados analíticos obtidos com os valores numéricos tem-se o gráfico da Fig. 7. Sendo a temperatura mostrada no eixo das ordenadas e a altura no eixo das abscissas, nota-se que não há distinção entre os valores numéricos e analíticos nos pontos analisados, os centrais.

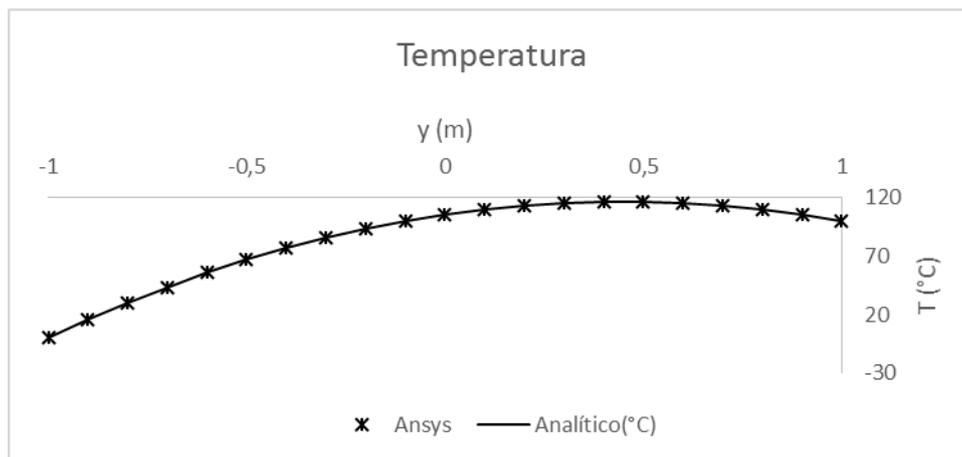


Figura 7 – Comparação dos resultados térmicos entre o método analítico e o MEF (ANSYS).

### Solução analítica - Tensão

Para o cálculo de tensões em  $x$  ( $\sigma_{xx}$ ), serão consideradas vigas engastadas em uma extremidade ( $x = 0$ ) e duas condições de contorno distintas na outra extremidade ( $x = L$ ) (Hetnarski e Eslami, 2009), Fig. 8:

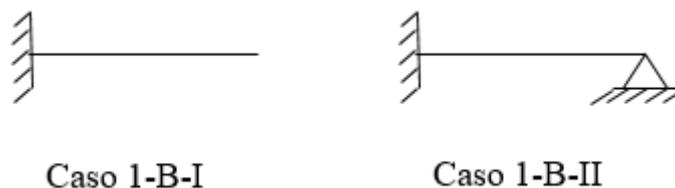


Figura 8 – Condições de contorno impostas.

I. Extremidade apoiada;

$$\sigma_{xx} = E\alpha \left[ \frac{q}{2k} y^2 + \frac{3(T_1 - T_2)}{2L_2 L_1} yx - \frac{3(T_1 - T_2)}{2L_2} y - \frac{q}{24k} L_2^2 \right] \quad (9)$$

II. Extremidade livre;

$$\sigma_{xx} = E\alpha \frac{q}{8k} L_2^2 \left[ \left( \frac{2y}{L_2} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] \quad (10)$$

Sendo:

- Modulo de elasticidade:  $E = 210000MPa$
- Coeficiente de dilatação térmica:  $\alpha = 7 \times 10^{-6}/^{\circ}C$

### Solução numérica - Tensão

Assim, a solução pelo programa de MEF é dada conforme as Fig. 9.a e 9.b, respectivamente para os casos 1 e 2.

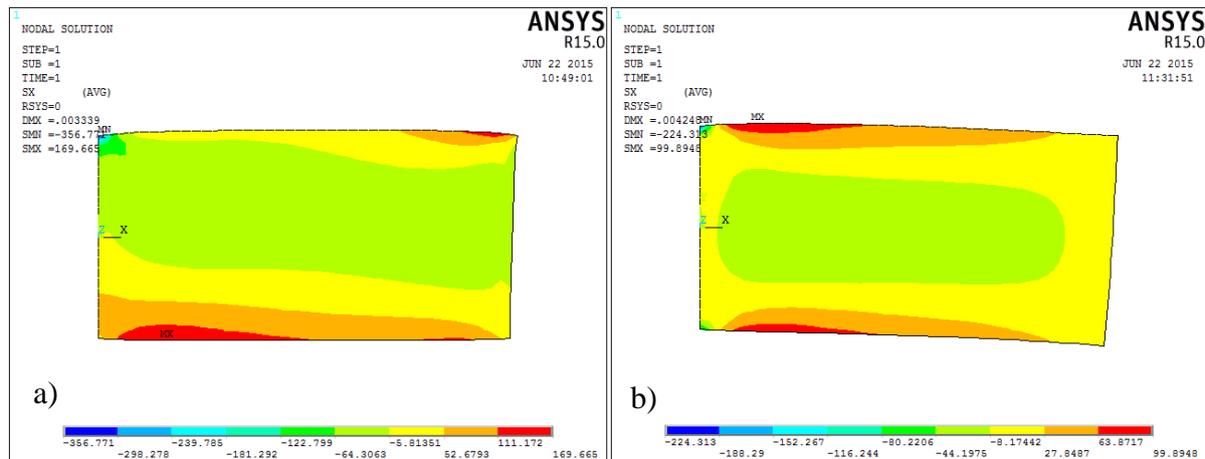


Figura 9 – Análise pelo MEF (ANSYS) dos resultados termomecânicos para a) viga engastada-apoiada; b) para a viga engastada e livre na outra extremidade.

### Comparação de Resultados - Tensão

As Fig. 10.a e 10.b, mostram as comparações entre os resultados analíticos e numéricos para os casos 1 e 2, respectivamente, para os pontos centrais do eixo  $x$ . Em ambos os gráficos, as abscissas representam a altura da viga e as ordenadas, as tensões obtidas, em MPa.

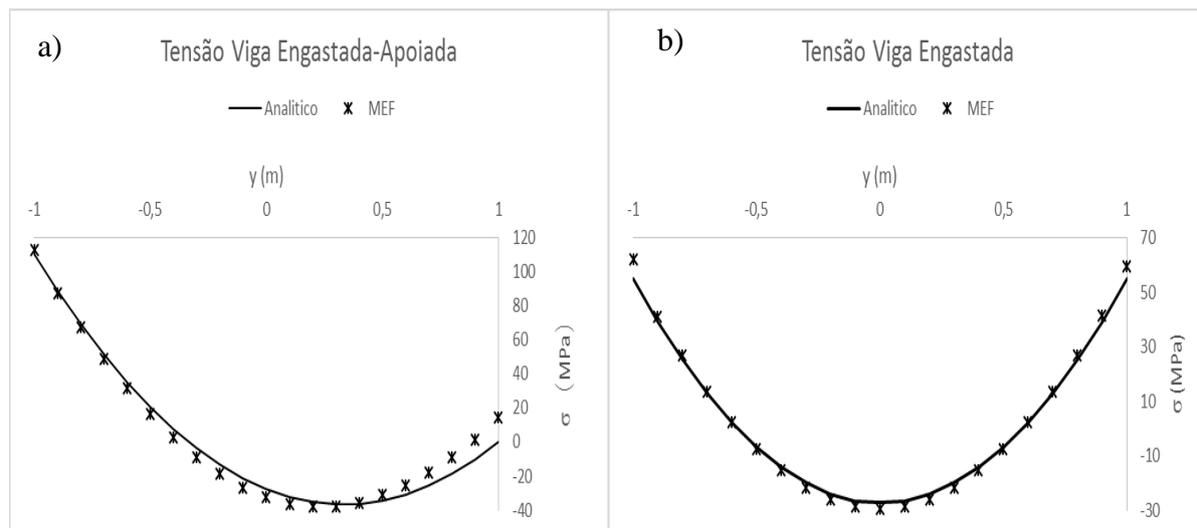


Figura 10 – Comparação dos resultados mecânicos para: a) viga engastada-apoiada; b) viga engastada e livre.

Diante dos resultados obtidos e mostrados, evidencia-se que há um domínio do software escolhido, pois foram apresentados diversos modelos, os quais foram resolvidos por dois métodos distintos e os gráficos comparativos mostram que os dados se sobrepõem ou ficam bem próximos. No entanto, muitos problemas, mais complexos, são de difícil solução analítica, porém, com o domínio sobre a ferramenta, é possível fazer aplicações nos mais diversos problemas termomecânicos, pois, considera-se que havendo bons resultados nas situações mais simples, haverá também para as mais complicadas.

### 3.3 Caso 2 – Estudo dos efeitos em Placas

Neste caso, foi considerada uma placa retangular com C.C. fixas sujeita a uma variação de calor não uniforme  $\Delta T$  conforme a Fig. 11, proposta por Szilard (2004).

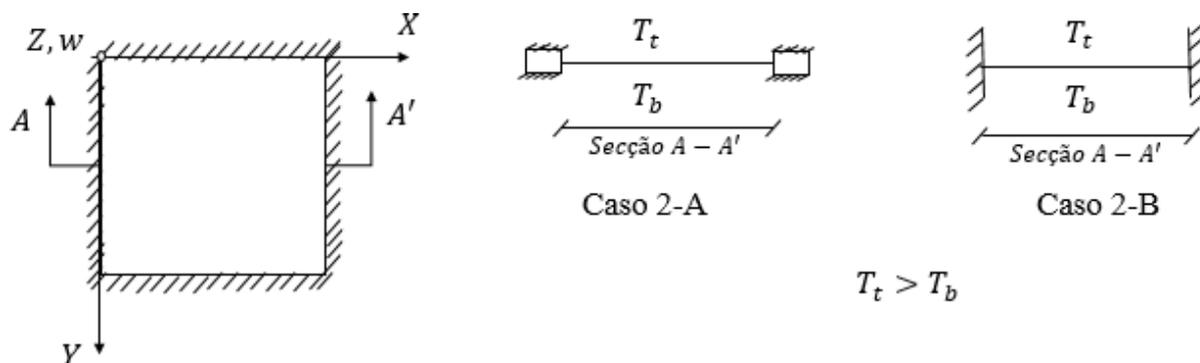


Figura 11 – Placa fixa.

### CASO 2-A

Primeiro será considerado que as bordas da placa são livres para deslizar, mas restringida contra rotação. Em tal caso, temos uma condição similar à de flexão pura da placa por momentos distribuídos uniformemente. Neste caso, o momento na placa é dado pela Eq. (11):

$$M = -\frac{D\alpha(\Delta T)}{h}(1 + \nu) \quad (11)$$

Em que:

- $M$  = Momento devido ao gradiente de temperatura ( $\Delta T$ );
- $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$  = Rigidez à flexão da placa;
- $E$  = Módulo de elasticidade;
- $\alpha$  = Coeficiente de expansão térmica;
- $h$  = Espessura da placa;
- $\nu$  = Coeficiente de Poisson.

A máxima tensão correspondente ( $\sigma_{max,b}$ ) é dada pela Eq. (12):

$$\sigma_{max,b} = \pm \frac{6M}{h^2} \quad (12)$$

Dada a distribuição de temperaturas obtidas no *ANSYS WORKBENCH* para um corpo de dimensões  $(x, y, z) = (0.5, 0.5, 0.1)$  e com C.C.  $T = 0^\circ\text{C}$  em  $z = 0.0$  m e  $T = 100^\circ\text{C}$  em  $z = 0.1$  m.

As isotermas de temperatura para o problema são mostradas na Fig. 12. Observa-se que as máximas e mínimas temperaturas são dadas nos contornos, havendo uma distribuição uniforme.

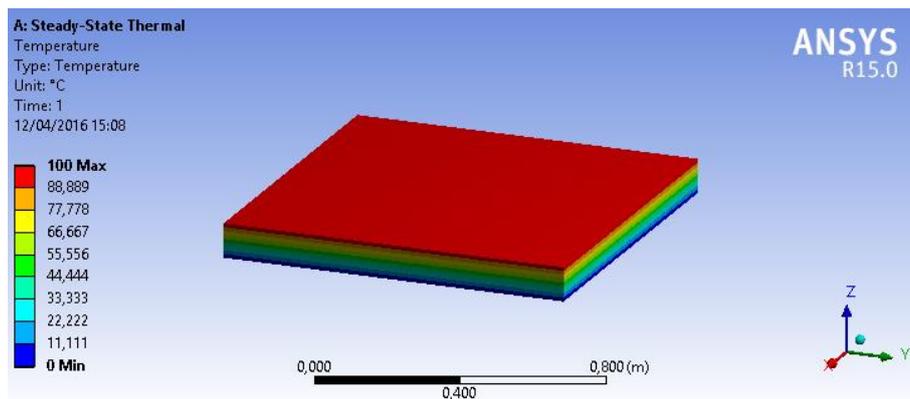


Figura 12 – Isotermas de temperatura para placa fixa.

### Comparação dos Resultados Mecânicos

A Fig. 13, apresenta o gráfico das tensões em Pa, eixo das ordenadas, pela espessura em m, eixo das abscissas. A linha ‘tensão calculada’ representa as máximas tensões encontradas analiticamente, a linha ‘Tensão X’ representa as tensões encontradas pelo programa ao longo da espessura e ‘Tensão Z’ as tensões na direção da espessura, estando livre para rotacionar, as tensões nesse eixo são nulas. Entretanto, as máximas tensões pelos métodos utilizados estão bem próximas.

Havendo apenas a restrição de deslocamento em z, as máximas e mínimas tensões encontradas nos pontos centrais do corpo são  $\pm 94,303$  MPa. Utilizando as Eq. (11) e (12), as tensões máximas são  $\pm 85,7$  MPa, diferindo em 9,0%.

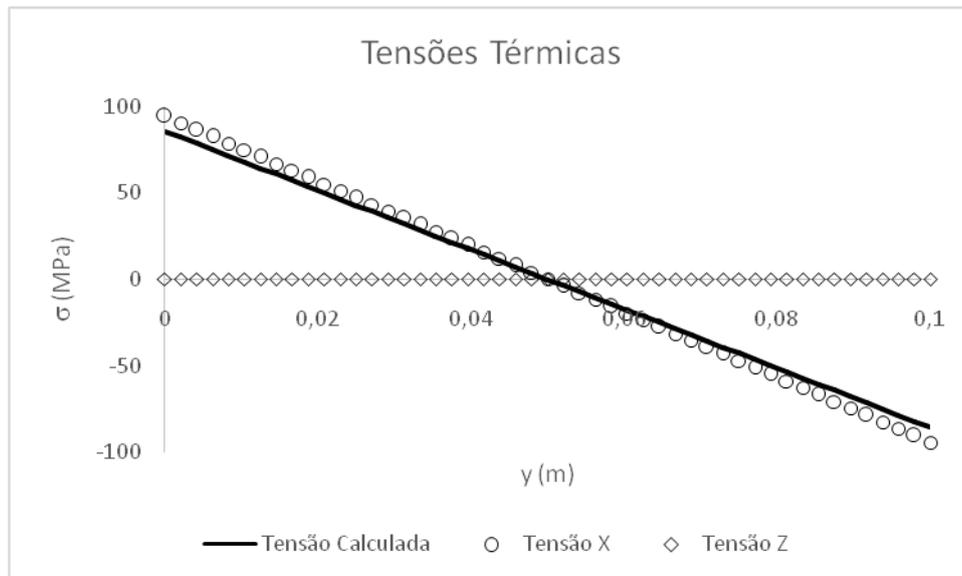


Figura 13 – Comparação entre resultados analíticos e numéricos para placa fixa.

### CASO 2-B

Para o caso anterior, agora considerando que as bordas também são impedidas de movimentos no plano, as tensões produzidas nos planos X e Y,  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ , são dadas pelas Eq. (13) e (14) (Szilard, 2004).

$$\sigma_x = \frac{1}{h} \left( n_{r,x} - \frac{n_T}{1-\nu} \right) - \frac{\alpha E (\Delta T)}{1-\nu} \quad (13)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{h} \left( n_{r,y} - \frac{n_T}{1-\nu} \right) - \frac{\alpha E (\Delta T)}{1-\nu} \quad (14)$$

Em que:

- $n_{r,x} = -\frac{\partial n_{T,x}}{\partial x}$ ;  $n_{r,y} = -\frac{\partial n_{T,y}}{\partial y}$  = Restrição de expansão da placa nas direções x e y;
- $n_{T,x} = n_{T,y} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\alpha E (\Delta T)}{1-\nu} dz$  = Tensão térmica;

- $n_T = -\alpha E \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \Delta T dz = \text{Resultante da tensão térmica.}$

Fazendo a simulação numérica para este caso, restringindo os movimentos nas três direções nas bordas da placa apresentada na Fig. 12, as tensões obtidas em X podem ser visualizadas na Fig. (14).

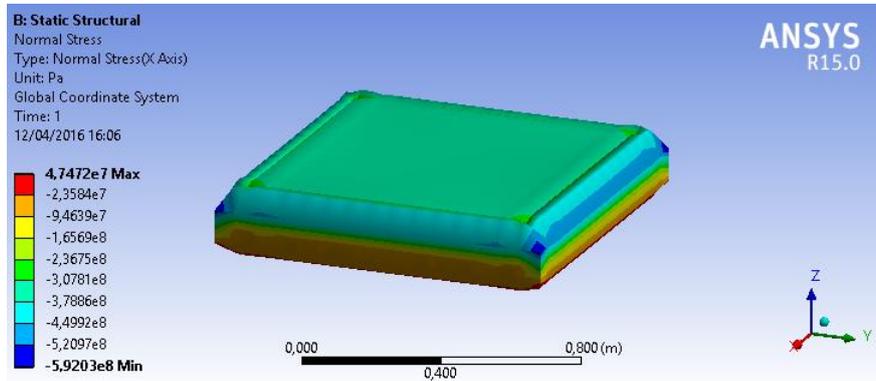


Figura 14 – Tensões para a placa com bordas restringidas ao movimento nas três dimensões.

### Comparação dos Resultados

Comparando os resultados obtidos nos pontos centrais do plano com as Eq. (13) e (14), esboçou-se o gráfico da Fig. 15, tendo as tensões em Pa no eixo das ordenadas e a espessura em m nas abscissas. Observa-se que em z a placa está livre, logo as tensões são nulas. Para x e y, há simetria nas restrições, então, os resultados são coincidentes, assim como também coincidem com os valores obtidos analiticamente.

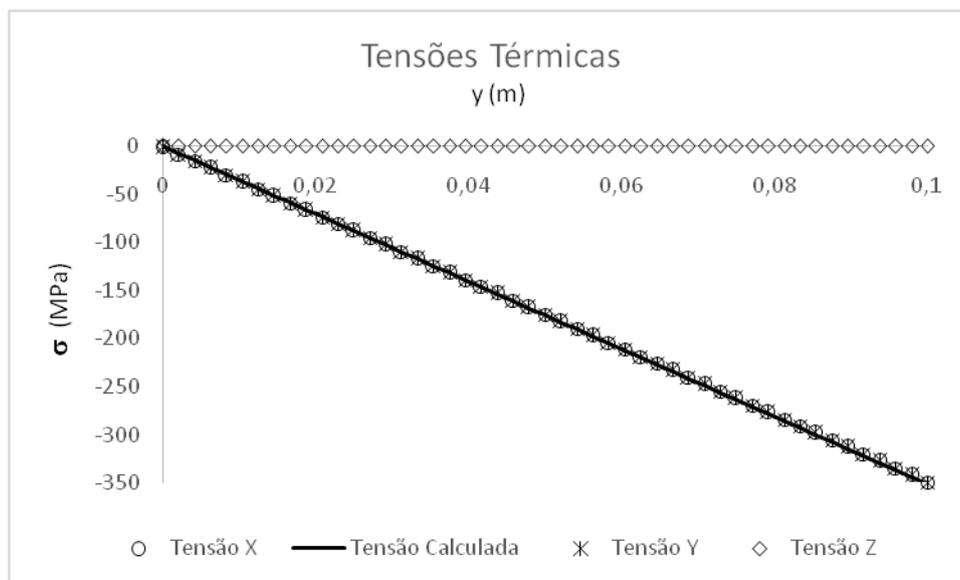


Figura 15 – Comparação entre tensões analíticas e numéricas para placa restringida ao deslocamento em três direções nas bordas.

## 4 CONCLUSÕES

O exame das expressões e das modelagens computacionais apresentadas asseguram a confiabilidade dos resultados obtidos pelo método analítico e numérico empregados, através da comparabilidade dos efeitos termomecânicos nos cinco estudos de casos expostos, variando as condições de contorno em elementos simples de vigas e mais complexos, como as lajes, ilustrando a viabilidade da metodologia. Permite-se concluir dos resultados avaliados que a tendência de altas tensões é maximizada quando a diferença entre temperaturas nas análises é grande, e ainda pode ser potencializado pelo o grau de restrições sujeita as movimentações dos corpos. Tais combinações de variação volumétrica e restrições geram tensões que, quando maiores que as admissíveis, podem ocasionar fissuras, que estão diretamente relacionada à vida útil do material. De maneira geral, para os estudos de casos analisados, as maiores tensões de origem térmica originam-se nas proximidades dos apoios com maior grau de restrições. Os principais fatores que influenciaram nas análises de tensões térmicas estão relacionado a temperatura do contorno, geometria da estrutura, propriedade térmica e elástica do material, restrições e aquelas formadas por alterações volumétricas de origem térmica interna.

## AGRADECIMENTOS

Ao CNPq por financiar parte dessa pesquisa, ao PECC-UnB, à UNIVASF, à UTFPR e a FURNAS pela oportunidade de adquirir novos conhecimentos.

## REFERÊNCIAS

- Amin, M. N., Kim, J., Lee, Y., Kim, J.; *Simulation of the thermal stress in mass concrete using a thermal stress measuring device*. Cement and Concrete Research. V.39. Elsevier: 2009.
- Boley, B. A; Weiner, J. H. *Theory of thermal stress*. New york: John Wiley & Sons, 1976.
- Carannante, F.; *Some new thermo-elastic solutions for cylindrical and spherical composites*. Ph. D. Thesis. Università degli Studi di Napoli “Federico II”: 2013.
- Coelho, N. A.; *Um estudo numérico do efeito térmico em concreto massa*. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília – UnB. Brasília: 2012.
- Coelho, N. A.; Nepomuceno, A. A.; Pedroso, L. J.; *O concreto massa e seus efeitos térmicos*. Novas Edições Acadêmicas: 2014.
- Coelho, N. A.; Pedroso, L. J.; Rêgo, J. H. S.; Nepomuceno, A. A.; *Use of ANSYS for Thermal Analysis in Mass Concrete*. Journal of Civil Engineering and Architecture. V. 8. Number 7. David Publishing Company: 2014.
- HETNARSKI, R. B.; ESLAMI, M. R.; *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications*. New York: Springer, 2009.

HIBBELER, R. C. *Resistência dos materiais*. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Timoshenko, S.; Woinowsky-Krieger, S. *Theory of plates and shells*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1989.

Szilard, R, 2004. *Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods*. John Wiley & Sons. New Jersey: 2004.