



## UMA ANÁLISE COMPARATIVA ANALÍTICO-NUMÉRICA DOS EFEITOS TÉRMICOS EM CONCRETO MASSA PARA GEOMETRIAS SIMPLES

**Nailde de Amorim Coelho**

naildea@yahoo.com.br

Universidade de Brasília (UnB)

**Flávio Mamede Pereira Gomes**

fmpgomes@furnas.com.br

Universidade de Brasília (UnB) e Furnas

**Lineu José Pedroso**

lineu@unb.br

**João Henrique da Silva Rêgo**

jhenriquerego@ig.com.br

Universidade de Brasília – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental- Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil - Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura. Caixa Postal 04492, Campus Darcy Ribeiro, CEP 70919-9700, Brasília-DF.

**Resumo.** *A tecnologia avança de forma acelerada, e a engenharia deve acompanhar este desenvolvimento. Os problemas de condução e geração de calor são de suma importância quando se trata de grandes estruturas de concreto, designado assim concreto massa. Esse tipo de construção é utilizado em barragens, grandes fundações, pontes ou qualquer obra que utilize grande volume de concreto. Sabe-se que a análise experimental para este tipo de estrutura seria desejável, mas requer elevado custo financeiro, uma vez que se trata de alto consumo de cimento, agregados, entre outros componentes. A fim de evitar despesas, é possível utilizar um programa que simule as estruturas a serem construídas e até mesmo a forma de construção utilizada, com todos os passos e etapas a serem desenvolvidos. O Ansys é um exemplo de software baseado no método dos elementos finitos e que permite a construção de modelos representativos, que podem fornecer resultados confiáveis sem a necessidade de análise experimental. No entanto, sem a análise experimental torna-se indispensável alguma outra via independente que certifique ao analista que a ferramenta numérica esteja sendo utilizada corretamente. Nesse sentido, as soluções analíticas trazem alternativas simples que permitem a qualificação do programa utilizado. Assim, este trabalho mostra uma comparação entre os resultados do Ansys com soluções analíticas, obtidas especialmente para os casos*

*expostos neste artigo apresentam uma boa concordância entre si para os casos 2D e 3D estudados.*

**Palavras-chave:** *Concreto Massa, Análise Analítica, Ansys.*

## 1 INTRODUÇÃO

A engenharia é uma área ampla, na qual é possível verificar uma diversidade de problemas, sejam estes, simples ou complexos. Com a evolução da tecnologia, soluções são obtidas de forma mais fácil e rápida com a utilização de alguns programas computacionais. No entanto, é necessário o domínio das ferramentas operacionais antes da utilização, buscando assim, resultados verídicos, condizentes com a realidade. Com o uso destes recursos pode-se também eliminar ou minimizar o uso de experimentos em algumas situações, que, na maioria das vezes, são onerosos e requerem um elevado tempo de análise.

Em construções de grande porte, um grande problema é devido a variações térmicas que levam, muitas vezes, a gradientes de temperatura elevados podendo causar danos às estruturas, como é o caso das fissurações. Esse gradiente térmico pode ser provocado apenas por efeitos externos, temperatura ambiente, condução, convecção, radiação, ou também por fatores internos, quando há geração interna de calor, como é o caso do calor de hidratação originado no processo de hidratação do cimento. Independente dos meios e fatores que ocorrem, o fenômeno da variação do calor é conduzido pela Equação de Fourier, que também pode ser reduzida à Equação de Laplace ou à Equação de Poisson, dependendo dos fatores que estão ou não influenciando o meio.

De forma geral, com o uso de equações matemáticas é possível resolver grande parte dos problemas de engenharia, porém, algumas condições complicadas impedem este tipo de solução manualmente, por ter uma solução analítica de difícil solução. Diante da necessidade de resoluções mais rápidas e práticas de equações matemáticas, surgiram programas computacionais que visam facilitar a o tratamento analítico e numérico para estes problemas existentes não só no campo da engenharia, mas de todas as ciências, como é o caso do *Maple*.

O *Maple* é um programa de Computação Algébrica de uso geral que possui inúmeros recursos numéricos e gráficos, além de também funcionar como uma linguagem de programação. Ele vem sendo desenvolvido desde 1981 pela Waterloo Maple Inc. para vários sistemas operacionais. É possível encontrar soluções exatas para problemas práticos que envolvam resolução de equações, derivadas, integrais, cálculo matricial, etc., tudo isso integrado a recursos que permitem visualização de dados ou objetos planos ou tridimensionais (Andrade, 2003).

Existem também os programas que utilizam o Método dos Elementos Finitos (MEF) na busca de soluções, com os quais é possível visualizar os efeitos das ações que atuam em uma estrutura. Com a interface gráfica, modelos das formas reais são feitos e analisados em um tempo curto, facilitando as análises, construção, e soluções de possíveis problemas. O *Ansys*, é um exemplo de programa que utiliza o MEF.

Os efeitos térmicos em estruturas de concreto massa são estudados por alguns autores utilizando dados experimentais e não equações analíticas, assim como pode ser visto estruturas mais complexas. Resultados desse tipo podem ser vistos em Krüger (2001), Silva (2003), Azenha (2004), Santos (2004), Kavamura (2005), Gomes (2011), Coelho *et al.* (2012), Coelho (2012), Coelho *et al.* (2013), entre outros.

Visando encontrar sempre resultados confiáveis, foi realizada uma análise analítica-numérica de alguns problemas simples que envolvem a equação do calor, fazendo uma comparação entre os resultados analíticos e numéricos para estes problemas. Para isto, foram utilizadas soluções analíticas feitas manualmente e com a ajuda do *Maple* e do *Excel* em comparação com os resultados obtidos no *Ansys*. Com o *Ansys*, as soluções são mostradas utilizando-se o *APDL* e o *Workbench*, que mostram resultados em 2D e 3D, respectivamente. Nota-se que os resultados do software comercial e os resultados analíticos são compatíveis, o que mostra um domínio por parte dos operadores das ferramentas utilizadas.

## 2 EQUAÇÃO DO CALOR

Conforme mostrado por Coelho, et al, (2013), deduzido com base em Azenha (2009) e Rao (1999).

A equação de taxa de condução em sólidos é conhecida como a Lei de Fourier, e é expresso por uma dimensão como a Eq. 1.

$$q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1)$$

Onde:

$q_x$  é o fluxo de calor (W) através de uma área  $A$  (m<sup>2</sup>);

$k$  é a condutividade térmica ( $\frac{W}{mK}$ );

$T$  é a temperatura (K);

$x$  é a coordenada espacial (m).

A equação de equilíbrio de energias em coordenadas cartesianas pode ser mostrado com relação a um volume infinitesimal elementar de matéria como representado na Fig. 1.

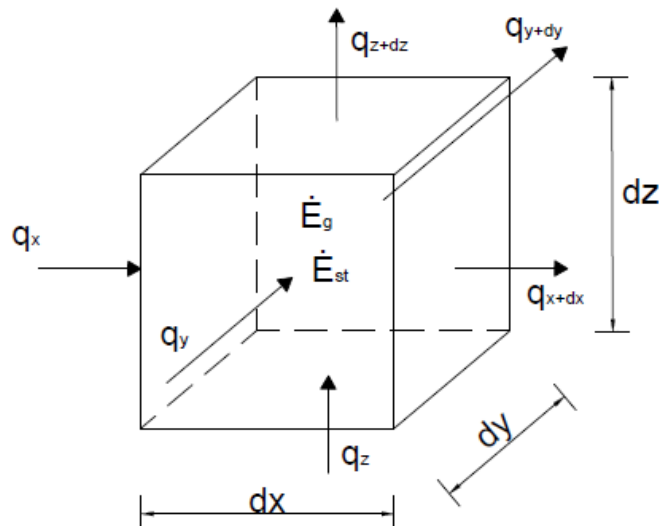


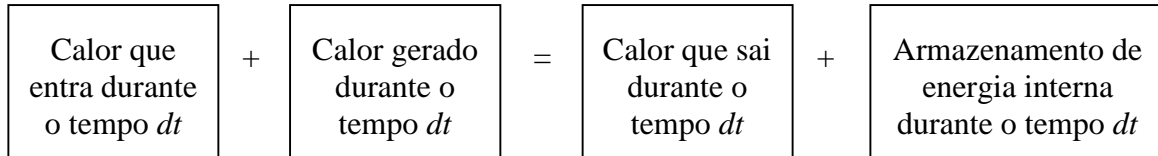
Figura 1 – Volume infinitesimal elementar de matéria.

Na presença de gradientes de temperatura haverá condução de calor através das faces da partícula infinitesimal, em direções perpendiculares às correspondentes superfícies. Nas três

das faces da partícula os fluxos de calor podem ser identificados por  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$ . Nas faces opostas, os fluxos de calor podem ser representados em expansão de série de Taylor (ignorando termos de ordem superior):

$$q_{x+\partial x} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \partial x q_{y+\partial y} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \partial y q_{z+\partial z} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} \partial z \quad (2)$$

A equação do balanço energético com base na Fig. 1 é:



Ou ainda:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g = \dot{E}_{out} + \dot{E}_{st} \quad (3)$$

Denotando por  $\dot{q}$  ( $\frac{W}{m^3}$ ), a taxa de geração de calor interno (devido à hidratação do cimento) por unidade de volume, a taxa de geração de energia no interior do volume é expresso por:

$$\dot{E}_g = \dot{q} \partial_x \partial_y \partial_z \quad (4)$$

A taxa de acumulação de energia no interior do volume,  $\dot{E}_{st}(W)$ , pode ser expressa como uma função da derivada da temperatura em relação ao tempo  $\frac{\partial T}{\partial t}$ , do calor específico do material  $c$  ( $\frac{J}{kg K}$ ) e da massa específica  $\rho$  ( $\frac{kg}{m^3}$ ):

$$\dot{E}_g = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \partial_x \partial_y \partial_z \quad (5)$$

Introduzindo os fluxos de energia ilustrados na Fig. 1, e fazendo o tratamento matemático das equações, chega-se a:

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

Ou:

$$k \nabla^2 T + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (7)$$

AEq.7 é a equação diferencial que rege a condução de calor de um corpo sólido. Esta também pode ser escrita como:

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8)$$

Em que  $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ , que é chamado termo de difusividade. A Eq. 8 representa a transferência de calor num corpo isotrópico, ou seja, com propriedades materiais uniformes. Se não houver geração de calor interna a Eq. 8 se reduz à Eq. 9, chamada Equação de Fourier.

$$\nabla T^2 = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9)$$

Se o corpo está em estado estacionário com geração de calor interna, a Eq. 8 torna-se a Eq. 10, ou Equação de Poisson.

$$\nabla T^2 + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (10)$$

Se o corpo está em estado estacionário sem geração de calor interna, a Eq. 8 torna-se a Eq. 11, ou Equação de Laplace.

$$\nabla T^2 = 0 \quad (11)$$

### 3 PROGRAMAS COMPUTACIONAIS

Atualmente problemas complexos de engenharia são analisados utilizando-se simulação computacional que envolve uma forte combinação de computação gráfica e métodos numéricos. Pelo fato dos computadores serem mais acessíveis atualmente, a simulação computacional está fortemente presente em todos os ramos da engenharia (Silva e Buioche, 2011). Problemas de transferência de calor é um exemplo aonde métodos numéricos vêm sendo aplicados há muito tempo. No entanto, soluções analíticas são obtidas apenas para problemas simples, como, por exemplo, o fluxo de calor num domínio unidimensional.

Como relatado anteriormente, para realização deste trabalho foram utilizados os programas *Excel 13.0*, *Maple 13.0* e o *Ansys 14.0*.

O *Maple* é um programa projetado para uso interativo. Os comandos e as instruções usadas individualmente a partir da linha de comando podem programados através de laços para facilitar os cálculos repetitivos, podendo também fornecer novos comandos. É uma ferramenta para solução de equações matemáticas desde as mais simples as mais complexas. É perceptível que o tempo e as análises são mais rápidas e é possível visualizar os gráficos que mostram o comportamento das equações estudadas.

O *Ansys* é um programas que utiliza o MEF, o domínio é subdividido em pequenas regiões discretas, conhecidas como elementos finitos. Estes elementos são definidos pela geometria, por nós e funções de interpolação. As equações são escritas para cada elemento, estes elementos são montados e geram uma matriz global. Carregamentos e restrições são aplicados e a solução é então determinada (*Ansys*, 2004).

O objetivo de uma análise de elementos finitos é simular matematicamente o comportamento de um problema real. Isto é possível a partir da criação de um modelo que represente a situação a ser estudada. Este modelo dispõe de todos os nós, elementos, propriedades dos materiais, constantes reais, condições de limite e outras características que são utilizados para representar o sistema físico.

O *Ansys* apresenta duas versões, ou melhor, duas formas de modelagem, o *APDL*, em que o usuário gera o código computacional, escolhendo elementos, malha, entre outros, e a versão *Workbench*, no qual é possível também fazer o processo de escolha de malhas, elementos, mas não é necessário, pois a partir da análise escolhida, automaticamente, já é feita a escolha de elementos, por exemplo, assim a análise pode ser obtida ainda mais rapidamente.

Para a análise dos efeitos térmicos nas estruturas analisadas com o *Ansys APDL* o elemento utilizado foi o *PLANE55*, que tem capacidade de condução térmica em duas dimensões, 2D. O elemento tem quatro nós e um único grau de liberdade em cada nó, a temperatura. O elemento é mostrado na Fig.2 (biblioteca do *Ansys*).

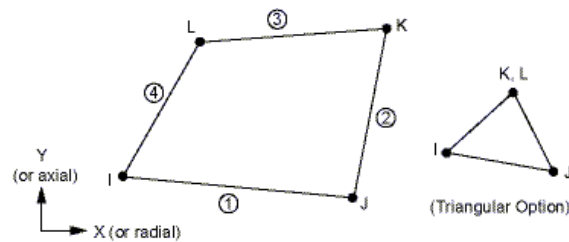


Figura 2- Geometria do elemento PLANE55 (biblioteca do *Ansys*).

Um outro elemento que poderia ser usado seria o elemento *PLANE 77*, também para análises térmicas em duas dimensões. Apresenta um grau de liberdade, a temperatura e oito nós, adequado para desenhar fronteiras curvas.

## 4 RESULTADOS

As análises equacionais desenvolvidas nessa seção foram baseadas em Hetnarski & Eslami (2009), Coelho e Pedroso (2013), Kreysing (2006), Haberman (1987) e Incropera (2008).

Sendo a equação do calor é definida como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} k_x + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} k_y + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} k_z = -\dot{q} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (12)$$

Em que:

T = temperatura absoluta;

$k_x, k_y, k_z$  = condutividade térmica nas direções de x, y, z;

$\rho$  = massa específica;

c = calor específico.

### 4.1 Problema estático unidirecional

Para um fluxo unidirecional, adota-se  $k_x = k$ , e tem-se a equação:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{\dot{q}}{k} \quad (13)$$

Integrando duas vezes:

$$T = - \int \left( \frac{\dot{q}}{k} dx \right) dx + C_1 x + C_2 \quad (14)$$

Em que  $C_1$  e  $C_2$  são as constantes de integração.

Dada a placa mostrada na Fig. 3, de comprimento  $L$ , sem geração de calor, separando dois líquidos a temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ , com condições de contorno  $T(0) = T_1$  e  $T(L) = T_2$ . Tem-se:

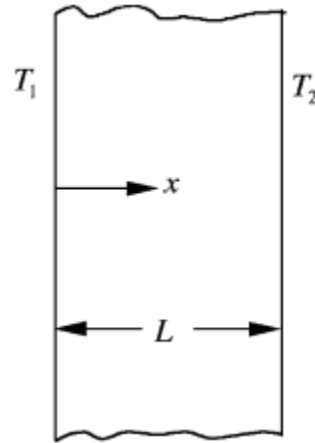


Figura 3 – Plano da placa.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (15)$$

Integrando duas vezes:

$$T = C_1 x + C_2 \quad (16)$$

Aplicando-se as condições de contorno:

$$C_2 = T_1 \quad C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} \quad (17)$$

Assim:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \quad (18)$$

Considerando-se a placa com  $L = 1$  m (um metro) de comprimento, é realizada a análise térmica estática unidimensional, ou seja, independentemente do tempo e apenas na direção de  $x$ . Dessa forma, os resultados do programa computacional, o *Ansys*, são mostrados na Fig. 4, com o *APDL*, e na Fig. 5, com o *Workbench*, e comparados com os resultados analíticos pela Fig. 6.

É perceptível que os resultados do *AnsysAPDL* e do *AnsysWorkbench* são iguais e os valores numéricos são idênticos aos resultados obtidos analiticamente. Isso demonstra uma perfeita utilização dos programas utilizados, garantindo a eficiência dos resultados.

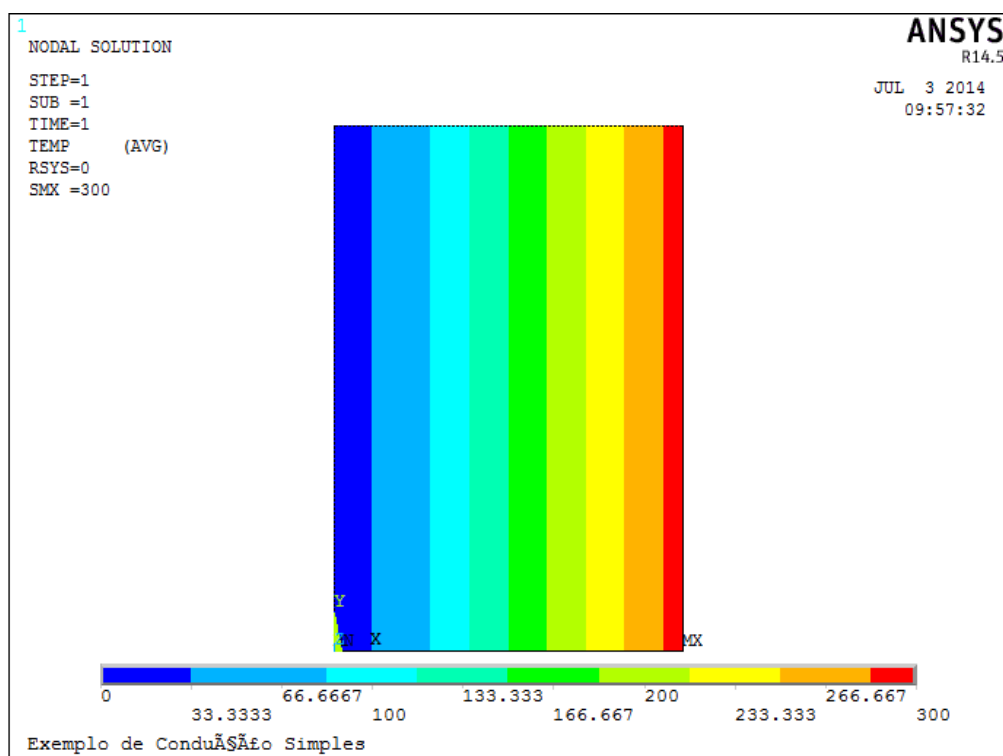


Figura 4 – Resultados do AnsysAPDL para barra unidimensional.

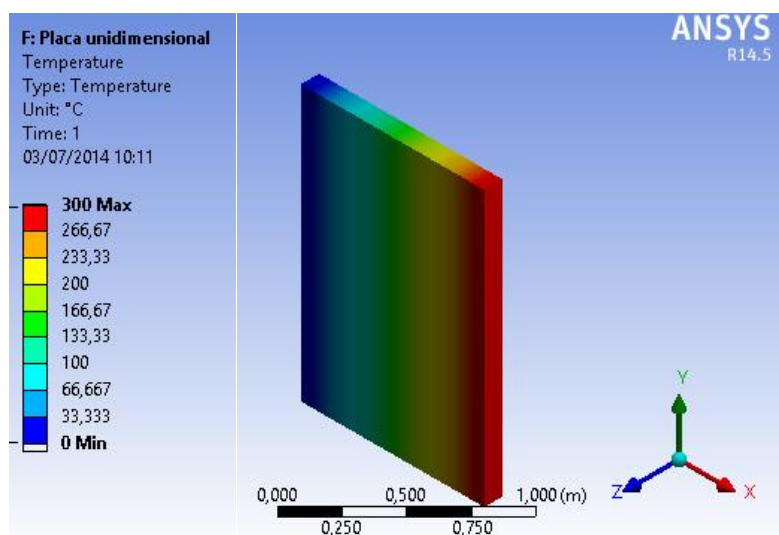


Figura 5 – Resultados do AnsysWorkbench para barra unidimensional.



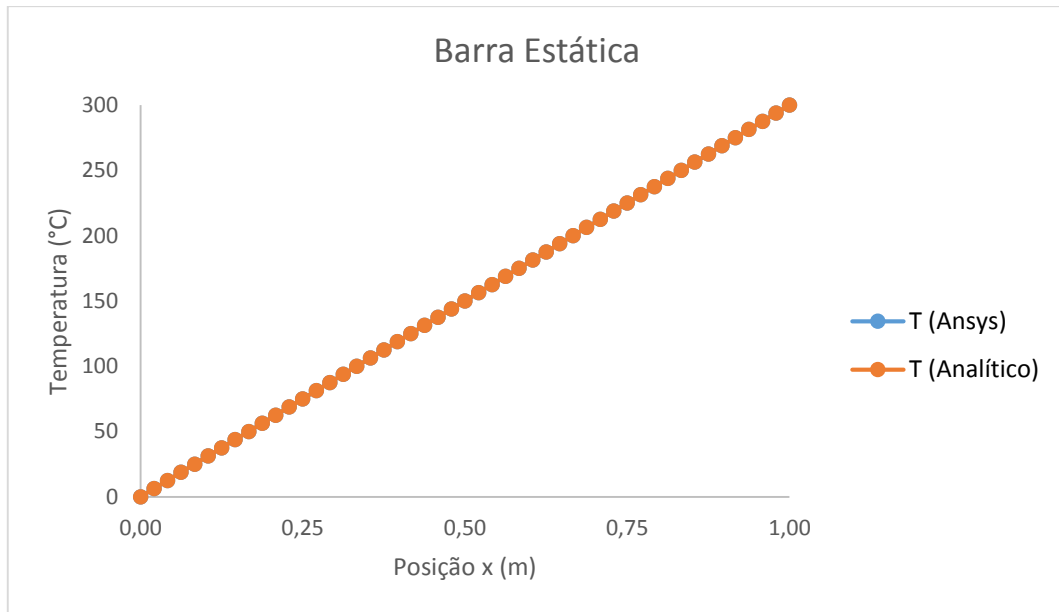


Figura 6 – Comparação entre resultados analíticos e numéricos para uma barra estática.

## 4.2 Problema unidirecional transiente

Para a mesma placa estudada no item 4.1, foi realizada a análise de forma transiente, ou seja, com a temperatura variando no tempo. A análise foi feita no meio da barra, a 0.5 m, para um intervalo de tempo de dois dias. Os resultados são mostrados para diferentes intervalos de tempo no mesmo ponto, como mostram as Fig. 7 e 8.

Neste caso, há o deslocamento da temperatura de equilíbrio do corpo. Assim após o tratamento matemático, a temperatura do corpo é dada pela seguinte equação:

$$T(x, y) = T_E(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-h^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (19)$$

Para esta análise foram utilizadas também as seguintes propriedades:

- Condutividade térmica  $\rightarrow k = 1,79 \text{ W/m}\cdot\text{°C}$ ;
- Calor específico  $\rightarrow c = 1000 \text{ J/g}\cdot\text{°C}$ ;
- Massa específica  $\rightarrow \rho = 2300 \text{ kg/m}^3$ ;

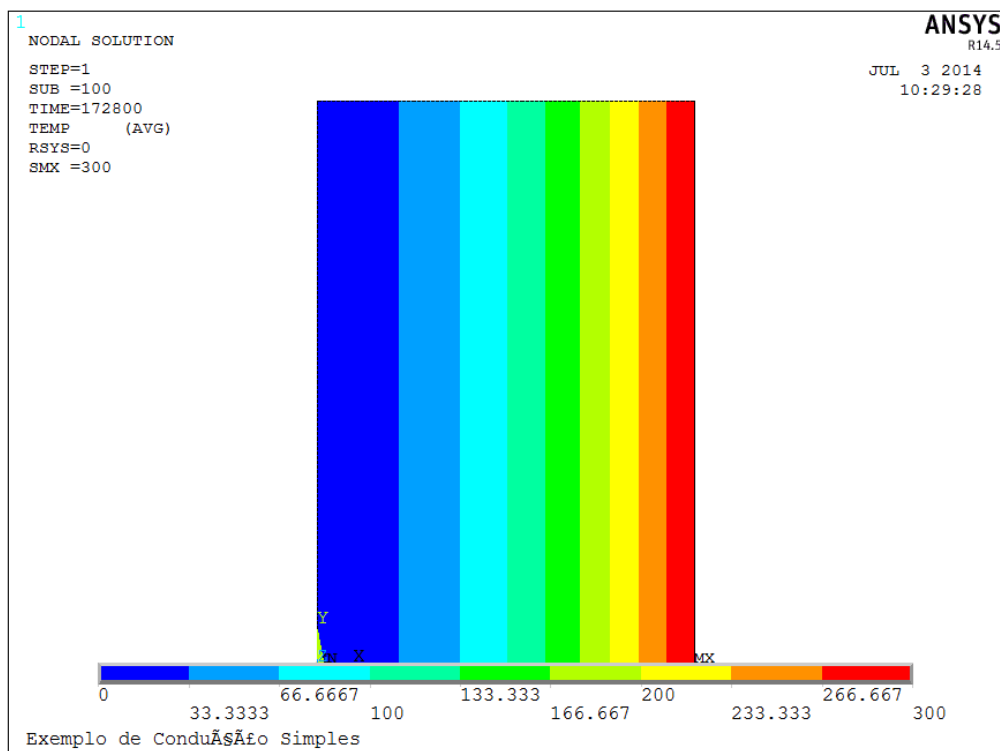


Figura 7 – Análise transiente para a placa no AnsysAPDL.

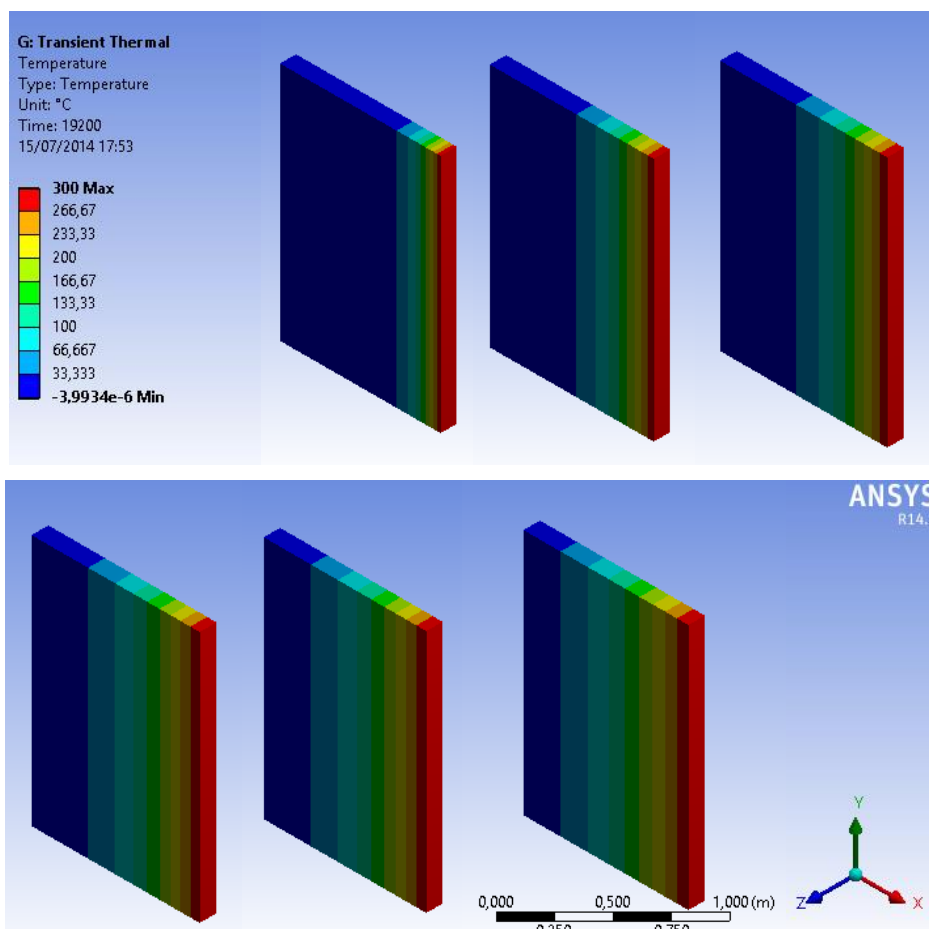


Figura 8 – Análise transiente para a placa no AnsysWorkbench.

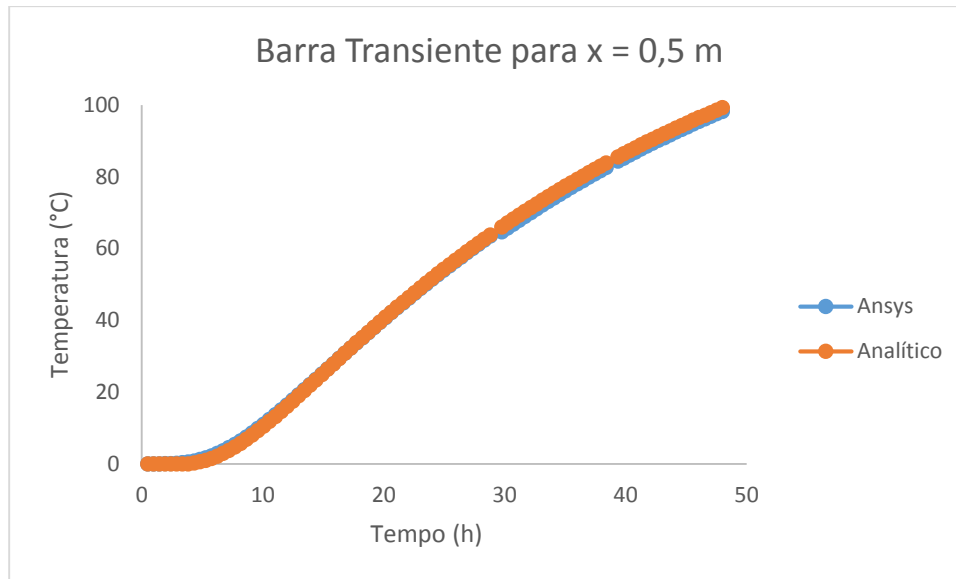


Figura 9 – Comparação entre os resultados numéricos e analíticos.

### 4.3 Problema estático bidimensional

A terceira situação estudada é a Equação de Laplace, sem análise transiente, independentemente do tempo, em duas direções. Neste caso, a avaliação é em termos dos eixos cartesianos  $x$  e  $y$ , e não mais em uma única direção como nos casos anteriores.

Para a equação de Laplace, o problema foi resolvido com as seguintes condições iniciais e de contorno:

O problema é dado por:

$$\frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_4}{\partial y^2} = 0 \quad (20)$$

$$CC: \begin{cases} T_4(L, y) = 0 \\ T_4(x, 0) = 0 \quad \forall t \\ T_4(x, H) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$CI: \{T_4(0, y) = g_1(y)\}$$

Assim, a solução geral para a Eq. 20, neste caso, pode ser composta pela série de Fourier mostrada na Eq. 22:

$$T_4(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[ \sin \frac{n\pi}{H} y \right] \left[ \sinh \frac{n\pi}{H} (x - L) \right] \quad (22)$$

Em que:

$$A_n = \frac{2}{H \left[ \sinh \frac{n\pi}{H} (-L) \right]} \int_0^H g_1(y) \left[ \sinh \frac{n\pi}{H} y \right] dy \quad (23)$$

Foi modelado um bloco de dimensões 1,0 m x 1,0 m e analisados os pontos em  $x = 0,5$  m para diferentes valores de  $y$ . A Fig. 10 apresenta os resultados para o *AnsysAPDL* e a Fig. 11 para o *AnsysWorkbench*. Na Fig. 12 há a comparação entre os resultados analíticos e numéricos graficamente. Observa-se que há exatidão nos resultados, ou seja, ambos são equivalentes.

Logo, tem-se:

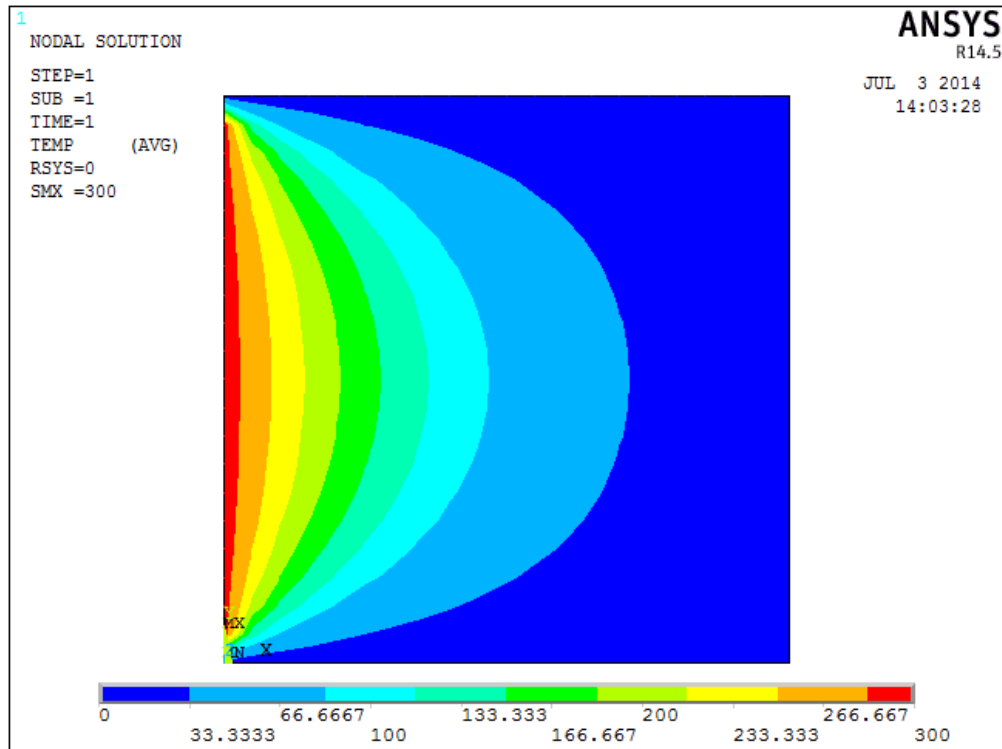


Figura 10 – Problema bidimensional resolvido no *AnsysAPDL*.

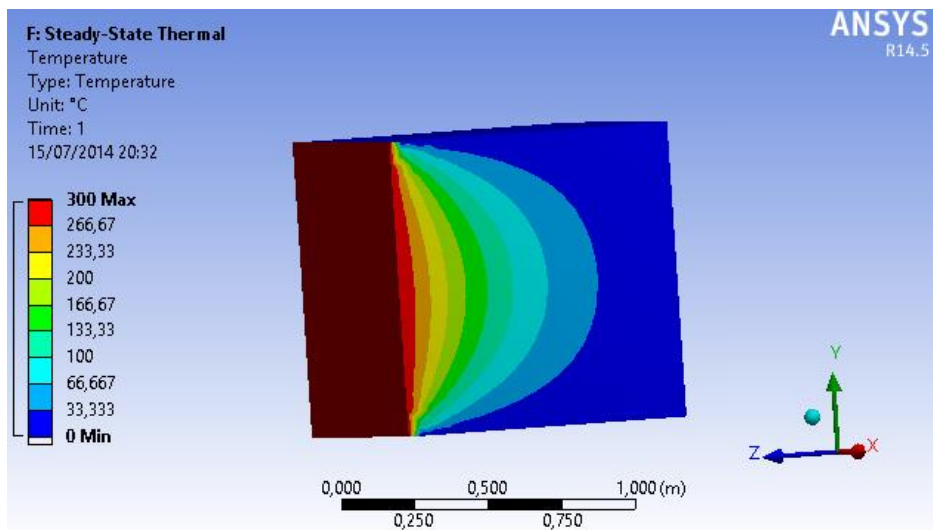


Figura 11 – Problema bidimensional resolvido no *Ansys APDL*.

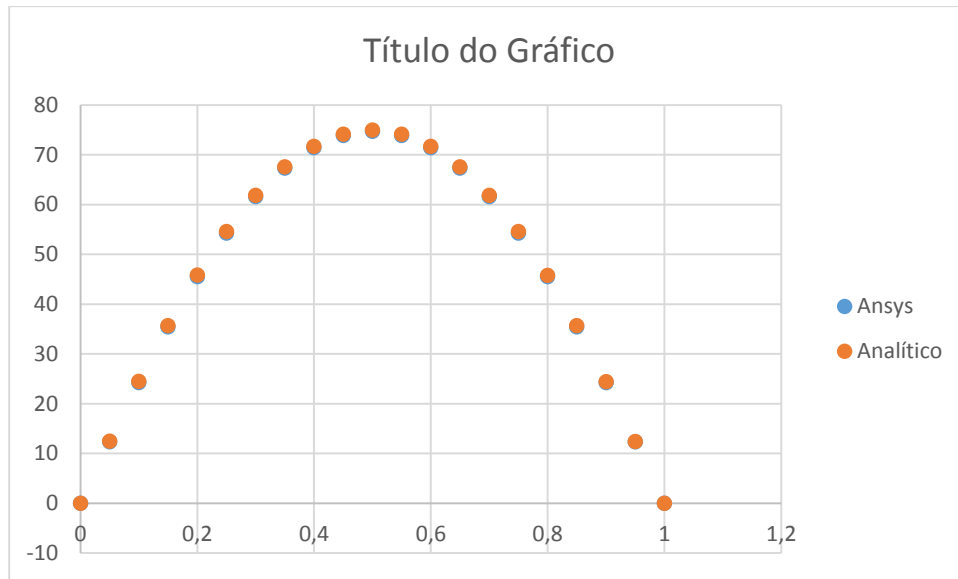


Figura 12 - Comparação entre os resultados numéricos e analíticos para o problema bidimensional.

## 5 CONCLUSÕES

As soluções analíticas nem sempre são possíveis nos problemas de engenharia, portanto, é necessário desenvolver métodos para solucionar tais obstáculos. Os programas computacionais e os experimentos são formas de se obter respostas em determinadas situações. Porém, em ambos os casos, é indispensável a verificação dos resultados, esta pode ser dada através da comparação, seja por trabalhos de outros autores ou mesmo por métodos distintos de solução. Buscando resolver problemas mais complexos futuramente, este trabalho mostra a comparação de resultados de equações analíticas simples com um programa computacional, o *Ansys*, nas formas *APDL* e *Workbench*. As respostas, os gráficos comparativos, mostram que não há diferença entre os resultados. Dessa forma, pode-se afirmar que a utilização do programa computacional é adequado até mesmo em situações mais complexas, pois uma vez comprovada a eficácia em situações simples, o mesmo pode ser utilizado também em casos onde não seja possível obter soluções analiticamente. Com o domínio da ferramenta, problemas simples e complexos podem ser resolvidos de forma rápida e confiável.

## AGRADECIMENTOS

Agradecimentos à equipe do PECC – Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil da UnB – Universidade de Brasília, a agência de fomento CNPq, a equipe de Furnas e a equipe da Univasf - Universidade Federal do Vale do São Francisco – Campus Juazeiro.

## REFERÊNCIAS

- Andrade, L. N.; *Introdução a Computação Algébrica com o MAPLE*. Apostila. Universidade Federal da Paraíba – UFPB. João Pessoa: 2003.
- Ansys. *Modeling and Meshing Guide*. Canonsburg: Ansys, INC, 2004.
- Azenha, M. A. D.; *Comportamento do betão nas primeiras idades. Fenomenologia e análise termo-mecânica*. 248 f. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto – FEUP. Porto: 2004.
- Azenha, M. A. D.; *Numerical Simulation of The Structural Behaviour of Concrete Since Its Early Ages*. 379 f. Tese de Doutorado. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto – FEUP. Porto: 2009.
- Coelho, N. A.; Pedroso, L. J.; *Estudo da equação de calor em elemento uni, bi e tridimensional*. 22 f. Relatório Técnico. Universidade de Brasília – UnB. Brasília: 2013.
- Coelho, N. A.; *Um estudo numérico do efeito térmico em concreto massa*. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília – UnB. Brasília: 2012.
- Coelho, N. A.; Pedroso, L. J.; Rêgo, J.H.S.; *Estudo numérico através do mef para uma estrutura de concreto massa construída em camadas e com diferentes propriedades físicas*. Pirenópolis. CILAMCE:2013
- Coelho, N. A.; Rêgo, J. H. S.; Pedroso, L. J.; Nepomuceno, A. A.; *Análise numérica e térmica de blocos de concreto massa por meio de um código computacional*. Maceió. Ibracon: 2012.
- Coelho, N. A.; Pedroso, L. J.; Rêgo, J. H. S.; Nepomuceno, A. A.; *Influência das propriedades térmicas do concreto massa na análise da temperatura em estruturas de grandes dimensões*. São Paulo. 10th World Congress on Computational Mechanics: 2012
- Gomes, F.M.P.; *Concreto nas primeiras idades: propriedades e modelagem termomecânica simplificada*. 160f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Goiás – UFG. Goiânia: 2011.
- Haberman, R.; *Elementary Applied Partial Differential Equations*. 2ª ed. New Jersey: Prentice-Hall: 1987.
- Hetnarski, R. B.; Eslami, M. R.; *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications*. New York: Springer, 2009.
- Incropera, F. P.; Dewitt, D. P.; Bergman, T. L.; Lavine, A. S.; *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- Kavamura, E. E.; *Estudo do comportamento termo-estrutural bidimensional de barragens de concreto utilizando o Método dos Elementos Finitos*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná - UFPR, Curitiba: 2005.
- Kreyszig, E.; *Advanced Engineering Mathematics*. 10ª ed. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.: 2006.
- Krüger, D. A. V.; *Análise térmica transiente de estruturas de concreto executadas por camadas*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná - UFPR, Curitiba: 2001.
- Rao, S. S.; *The Finite Element Method in Engineering*. 3ª ed. United States of America: Butterworth Heinemann: 1999.

Santos, S. B. *Uma Contribuição ao Estudo do Comportamento Termomecânico de Estruturas Maciças de Concreto*. Modelagem Viscoelástica Linear e Aplicações. 287 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória: 2004.

Silva, M. T. Q. S.; *Análise térmica transiente e de tensões em estruturas executadas em camadas*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná - UFPR, Curitiba: 2003.

Silva, E. C. N; Buiochi, F. *Introdução ao Método de Elementos Finitos (MEF)*. Notas de aula do curso Mecânica Computacional. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2011.