UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CRISTIANE MARTINS FERNANDES TAVARES

ENSINANDO MATRIZES, SISTEMAS LINEARES E DETERMINANTES POR MEIO DO MATRIXCALCULATOR

JUAZEIRO - BA

2020

CRISTIANE MARTINS FERNANDES TAVARES

ENSINANDO MATRIZES, SISTEMAS LINEARES E DETERMINANTES POR MEIO DO MATRIXCALCULATOR

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, campus Juazeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Edson Leite Araújo

JUAZEIRO - BA

2020

T231e

Tavares, Cristiane Martins Fernandes.

Ensinando matrizes, sistemas lineares e determinantes por meio do matrixcalculator / Cristiane Martins Fernandes Tavares. – Juazeiro, 2020.

xiii, 77 f.: il.; 29 cm.

Dissertação – (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro-BA, 2020.

Orientador: Prof. Dr. Edson Leite Araújo.

1. Matemática - Ensino. 2. Aplicativo online 3. Recursos tecnológicos. 4. Sistemas Lineares. 5. Matrizes. I. Título. II. Araújo, Edson Leite. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510.07

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Renato Marques Alves, CRB 5-1458

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

Cristiane Martins Fernandes Tavares

ENSINANDO MATRIZES, SISTEMAS LINEARES E DETERMINANTES POR MEIO DO MATRIXCALCULATOR

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Aprovada em: 04 de setembro de 2020.

Banca Examinadora

Edson Leite Araújo
____
Prof. Dr. Edson Leite Araújo
Orientador – PROFMAT/UNIVASF

Lino Marcos da Sl.
____
Prof. Dr. Lino Marcos da Silva
Examinador Interno: PROFMAT/UNIVASF

R. Menduni - Bortoloti
____
Profa. Dra. Roberta D’Angela Menduni Bortoloti
Examinadora Externa: DCET/PPGEn/UESB

Obrigada Senhor, por todas as bênçãos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus o dom da vida, a saúde e a força que me deu para persistir nesse objetivo.

Ao meu filho Mattheus e ao meu esposo por estarem ao meu lado, apoiando e incentivando neste percurso.

Gratidão aos meus avós, minha mãe, meus tios, primos e irmãos por confiarem no meu potencial e auxiliarem nesta jornada. Obrigada por tudo.

Ao professor Dr. Edson Leite de Araújo, meu orientador, principal parceiro nesta travessia. Sou grata por compartilhar seus conhecimentos e pela dedicação na realização deste trabalho. Obrigada por colaborar com o meu crescimento. Sem você, nada disso seria possível.

Aos meus professores, em especial ao professor Dr. Lino Marcos da Silva pela conduta e profissionalismo.

Ao grande amigo, Edson Gabriel por acreditar em mim e me apoiar quando eu achava que não conseguiria.

A Bruno, por incentivar a ingressar no PROFMAT e sempre ter uma palavra animadora nas dificuldades.

A Joanne, por me auxiliar neste percurso. Sua disponibilidade foi de suma importância neste processo.

Aos colegas de curso, amigos e alunos pelo apoio e companheirismo em todos os momentos.

“Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.”

Paulo Freire

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo investigativo em torno da utilização de um aplicativo online, desenvolvido especificamente para o ensino de sistemas lineares, inversão de matrizes e cálculo de determinantes. O aplicativo explora o desenvolvimento destes conteúdos usando o método de escalonamento de Gauss-Jordan. Os comandos são simples, autoexplicativos e o aplicativo conduz o aluno a decidir quais as operações necessárias para a resolução correta em cada uma das etapas do processo. O trabalho foi realizado através de uma pesquisa de campo, em duas turmas da segunda série do Ensino Médio, numa escola na cidade de Irecê-BA. Numa das turmas, aplicou-se uma sequência didática com a utilização do aplicativo, enquanto na outra turma o ensino ocorreu de forma tradicional. A pesquisa tem abordagem qualitativa baseada em questionários, depoimentos, observações e análise dos resultados.

Palavras-chave: Ensino de matemática; Aplicativo online; Sistemas lineares; Inversão de matrizes; Determinantes.

ABSTRACT

This work presents an investigative study around utilization of an online application, program developed specifically for teaching linear systems, matrix inversion and calculation of determinants. The application program explores these development of content using the Gauss-Jordan scheduling method. The commands are simple, self-explanatory and the application program leads the student to decide which operations are necessary for the correct resolution in each step of the process. The work was realized through a field research, in two classes of the second grade of High School in a school, in the city of Irecê-BA. In one class, a didactic sequence was applied using the application program, while in the other class teaching occurred in a traditional way. The research has a qualitative approach based on questionnaires, testimonies and observations and analysis of the results.

Keywords: Mathematics teaching; Online application program; Linear systems; Matrix inversion; Determinants.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ACRÔNIMOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nesta seção apresentaremos a motivação da autora para desenvolver a pesquisa, bem como o encontro com o objeto de análise, o problema, objetivos e uma visão ampla da proposta.

1.1 MOTIVAÇÃO

Atualmente, para um país avaliar o processo de aprendizagem dos seus estudantes e, através dos resultados obtidos, estabelecer estratégias para melhorar a qualidade da educação, utilizam-se avaliações elaboradas e aplicadas por agentes externos, denominadas avaliações externas ou avaliações em larga escala (BLASIS, FALSARELLA, ALAVARSE, 2013). Como exemplo, tem-se a Avaliação Nacional da Educação Básica (Aneb) e a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (Anresc)[1], também conhecida como Prova Brasil, realizadas no final de cada ciclo da educação básica, nas escolas públicas e privadas do território nacional. Além disso, as avaliações em larga escala podem ser realizadas de modo a estabelecer comparações entre países, como é o caso do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA).

No Brasil, os resultados dessas avaliações apontam para a necessidade de ações que melhorem a aprendizagem, em especial, dos alunos do ensino médio. O resultado no PISA, que avalia, a cada três anos, o desempenho de estudantes com 15 anos de idade, nas áreas de ciências, leitura e matemática, revela que dos 79 países avaliados, o Brasil ocupa a 71ª colocação em Matemática, com uma média de 384 pontos (PISA, 2019). O país ocupava a 66ª posição nesta avaliação em 2015. De acordo com este relatório, a escala global é baseada na média dos países participantes que, em 2018, foi 490 pontos (BRASIL, 2018).

No ano de 2017, o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), calculado a partir da taxa de rendimento escolar e das médias de desempenho no Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que tem por finalidade mensurar a qualidade da educação básica no Brasil, registrou no ensino médio um valor de 3,8,

[1] As siglas Aneb e Anresc deixaram de existir no ano de 2019. Todas as avaliações passaram a ser identificadas pelo nome SAEB, acompanhadas das etapas, áreas do conhecimento e tipos de instrumentos envolvidos.

numa escala variando de 0 a 10, abaixo da meta estipulada, que era de 4,7 naquele ano. Esta escala é classificada nos níveis *insuficiente* (notas menores que 4), *básico* (notas maiores ou iguais a 4 e menores que 7) e *adequado* (notas maiores ou iguais a 7). De acordo com os resultados obtidos no SAEB, 71,7% dos estudantes estão no nível insuficiente, enquanto apenas 4,5% se encontra no nível adequado.

No ano de 2017, entre os estados brasileiros, a Bahia, apresentou o pior desempenho no IDEB, obtendo índice 3,0 e não atingindo a meta desejada que era de 4,3. No PISA 2015, ficou em penúltimo lugar, com pontuação 343 sendo superior apenas ao estado de Alagoas. Em uma perspectiva regional, no ensino médio, em matemática, na edição 2017, o Nordeste obteve 364 pontos, abaixo da média nacional (BRASIL, 2018).

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio da Bahia (BAHIA, 2015), a melhoria do ensino de matemática tem sido alvo de preocupação de pesquisadores e educadores, e as reflexões acerca das possibilidades de um ensino significativo tem como propósito reverter a aversão dos estudantes com relação à matemática e superar os obstáculos de ensino que frustram as expectativas de professores e de estudantes no processo de ensino-aprendizagem.

A investigação de estratégias didáticas que possam ser bem sucedidas para o ensino da matemática é algo desejável e o uso das tecnologias da informação pode ser interessante para melhorar a aprendizagem dos estudantes (MORAN, 2012). Nesta perspectiva, a utilização de tecnologias, desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, representa um importante instrumento nos processos de ensino e de aprendizagem, uma vez que possibilita uma apresentação mais interativa e dinâmica da matemática. A inclusão da informática é tão importante que, de acordo com Borba (2017, p. 17), "o acesso à informática deve ser visto como um direito". Para ele, o bom uso da informática em sala de aula pode estimular os estudantes a melhor compreensão de conceitos, o que conduziria a uma aprendizagem significativa. O autor incentiva o uso do computador em atividades em que o aluno leia, interprete, construa gráficos, conte, desenvolva noções espaciais e experimente.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em relação ao ensino da Matemática, prevê como uma de suas competências: "compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados e problemas” (BRASIL, 2017, p. 533). Desta forma, incluir o registro computacional como um meio possível de utilização na abordagem de conteúdos matemáticos, evidencia o reconhecimento e a validade dessa estratégia de ensino.

Para Ávila (2010), o ensino da Matemática deve proporcionar ao estudante oportunidades de exercitar suas faculdades intelectuais. Exercitar o raciocínio, acionar conhecimentos de mundo, estabelecer relações com diversas áreas de estudo e pensar em formas alternativas para a resolução de problemas, devem ser ações de interesse do professor e do estudante de Matemática.

Na busca de possibilitar aos estudantes da segunda série do ensino médio o desenvolvimento e exercício nos conteúdos expostos, esta pesquisa apresenta a seguinte questão norteadora:

Como o uso de um aplicativo, pode auxiliar o aluno da segunda série do ensino médio, na resolução de *sistemas lineares*, *inversão de matrizes* e *cálculo de determinantes*?

Como professora de matemática do ensino médio há mais de 15 anos, tenho percebido a dificuldade dos alunos da segunda série em resolver problemas relacionados ao uso de *sistemas lineares*. Existem vários métodos de resolução que demandam operações algébricas simples (substituição, comparação, escalonamento). Apesar disso, os alunos não entendem os procedimentos necessários para sua aplicação correta e cometem erros nestas operações.

Na segunda série do Ensino Médio, a definição de *determinantes* é apresentada como um número associado a uma matriz quadrada de ordem n e obtido a partir de cálculos envolvendo todos os elementos da matriz, podendo ser utilizado na resolução de *sistemas lineares* e para verificar se a matriz admite *inversa* ou não. As fórmulas para o cálculo de *determinantes* de ordem 2 e de ordem 3 apresentadas nos livros didáticos, são simples e os alunos respondem com facilidade. Entretanto o cálculo de *determinantes* de ordem superior a 3 é pouco explorado. Além disso, este conteúdo é apresentado na maioria dos livros didáticos sem qualquer contextualização.

Outra dificuldade observada na prática de aula está em calcular e dar significado às *matrizes inversas*. De forma geral, ensina-se a regra para a obtenção de matrizes inversas de ordem 2, sem que seja dado qualquer contexto a esta matriz. Além disso, a inversão de matrizes de ordem 3 é pouco explorada.

Analisando o resultado das avaliações correspondentes aos conteúdos desta pesquisa numa escola situada na cidade de Irecê - BA, notou-se que no ano de 2018, em duas turmas de segunda série (70 alunos), apenas 34% dos alunos resolveram um *sistema linear* de terceira ordem corretamente, 31% dos discentes determinaram a *inversa* de uma matriz de segunda ordem e 55% calcularam o *determinante* de terceira ordem. Desta forma, ações para melhorar a qualidade da aprendizagem dos alunos são necessárias.

Diante dessa situação delicada, os desafios enquanto professora da educação básica colocam-me na posição de investigar possíveis práticas educativas que possam auxiliar os estudantes na aprendizagem da matemática. Essa perspectiva de pesquisa está alinhada à corrente teórica que defende a inserção dos professores da educação básica como pesquisadores de suas próprias práticas. A proposta da pesquisa situada na sala de aula tem implicações importantes para as pesquisas em educação, a partir de problemas que são sentidos diretamente pelos professores no cotidiano escolar (MOREIRA, 1998; EL-HANI; GRECA, 2011; 2013).

Discutindo a respeito do impacto da atuação do professor como educador e pesquisador, Sepúlveda e colaboradores (2016) enfatizam que os conhecimentos produzidos pelos professores da educação básica em contextos de pesquisa educacional, se caracterizam por terem “tanto da validade externa – a possibilidade de o pesquisador generalizar resultados obtidos para contextos reais da prática de ensino”, e ao mesmo tempo, a “validade social” (WOLF, 1978) – referente ao grau de significância social dos resultados, do ponto de vista dos professores e dos estudantes, aqueles que diretamente se beneficiariam dos resultados da pesquisa.

1.2 OBJETIVOS

Em Matemática, o envolvimento do aluno é condição imprescindível para a aprendizagem. De acordo com Ponte (2015, p. 23) “O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo”. Assim, este trabalho tem o seguinte objetivo geral:

- Investigar se o uso do aplicativo *MatrixCalculator* favorece a aprendizagem dos alunos e auxilia os professores no ensino de *sistemas lineares*, *inversão de matrizes* e *cálculo de determinantes*, utilizando o método de Gauss-Jordan.

Como objetivos específicos, têm-se:

- Identificar se o uso do aplicativo contribui para solucionar *sistemas de equações lineares* com um número finito de variáveis, simplificar o cálculo de *determinantes* e encontrar a *inversa* de uma matriz, buscando estabelecer uma relação entre os conteúdos estudados.

- Aplicar uma sequência didática utilizando o método de Gauss- Jordan para ensinar os conteúdos mencionados.

- Realizar um experimento comparativo entre duas turmas de segunda série do ensino médio.

- Analisar o desempenho das turmas pesquisadas nas atividades aplicadas por meio do aplicativo MatrixCalculator.

1.3 VISÃO GERAL DA PROPOSTA

O trabalho está organizado em seis capítulos, iniciados com este.

No capítulo 2 citamos os documentos oficiais consultados e autores que estudaram sobre os conteúdos. Além disso, foi realizada uma abordagem acerca do contexto histórico, citando alguns matemáticos essenciais na utilização dos conteúdos mencionados.

O capítulo 3 é destinado a apresentação da informática como tendência de ensino. Além disso, é feita a descrição das teclas e menus, destacando as funções e aplicabilidade nos cálculos desejados, bem como elencando as vantagens para o professor ministrar o conteúdo com o uso do aplicativo *MatrixCalculator*, e para o aluno, no auxílio da aprendizagem.

A proposta do trabalho, as turmas envolvidas, as atividades realizadas e a forma como a sequência didática foi aplicada, são descritos no capítulo 4.

As reflexões acerca dos resultados obtidos através das atividades realizadas com as turmas são apresentadas no capítulo 5.

A análise do trabalho realizado e sugestões para trabalhos futuros, comentários pessoais e conclusões obtidas são feitas no capítulo 6.

2 MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

2.1 O QUE DIZEM OS DOCUMENTOS OFICIAIS

Uma análise do fazer pedagógico no cotidiano das escolas brasileiras, permite perceber que as dificuldades envolvendo a relação ensino-aprendizagem são diversas e significativas. As más condições de trabalho, a deficiência na oferta de formação continuada para professores, os currículos que muitas vezes se apresentam obsoletos e a dificuldade de aprendizagem dos alunos, são exemplos de desafios presentes no ambiente escolar do Brasil (SCHWARTZMAN, 2005).

As consequências disso vêm sendo expressas em resultados cada vez piores nas avaliações externas e internas (PISA, SAEB) além de uma aprendizagem cada vez mais defasada, resultando em alunos ainda mais desinteressados. Entre os motivos para a aversão a esta matéria estão o sentimento de que a educação não é o caminho para a realização dos objetivos e, por se tratar de uma ciência exata, a matemática necessita de atenção, cuidado e ordem. A falta de conhecimentos prévios prejudica a aprendizagem e, considerando alguns desafios inerentes ao ensino, há a necessidade de aulas que despertem o desejo de aprender a disciplina (LIMA, 2007).

É evidente, portanto, a importância do professor no processo de melhoria do ensino e da forma como o discente encara esta matéria. A matemática pode deixar de ser um monstro, quando os professores buscarem desenvolver ações que despertem nos alunos a importância de relacionar os conceitos estudados com a sua vida social, levando-os a utilizar o raciocínio lógico decorrente de situações reais, a resolver diferentes tipos de problemas, estimulando o pensamento independente (LARA, 2003).

Tendo em vista as dificuldades enfrentadas no ensino da matemática no Brasil, bem como a busca por melhorias, alguns documentos oficiais destacam estratégias para mais eficácia na relação ensino-aprendizagem. Sobre o ensino de *sistemas lineares*, as orientações curriculares para o ensino médio (BRASIL, 2008), recomenda o ensino da álgebra e da geometria paralelamente, buscando associar a resolução de sistemas de segunda ordem à posição relativa de duas retas no plano. Orienta, também, a resolução pelo processo de *escalonamento*, fazendo a interpretação de acordo com o número de soluções (uma solução, infinitas soluções, e nenhuma solução). Segundo o documento, a **regra de Cramer**, que é usada em geral e que depende do cálculo de *determinantes*, deve ser dispensada por se tratar de um processo trabalhoso e que só admite resolução para sistemas cujas matrizes são quadradas e com solução única. Ressalta ainda que o estudo dos *determinantes* poderia ser excluído.

No entanto, Lima (2007, p. 102) considera o significado matemático dos determinantes muito relevante. Como exemplo, cita sua importância na *álgebra* como "única função multilinear alternada das colunas (ou linhas) de uma matriz quadrada" e na *geometria*, corresponde ao volume de um paralelepípedo de *n* dimensões em que as colunas da matriz correspondem as arestas do paralelepípedo. Além disso, no ensino médio, vários cálculos são realizados com o auxílio dos *determinantes*. Em geometria analítica, por exemplo é usado para verificar a colinearidade de três pontos no plano, no cálculo de área de triângulos conhecendo as coordenadas dos seus vértices e na determinação da equação de uma reta conhecendo dois pontos (GIOVANNI at al., 2017).

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017) o estudo da *álgebra* deve iniciar nos primeiros anos do ensino fundamental. Esta é uma das mudanças do documento em relação aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1999), pois neste, o raciocínio algébrico é iniciado no 7ºano, nas quais as situações problemas envolvendo equações devem ser exploradas e resolvidas com ou sem equações explícitas.

É também na BNCC, em sua *competência dois*, que se elabora a utilização de estratégias para a resolução de problemas, buscando a sua interpretação e resolução. Nesta competência, propõe-se desenvolver a habilidade: "Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvam equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não *tecnologias digitais*" (BRASIL, 2017, p.528).

Nas Orientações Curriculares para Matemática (BAHIA, 2015. p.15) no campo das habilidades sobre *matrizes, determinantes* e *sistemas lineares* a serem desenvolvidas, encontra-se:

- Operacionalizar *matrizes* enquanto sistema que apresenta algumas propriedades do conjunto dos números reais. Desenvolver a compreensão das propriedades de adição e multiplicação de matrizes e suas representações.

- Resolver *sistemas lineares*, associando-os a equações matriciais, utilizando o *cálculo de determinantes* no processo de discussão da solução dos mesmos.

- Desenvolver aptidão nas operações com números reais e matrizes, recorrendo ao cálculo mental, aos métodos de contagem, e nos casos mais complexos, às *tecnologias*.

- Avaliar a validade de cálculos numéricos e dos respectivos problemas.

Na matriz de referência do SAEB, os descritores que são avaliados na prova de matemática para o 9º ano relacionados à álgebra são:

D33: Identificar uma equação ou uma inequação de primeiro grau que expressa um problema.

D34: Identificar um sistema de equações do primeiro grau que expressa um problema.

D35: Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações de primeiro grau.

Para a 3ª série do Ensino Médio, o descritor relacionado à resolução de um sistema linear é:

D31: Determinar a solução de um sistema linear associando-o a uma matriz.

Nota-se, portanto, a importância destes conteúdos serem estudados de forma articulada, buscando o desenvolvimento das competências e habilidades destacadas. Vale salientar que os conteúdos abordados nesta pesquisa são imprescindíveis para a Álgebra Linear, disciplina de fundamental importância para abstrair e generalizar assuntos relacionados (GRANDE, 2006 *apud* PERCEVAL, 2017), presente na grade curricular da grande maioria dos cursos superiores da área de exatas.

2.2 CONTEXTO HISTÓRICO

Os primeiros documentos sobre resolução de equações lineares encontrados datam de 1600 a.C, no *Papiro de Rhind* ou *de Ahmes*. Os problemas apresentados são equivalentes a solução de equações lineares do tipo

$$x + ax = b \tag{2.1}$$

Ou ainda

$$x + ax + bx = c \tag{2.2}$$

nas quais *a*, *b* e *c* são conhecidos e *x* é o termo desconhecido ou incógnita também denominada ”aha” ou pilha (BOYER, 2018).

Entre os registros sobre *sistemas lineares*, destaca-se como um dos mais importantes livros chineses sobre matemática, o *Chiu-Chang Suan-Shu* ou *Nove capítulos sobre a arte Matemática* (100 a.C). Este livro é composto por 246 problemas relativos a diversos conteúdos matemáticos. O capítulo 8 refere-se a *sistemas de equações lineares* e *procedimentos matriciais,* utilizando tanto números positivos quanto números negativos (BOYER, 2018). O *problema 1* deste capítulo (exposto abaixo), é um exemplo da utilização de *sistemas de equações lineares* simultâneas:

“Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades? ” (EVES, 2004, p. 268).

Expressando este problema em linguagem matemática, obtém-se o seguinte sistema linear de terceira ordem:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases} \tag{2.3}$$

Escrito na forma matricial, torna-se:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

E utilizando operações entre linhas ou colunas, reduz-se à seguinte matriz equivalente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ & 5 & 1 & 24 \\ & & 36 & 99 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Obtendo as equações:

$$\begin{cases} 36z = 99 \\ 5y + z = 24 \\ 3x + 2y + z = 39 \end{cases} \tag{2.6}$$

Desta forma, os valores de x, y *e* $z,$ podiam ser calculados facilmente.

Para o cálculo de *determinantes*, os chineses possuíam noções para resolução de problemas representados por *sistemas lineares*. No entanto, este assunto começou a ser tratado no final do século XVII, pelo japonês Seki Kowa (1642-1708), que desenvolveu o cálculo para a simplificação de *sistemas lineares* (BATISTA, LUCCAS, 2004). Por volta de 1693, Leibniz utiliza para resolução de equações simultâneas. (BOLDRINI at al., 1996). Boyer (2018, p.290) cita Leibniz como a “primeira referência no ocidente ao método de *determinantes*”

A partir do século XIX, o estudo dos *determinantes* começou a ser estruturado, começando por A.L.Cauchy (1789-1857) em 1812, complementado por C.G.Jacobi (1804-1851), que admitia a notação de *determinantes* como dispositivo na resolução de problemas em áreas como Física e Economia. Daí em diante, a definição de *determinantes* como um número associado a uma matriz quadrada, começou a ser utilizada para determinar a existência ou não de solução de um sistema, ou verificar se uma matriz admite *inversa*. (BOLDRINI at al., 1996).

As definições de operações com matrizes foram abordadas e publicadas primeiramente por Cayley, em 1858. Em seu trabalho, foram definidos conceitos de álgebra matricial, como adição, multiplicação entre matrizes, multiplicação por escalar e a definição de matriz inversa, que surgiu da necessidade de se trabalhar e manusear matrizes para a resolução de sistemas lineares (O'CONNOR, ROBERTSON, 1996).

Atualmente, os conceitos de matrizes e determinantes são cada vez mais utilizados na área tecnológica. Um exemplo é a utilização dos cálculos destes conteúdos na composição de malhas poligonais em jogos de videogame e impressões tridimensionais, tornando possível ambientes e personagens cada vez mais parecidos com o real (GIOVANNI at al., 2017).

3 A INFORMÁTICA COMO TENDÊNCIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Os estudantes, nascidos entre 1998 e 2010, compõem o que se entende como "*geração z*", ou seja, os nascidos após o surgimento da internet e que, desde o nascimento, estão em contato com as novas tecnologias. Manuseiam computadores, celulares, *tablets*, dentre outros dispositivos tecnológicos, sem dificuldades e estão sempre buscando atualizações (TAPSCOTT, 2010). Em consequência, aulas tradicionais e sem a utilização da tecnologia, para esta geração, perdem o sentido. É sobre esse cenário que Paiva (2016, p.1 apud FONSECA, 2017) tece as seguintes considerações:

> O ato de ensinar tem se tornado cada vez mais complexo. O professor, antes o centro das atenções, disputa seu posto de única fonte de conhecimento com a tecnologia, a internet, as videoaulas, os tedtalks, entre outros recursos hoje acessíveis facilmente através do computador ou celular. Uma vez que, em geral, as tecnologias não estão inseridas diretamente nas atividades escolares, elas se tornam meio de descontração para os alunos. Os alunos estão cada vez mais inseridos nas tecnologias e redes sociais. A geração atual é digital, enquanto as escolas, em sua esmagadora maioria, ainda continuam "analógicas". (PAIVA, 2016, p.1 apud FONSECA, 2017)

Torna-se evidente, portanto, a necessidade de inserção das tecnologias nas escolas. O uso das tecnologias proporciona um ambiente de integração entre professor, aluno e máquina, de forma que o aluno faz tentativas, ousa, arrisca, sem medo de errar (DANTE, 2010), além de garantir que as novas tecnologias contribuam para a modificação do ensino tradicional (BORBA, PENTEADO, 2007). Nesta perspectiva, Rocha (2015, p.22 apud COUTINHO JUNIOR, 2018) enfatiza que:

> Essas novas formas vêm provocando uma revolução nas práticas tradicionais de ensino que avançam em direção a uma prática pedagógica interdisciplinar voltada para a aprendizagem do sujeito-aluno. Também estabelecem uma nova relação professor-aluno marcada por uma maior interação e cooperação. (ROCHA et.al., 2015, p. 22 apud COUTINHO JUNIOR, 2018)

Na busca por programas educacionais de incentivo ao uso da informática na rede pública de ensino fundamental e médio, o Programa Nacional de Informática na Educação - PROINFO, criado pela portaria nº 522 do Ministério da Educação (MEC), de 9 de abril de 1997 e regulamentado pelo decreto nº 6300, de 12 de dezembro de 2007, possui como objetivo promover o uso pedagógico de Tecnologias de Informática e Comunicações – TICs (RONSANI, 2005).

Nos documentos oficiais, diversas orientações são dadas a respeito da utilização das tecnologias no ensino da matemática. Os *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio* – PCNEM – (BRASIL, 1999), apresenta como uma das competências e habilidades a serem desenvolvidas em matemática, a utilização como ferramenta de produção e comunicação, buscando reconhecer suas limitações e potencialidades. A *Base Nacional Comum Curricular* – BNCC – (BRASIL, 2017) enfatiza que seu uso no ambiente escolar amplia as alternativas de experiências, facilitando a aprendizagem, através do estímulo ao desenvolvimento do raciocínio lógico, formulando e testando conjecturas e construindo argumentações. *As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio* – DCNEM – (BRASIL, 2018) conceituam a tecnologia "como a transformação da ciência em força produtiva ou mediação do conhecimento científico e a produção, marcada, desde sua origem, pelas relações sociais que a levaram a ser produzida". As *Orientações Curriculares para o Ensino Médio* (BRASIL, 2008) salientam também, a utilização de um software correto em sala de aula como fator preponderante para a eficácia da aprendizagem e destaca a importância do preparo do professor na condução das atividades.

Sobre o uso das tecnologias, as *Orientações Curriculares para o Ensino Médio do Estado da Bahia,* ressaltam: "essas ferramentas favorecem uma aprendizagem significativa e articulada com outros conhecimentos matemáticos, calcada no movimento, nas transformações, de forma dinâmica, criativa e desafiante" (BAHIA, 2015, p. 24).

Nota-se, portanto, a necessidade de buscar mecanismos para adequar a atuação pedagógica, utilizando as tecnologias de acordo com o que é sugerido nos documentos oficiais e, desta forma, melhorar o interesse dos educandos e proporcionar uma aprendizagem significativa e prazerosa.

3.1 O APLICATIVO

Em face do exposto, propomos a criação de um aplicativo, denominado *MatrixCalculator* (ARAÚJO, 2019), para auxiliar o aluno e o professor na relação de ensino-aprendizagem, no tocante à resolução de *sistemas lineares*, cálculo de *determinantes* e *inversão de matrizes*, que proporcione ao aluno a possibilidade de resolver problemas envolvendo os conteúdos abordados, desenvolver o raciocínio lógico na execução dos cálculos, melhorar a aprendizagem e, consequentemente, seu desempenho escolar, além de proporcionar aulas dinâmicas e interativas, sem a necessidade de memorização de fórmulas ou métodos complicados.

O *MatrixCalculator* foi desenvolvido pelo professor Dr. Edson Leite Araújo, orientador deste trabalho e foi utilizado pela **Turma B** da 2ª série no processo de aplicação das atividades relacionadas a esta pesquisa. A princípio, o aplicativo foi desenvolvido em linguagem *javascript* para execução apenas em dispositivos com telas de tamanhos razoáveis (PCs, *notebooks*, *tablets*), mas com intenção futura de utilização também em celulares. Funciona em qualquer dispositivo que tenha um navegador instalado e acesso à internet. As resoluções abordadas pelo aplicativo usam o **método de escalonamento de Gauss-Jordan**, que consiste em reduzir a matriz dada através de operações básicas entre linhas a uma matriz diagonal equivalente (LIMA, 2016).

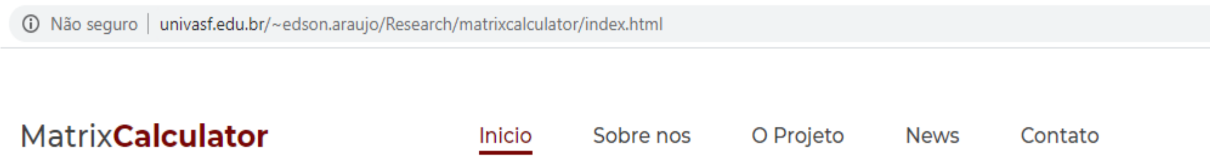
3.2 USANDO O APLICATIVO

Nesta seção serão apresentadas as teclas, funções e características do aplicativo *MatrixCalculator* (ARAÚJO, 2019).

3.2.1 Resolução de Sistemas Lineares

Ao ser acessado, a página inicial contém um menu, com as abas de apresentação do projeto (Figura 3.1).

Figura 3.1 - Interface inicial do aplicativo

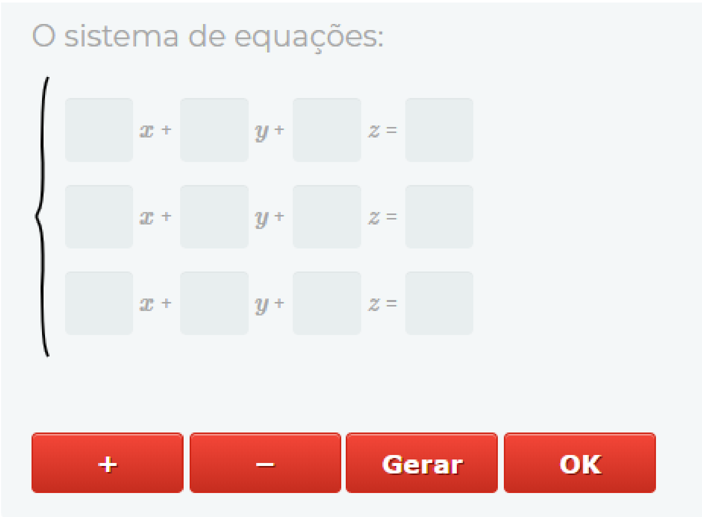


À direita há, ainda, um menu suspenso, no qual podem ser encontradas as três opções principais do aplicativo: **Sistemas**, **Matrizes** e **Determinantes** (Figura 3.2).

Figura 3.2 - Opções principais do aplicativo

Ao clicar em *aprender* e tendo escolhido a opção "*Sistemas*", é aberta uma janela na qual o usuário pode inserir o sistema que deseja resolver (Figura 3.3).

Figura 3.3 - Opções para inserção do sistema linear



O usuário tem à disposição os botões:

Aumenta o número de incógnitas. O aplicativo tem a opção de gerar sistemas com até 10 incógnitas.

Diminui o número de incógnitas.

O aplicativo gera um sistema linear aleatório.

Ao clicar este botão, o aplicativo solicita ao usuário que confirme o sistema que será resolvido e uma nova janela é aberta para o início da resolução.

Após ter inserido os dados do sistema, o aplicativo conduz o estudante por passos necessários à sua resolução de acordo com o *método de Gauss-Jordan*.

A entrada da matriz com bordas destacadas em *vermelho*, indica que esta é a entrada que corresponde ao objetivo atual do aplicativo. As operações permitidas devem ser escolhidas no menu à direita (Figura 3.4).

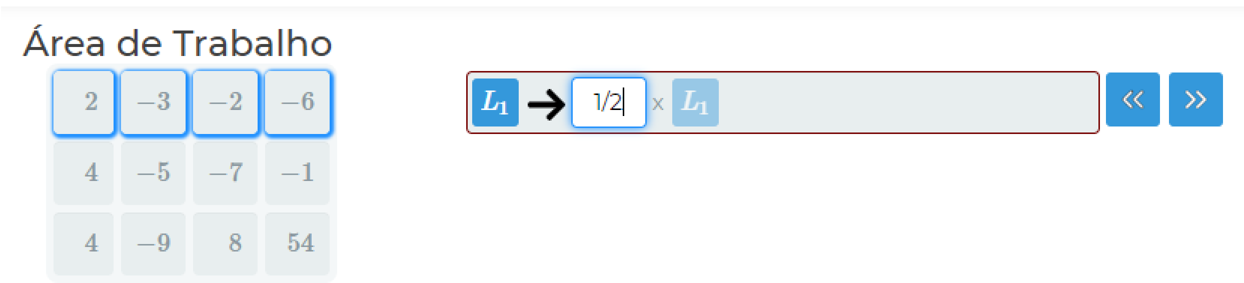
Ao clicar no botão iniciar, três opções são oferecidas:

- **Trocar:** troca duas linhas de posição;
- **Somar/ subtrair:** Adiciona ou subtrai duas linhas
- **Multiplicação:** Multiplica uma determinada linha por uma constante.

Figura 3.4 - Operações disponíveis

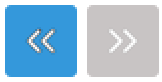
Como o objetivo é tornar o valor igual a 1 para entradas da diagonal e 0 para as demais, ao clicar na operação necessária para a realização, o usuário escolherá a linha e o cálculo a efetuar (Figura 3.5).

Figura 3.5 - Operação para tornar o elemento da diagonal principal igual a 1



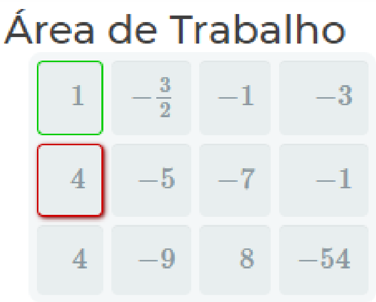
Feita a escolha, o usuário deve pressionar o botão *prosseguir* (››) ou *retornar* (‹‹), caso tenha obtido resultado errado (Figura 3.6)

Figura 3.6 - Botões para condução retornar/prosseguir



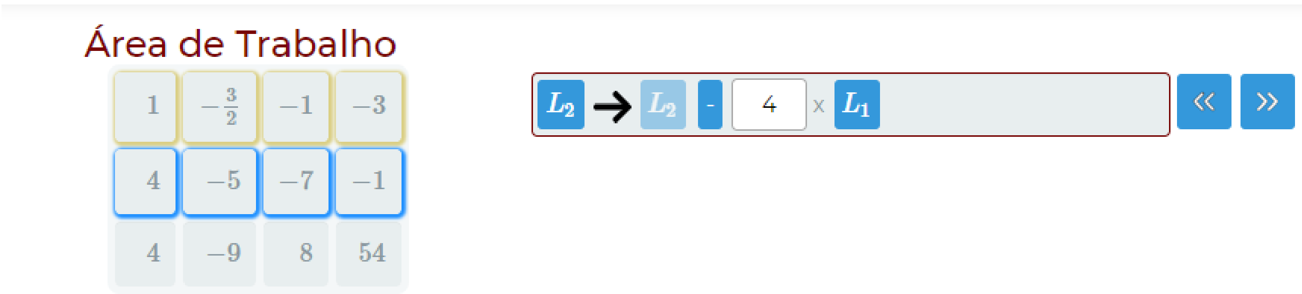
Caso tenha alcançado o objetivo daquela entrada, as bordas desta tornam-se *verde* indicando o resultado correto e a próxima entrada alvo ganha bordas *vermelhas* (Figura 3.7).

Figura 3.7 - Aplicativo direciona para a próxima entrada



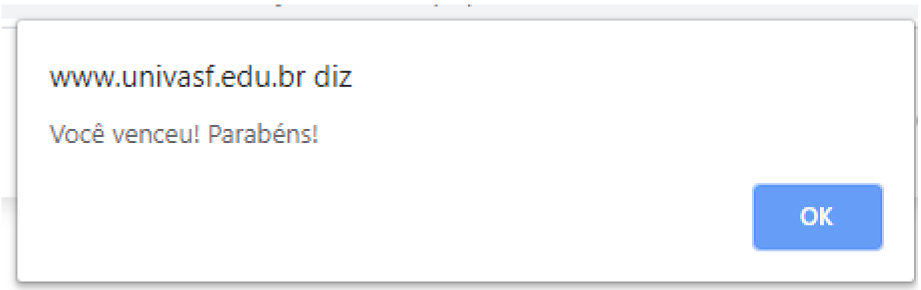
As linhas selecionadas durante alguma operação têm as bordas de suas entradas destacadas nas cores *amarelo* e *azul* (Figura 3.8).

Figura 3.8 - Operações entre linhas



Este procedimento é repetido seguidas vezes, até que a matriz se torne uma matriz equivalente escalonada. Neste momento, o aplicativo mostrará uma mensagem indicando o final do procedimento (Figura 3.9) e, posteriormente, exibe uma tela com a resposta final do sistema.

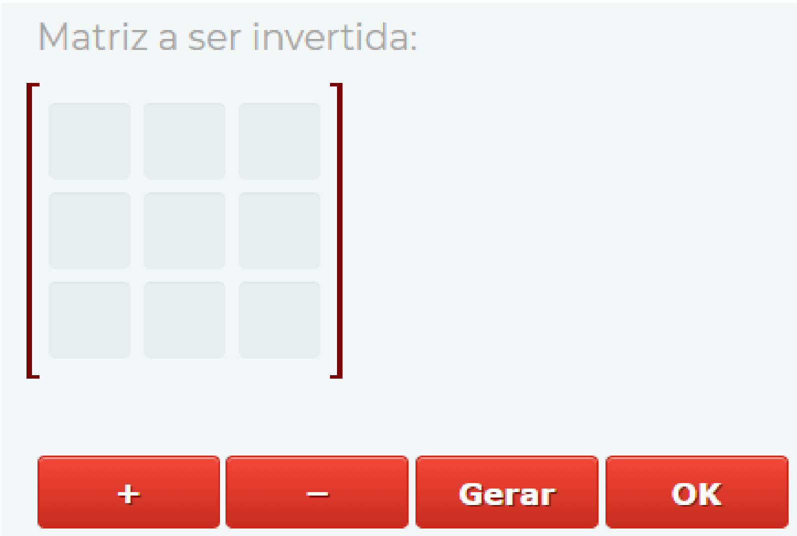
Figura 3.9 - Mensagem indicando a resolução correta



3.2.2 Inversão de Matrizes

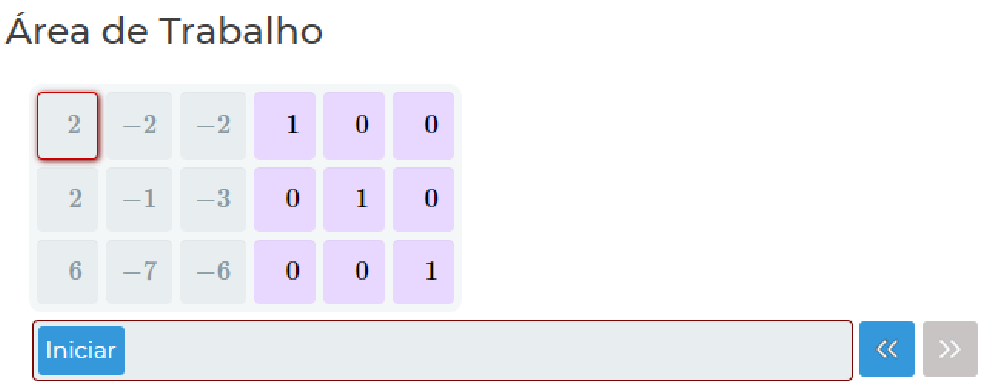
Voltando à tela principal do aplicativo (Figura 3.2) e escolhendo a opção “matrizes”, o usuário tem acesso a parte do programa que lida com o processo de inversão de matrizes (Figura 3.10).

Figura 3.10 - Janela disponível para inserção da matriz e botões disponíveis



Novamente, o aluno terá à disposição os botões “+”, “- “, “Gerar” e “ok”, cujas funções são as mesmas já detalhadas na subseção anterior e o método utilizado para o cálculo da matriz inversa é o de **Gauss-Jordan**.

Figura 3.11 - Entrada em destaque para resolução

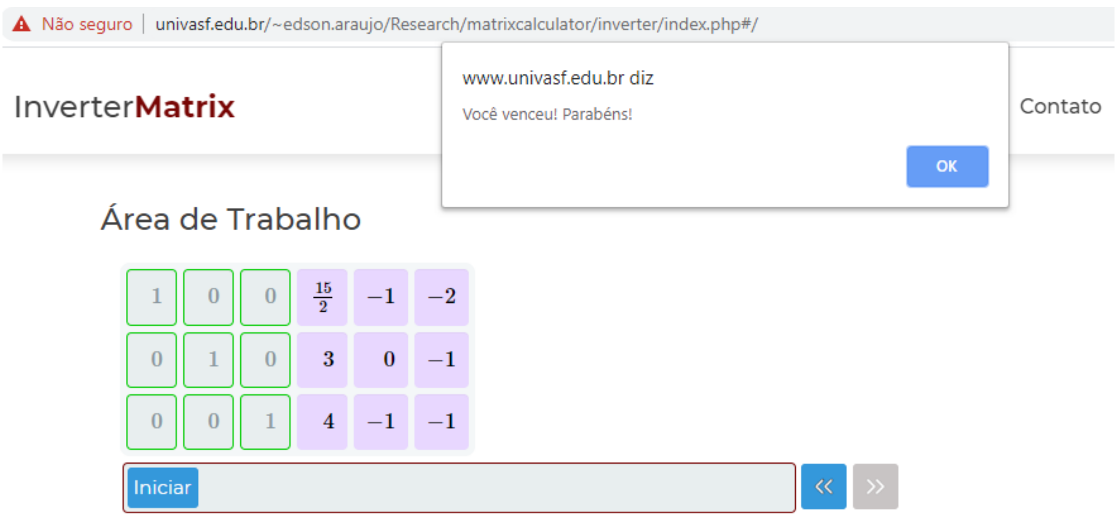


O processo de resolução é semelhante ao utilizado na resolução de sistemas. Neste caso, uma matriz identidade é posta do lado direito da matriz inserida. Ao escalonar a matriz dada, a matriz identidade será transformada na inversa que deseja-se encontrar (Figura 3.11).

O aluno determinará a matriz inversa de forma lúdica e prazerosa, obedecendo aos passos induzidos pelo aplicativo.

Resolvendo corretamente, será exibida uma mensagem parabenizando o usuário pelo sucesso na resolução desenvolvida (Figura 3.12).

Figura 3.12 - Atividade realizada corretamente



Após clicar em **ok**, a matriz inversa é apresentada numa nova tela (Figura 3.13). Nesta tela, é dada ao aluno a opção de visualizar o desenvolvimento executado na forma escrita (Figura 3.14). Esta opção do aplicativo é imprescindível para a sistematização do conhecimento, uma vez que permite ao educando conhecer e compreender as etapas integrantes para a resolução. A compreensão deste processo é de suma importância, pois para se obter uma aprendizagem significativa, é necessário que sejam capazes não apenas de apontar o resultado correto, mas que reconheçam e entendam os passos dados até alcançar o acerto, tornando-os mais capazes e autônomos no processo de aprendizagem.

Figura 3.13 - Matriz Inversa determinada

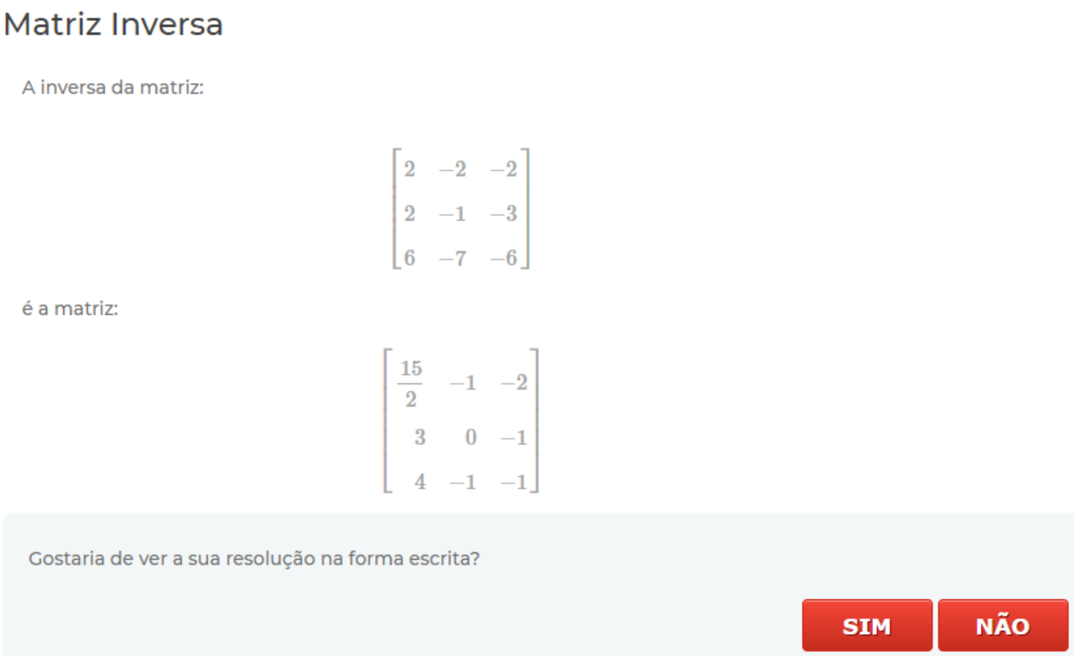
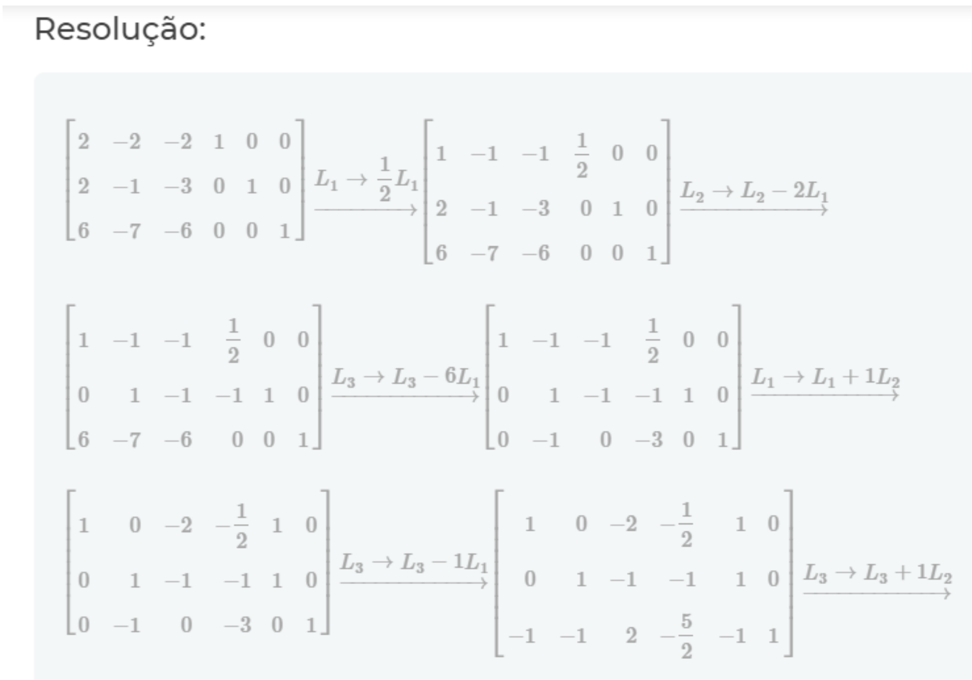


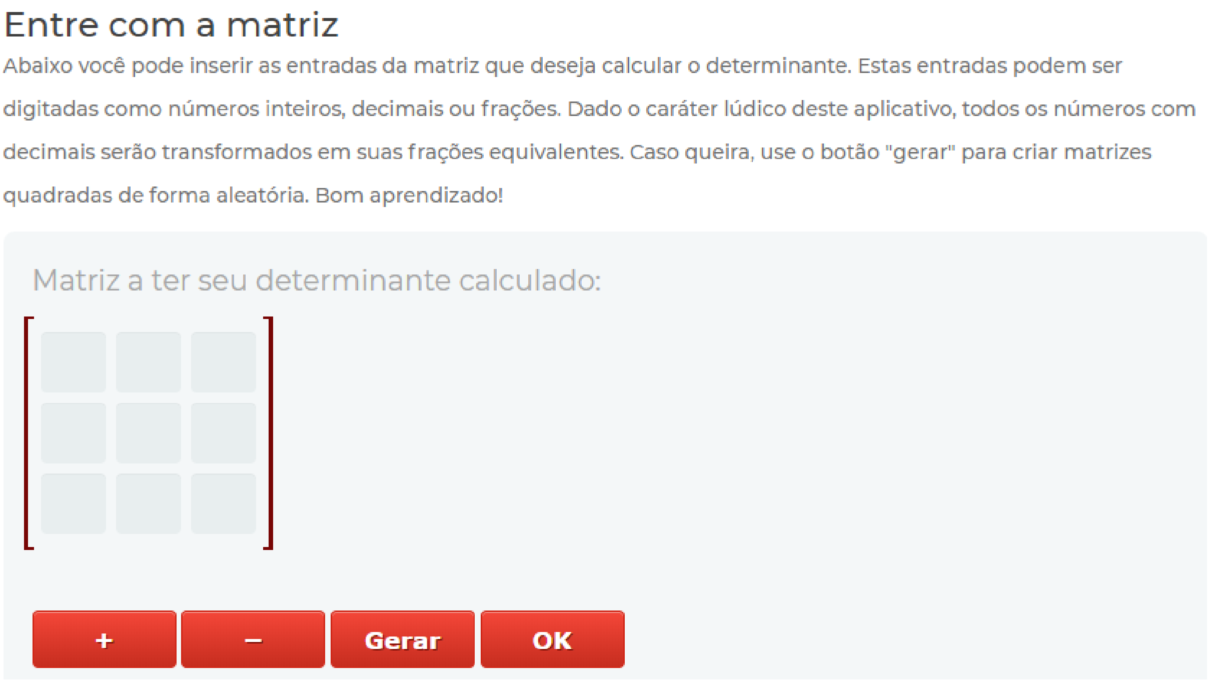
Figura 3.14 - Passo a passo da resolução



3.2.3 Cálculo de Determinantes

O Cálculo de determinantes aparece como terceira opção no menu suspenso, da tela de abertura do *MatrixCalculator* (Figura 3.2). De modo análogo às opções anteriores, ao clicar em "aprender", o usuário terá acesso à tela de inserção dos dados da matriz que se deseja calcular seu determinante (Figura 3.15).

Figura 3.15 - Inserção dos dados

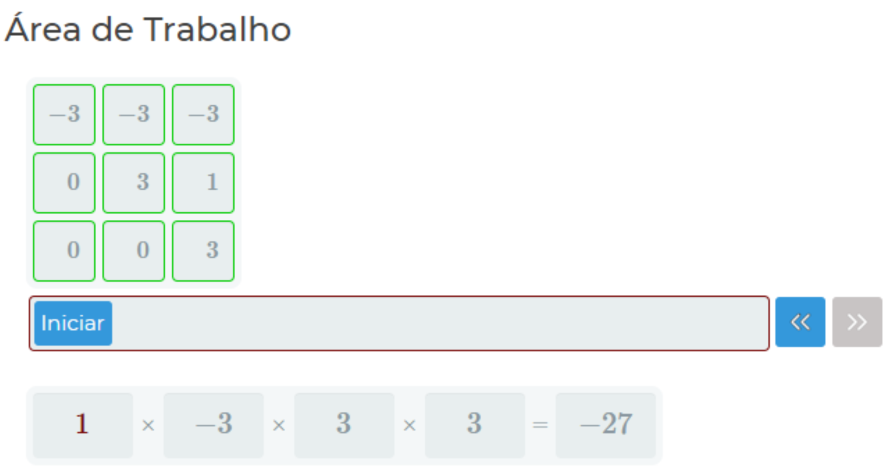


O aplicativo conduz o aluno, passo a passo, por um procedimento que equivale a um escalonamento *parcial,* em que se constrói uma matriz diagonal superior equivalente e a partir desta, utilizando-se apenas o produto dos elementos da sua diagonal principal e o número de troca de linhas executadas (Figura 3.17), chega-se ao valor do determinante buscado (LIPSCHUTZ, 2011).

A entrada cujo valor aparece destacado em vermelho (1 ou -1) (Figura 3.16) é responsável por acumular o efeito que as trocas de linhas têm sobre o cálculo do determinante. Como se sabe, cada troca de linha, muda o sinal do valor do determinante. Desta forma, esta entrada possui valor inicial um.

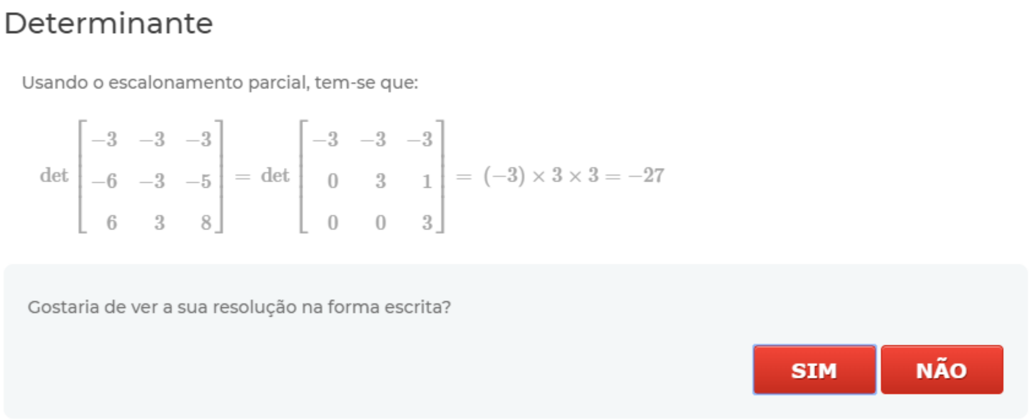
Figura 3.16 - Entradas em destaque

Figura 3.17 - Matriz triangular inferior e cálculo do determinante



Assim como foi realizado no processo de resolução de *sistemas* e *inversão de matrizes*, o aplicativo exibe a mensagem final parabenizando o usuário pela execução correta da atividade e disponibiliza a resolução na forma escrita (Figura 3.18).

Figura 3.18 - Cálculo do determinante



Diante do que foi exposto na seção 3.2, percebe-se a simplicidade em manejar este aplicativo e sua utilidade no processo de ensino e aprendizagem, podendo ainda proporcionar aulas dinâmicas e interativas. O aplicativo permite a generalização de cálculos para matrizes de ordens superiores a 3, facilitando a aprendizagem.

Destaca-se, também, que o *MatrixCalculator* oferece aos alunos a possibilidade de acesso não apenas ao resultado final dos problemas que envolvam o uso de *sistemas*, *matrizes* e *determinantes*, mas também que conheçam todo o processo resolutivo, tanto na forma interativa quanto na forma escrita. Dessa forma, o aplicativo proporciona aos alunos desenvolverem suas próprias estratégias para solução de problemas, uma vez que não restringe a uma única maneira de alcançar o resultado correto.

4 METODOLOGIA

4.1 CARACTERIZAÇÃO E SUJEITOS ENVOLVIDOS

A pesquisa foi realizada em duas turmas da segunda série do ensino médio, que foram denominadas **turma A** (matutino) e **turma B** (vespertino), com 38 alunos em cada turma, com faixa etária entre 15 e 17 anos, numa escola na cidade de Irecê-BA, durante o segundo semestre letivo de 2019. Em uma das turmas, o estudo foi feito de maneira tradicional, utilizando apenas o livro, caderno e exercícios no quadro. Na outra, os conteúdos foram transmitidos com uso do material didático, acrescentando o *MatrixCalculator* para auxiliar os cálculos e desenvolvimento dos conceitos.

A escolha da escola foi de suma importância, dado que a aplicação da proposta dependia de um laboratório de informática com acesso à internet. Nos deparamos, então com o primeiro problema, visto que as escolas da rede estadual de ensino na cidade, não possuem laboratórios de informática. Realizamos um levantamento nas turmas para verificar a quantidade de alunos que possuíam aparelhos celulares com acesso à internet e constatou-se que menos de 15% dos alunos da turma estavam nessa condição. Diante dessa dificuldade, optamos por uma escola de cunho filantrópico, localizada na mesma cidade e com a estrutura necessária para a realização das atividades.

Ao longo de todo o processo, mantivemos em mente os aspectos que caracterizam uma pesquisa científica, que pode ser classificada de acordo com as seguintes dimensões: *natureza* (qualitativa ou quantitativa), *finalidade* (básica ou aplicada), *tipo* (descritiva ou experimental), *estratégia* (local de coleta dos dados/fonte de informação), *temporalidade* (longitudinal ou transversal) e *delineamento* (levantamento, correlação, experimento ou quase-experimento) (APPOLINÁRIO, 2015).

Quanto à *natureza*, esta pesquisa é *qualitativa*, dado que foi possível interpretar os resultados de acordo com a coleta de dados, observações e interações com os colaboradores da mesma.

No que diz respeito à *finalidade*, tem-se uma pesquisa *aplicada,* uma vez que busca a utilização de estratégias (construção e utilização de um aplicativo) para suprir a carência do grupo (aprendizagem significativa). Além disto, é do *tipo experimental*, pois uma turma foi submetida a aulas tradicionais e a outra a aulas com a ferramenta tecnológica. Em seguida, ambas passaram por atividades comparativas para verificação da eficácia da proposta de ensino. A escolha por uma pesquisa do tipo experimental parte da possibilidade que essa forma de investigação oferta aos pesquisadores de serem mais ativos. De acordo com Gil (2002):

> A pesquisa experimental constitui o delineamento mais prestigiado nos meios científicos. Consiste essencialmente em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis capazes de influenciá-lo e definir as formas de controle e de observação dos efeitos que a variável produz no objeto. Trata-se, portanto, de uma pesquisa em que o pesquisador é um agente ativo, e não um observador passivo (GIL, 2002, p. 48).

Em relação à *estratégia*, os dados foram obtidos através da pesquisa de campo. Nesta coleta, buscou-se informações através de questionários comparativos e observações feitas durante a execução das atividades.

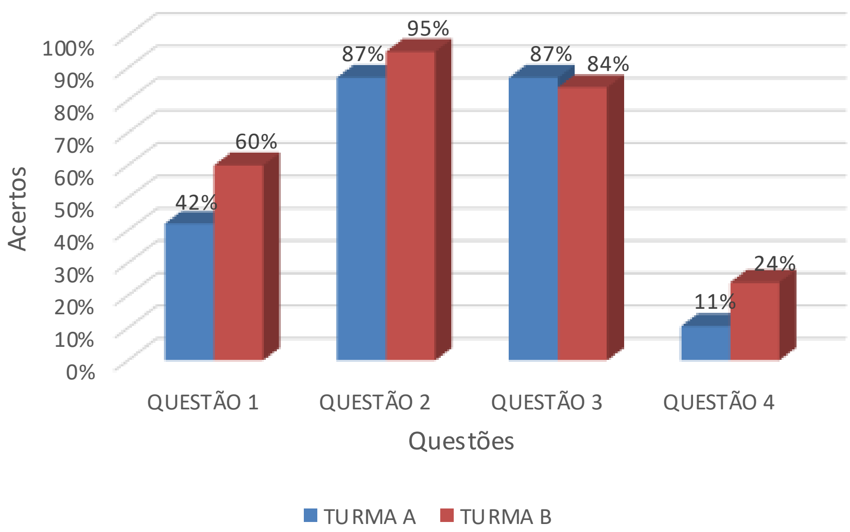
Pode-se classificar como longitudinal a *temporalidade* desta pesquisa, visto que o grupo de alunos foi submetido a atividades comparativas após o estudo de cada conteúdo. Por fim, o *delineamento*, se enquadra em um *experimento*. Sobre tais métodos, Appolinário (2015, p. 69) salienta que “os experimentos têm à característica de objetivar o estabelecimento das causas de um determinado fenômeno”.

4.2 DIAGNÓSTICO E NIVELAMENTO

A atividade diagnóstica destinou-se a contemplar o *descritor 34* exigido na prova Brasil para o 9º ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 2020): identificar um sistema de equações do primeiro grau que expressa um problema. Neste momento, os alunos recordaram situações vivenciadas nesta série e tiveram a oportunidade de construir problemas com *n* variáveis. Após esta revisão, foi aplicada a Atividade didática I (Apêndice B), na qual os estudantes tiveram uma aula para responder as questões que solicitavam a identificação do *sistema linear* correspondente ao problema descrito. Responderam individualmente e sem qualquer orientação do professor pesquisador. Os resultados encontram-se no próximo capítulo.

A primeira atividade realizada (Atividade I, Apêndice B) foi composta por 4 questões, sendo que as três primeiras continham problemas com duas variáveis e a última, com 3. Notou-se que, nas questões 1, 2 e 3, os alunos de ambas as turmas não apresentaram dificuldades de interpretação. Na questão 4, no entanto, apenas 11% dos alunos da **turma A** e 24%, da **turma B**, conseguiram transpor a situação descrita para a linguagem matemática, deixando claro, portanto, um déficit em problemas envolvendo mais variáveis (Gráfico 4.1).

Gráfico 4.1 - Desempenho das turmas na primeira atividade



As atividades didáticas II e III (Apêndice B), também foram aplicadas nas duas turmas pesquisadas, porém realizadas em grupo após a aula sobre *resolução de sistemas* de segunda e terceira ordens, respectivamente. Estas atividades tinham por objetivo verificar a aprendizagem e esclarecer as dúvidas surgidas, atentando para as dificuldades que os alunos apresentavam na resolução.

As principais dificuldades observadas foram:

- Interpretar o enunciado e transpor para a linguagem matemática.
- Identificar a operação correta entre as linhas da matriz para resolver corretamente o sistema.
- Dificuldade para efetuar cálculo com sinais e com frações.

Com a identificação dos problemas apresentados, iniciou-se a aplicação da Sequência didática (Apêndice A) e, por conter maior quantidade de alunos com notas abaixo da média, optamos por ministrar na **turma B** as aulas com auxílio do aplicativo.

4.3 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Definidos os conteúdos, a série e a escola, iniciou-se a aplicação da Sequência didática (Apêndice A), utilizando o **método de Gauss-Jordan,** para o estudo de resolução de *sistemas lineares*, seguido da *inversão de matrizes* e finalizando com o *cálculo de determinantes*. Este método foi escolhido, por ser o método utilizado no aplicativo e pela praticidade na resolução de problemas envolvendo matrizes de ordem qualquer. Esta sequência prevê 08 aulas para *resolução de sistemas*, 03 para *inversão de matrizes* e 03 para cálculo de *determinantes* (com 50 minutos cada aula).

Após o estudo de cada conteúdo em ambas as turmas, foi realizada uma atividade, contendo questões objetivas e discursivas, com o objetivo de comparar as estratégias utilizadas no ensino dos conteúdos.

Etapa: Sistemas Lineares

1ª Aula

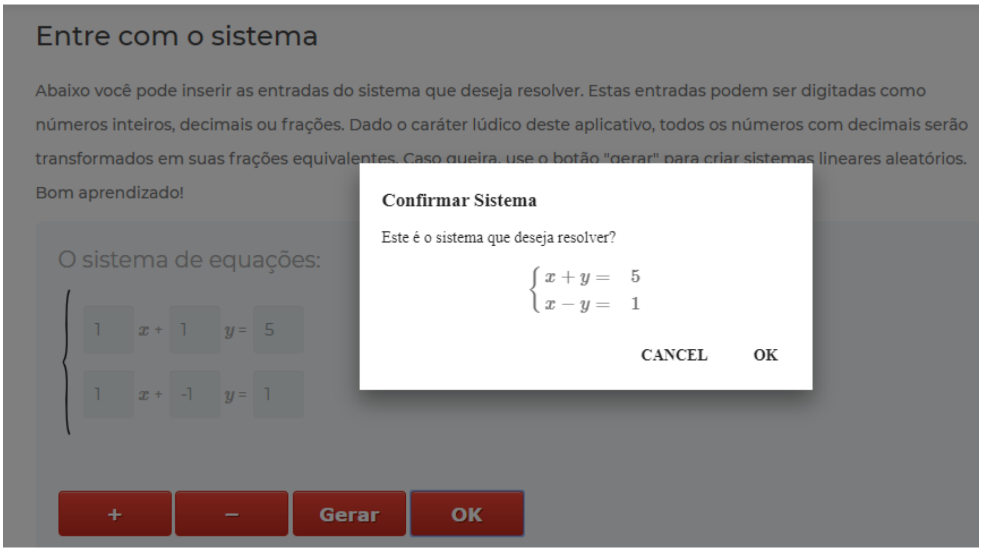
Nesta aula, os alunos foram direcionados ao laboratório de informática, para terem o primeiro contato com o aplicativo. Foi colocado o endereço eletrônico no quadro e cada aluno fez o acesso ao *MatrixCalculator.*

Após a apresentação do aplicativo, os estudantes puderam explorá-lo e começamos com a resolução do sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

Obviamente, a maioria dos alunos respondeu mentalmente. No entanto, foram incitados a resolvê-lo com o auxílio da ferramenta (Figura 4.1).

Figura 4.1 - Sistema linear a ser resolvido



A dificuldade apontada inicialmente ocorreu com a multiplicação de um número pelo seu inverso multiplicativo. Neste momento, percebeu-se a necessidade de revisar os conceitos de operações com frações, através de exemplos no quadro, de modo que os alunos compreendessem e pudessem dar prosseguimento com a resolução. Após esta revisão, foi possível concluir alguns exemplos utilizando o aplicativo. Assim, nota-se a importância de uma revisão mais detalhada destes conteúdos na fase de nivelamento.

Uma vez tendo sido determinada a solução do sistema, foi feita uma revisão sobre o significado geométrico deste resultado. Os alunos foram indagados sobre esta solução e a partir da construção gráfica, recordaram que a solução obtida correspondia ao ponto de intersecção entre duas retas, que são representadas algebricamente pelas equações do sistema linear dado. Foi um momento propício para a revisão da classificação de sistemas em possível determinado (SPD), sistema possível indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI) e respectivas representações no gráfico.

2ª Aula

Na segunda aula os alunos foram encaminhados ao laboratório de informática, para resolver e classificar sistemas lineares de segunda ordem, observando o comportamento das linhas da matriz dos coeficientes durante a resolução. Isto é, encontrando uma linha nula[2], o sistema é classificado como SPI e ao determinar uma linha impossível[3], sua classificação SI. Os estudantes acessaram o aplicativo sem dificuldade, digitaram os coeficientes do sistema proposto e iniciaram a resolução sem apresentar problemas para manusear o *software*. No entanto, ainda não conseguiam visualizar facilmente a operação necessária para atingir o objetivo da entrada alvo, ou seja, deixar os valores zero ou 1 de acordo com a posição ocupada na matriz. A presença do professor foi muito requisitada para auxiliá-los neste raciocínio e foram recorrentes perguntas do tipo "*qual o número que devo somar para encontrar zero*?", "*qual a operação necessária para encontrar tal número e o resultado ser igual a 1 um ou igual a zero*?", "*qual o número que devo somar*?".

As respostas que os alunos procuravam, eram retornadas por meio de perguntas que pudessem auxiliá-los no desenvolvimento do raciocínio. Por se tratar de uma turma com 38 alunos, procurou-se estimular a resolução em grupos, de forma que colaborassem uns com os outros na aprendizagem. Assim, foi possível verificar se os grupos estavam resolvendo corretamente.

Nesta aula, algo chamou a atenção: alguns alunos que possuíam dificuldades de aprendizagem em matemática, conseguiam visualizar e responder com mais agilidade do que aqueles considerados "bons" na disciplina, mostrando o quanto o uso da tecnologia estava colaborando para a aprendizagem dos discentes. Resolveram a Atividade 2 (Apêndice B) em grupos e percebeu-se que as principais dificuldades ainda eram operações com *números negativos* e com *frações*. Em contrapartida, o desempenho nesta atividade, já demonstrou avanços significativos na identificação das operações que deveriam ser realizadas entre as linhas da matriz.

3ª e 4ª Aulas

Continuando com a sequência didática, nas aulas 3 e 4, iniciou-se a resolução de sistemas de ordem 3. A turma facilmente percebeu que o procedimento era análogo ao realizado com sistemas de segunda ordem. É importante destacar que as maiores dificuldades apresentadas continuavam sendo na multiplicação pelo inverso, bem

---

[2] Linha nula: todos os elementos da linha são iguais a zero.
[3] Linha impossível: os termos correspondentes aos coeficientes iguais a zero e o termo independente diferente de zero

como nos cálculos com frações e números negativos. Disto, resultou mais um momento de revisão das operações com frações, incluindo números negativos, no qual os alunos trabalharam em grupos, buscando a resolução correta do sistema. Nestas aulas, resolveram sistemas SPD, SPI e SI. Na aplicação da terceira atividade (Apêndice B), observou-se alunos concentrados, resolvendo os desafios e procurando o auxílio do professor nos momentos de dúvidas. As atividades 2 e 3 foram realizadas em grupos e serviram para o professor esclarecer as dúvidas no método que estavam aprendendo.

5ª e 6ª Aulas

Nas aulas 5 e 6, os alunos foram desafiados a resolver sistemas de ordem superior a 3. Utilizando a tecla "*gerar*" do aplicativo, os discentes tinham a seu dispor a geração aleatória de sistemas de ordem até 10. Da mesma forma que aconteceu nas aulas anteriores, a turma foi organizada em grupos e assim resolviam os sistemas. Alguns alunos conseguiram resolver sistemas de ordem 5 e 6. Notou-se a redução das dificuldades com frações e mais de 50% dos estudantes, cerca de 20 alunos, tentavam responder os cálculos no caderno, também verificando a conformidade dos cálculos feitos manualmente no caderno e o resultado obtido no aplicativo.

7ª Aula

Planejou-se para a aula 7 a resolução de sistemas no quadro. A execução das atividades seguiu o roteiro: foi colocado um sistema linear no quadro e um aluno foi convidado a iniciar a resolução. Depois dele, outro aluno continuava a respondê-lo e assim sucessivamente até a conclusão da questão. De imediato percebeu-se que na **turma B** o envolvimento e participação foi maior do que entre os alunos da **turma A**.

8ª Aula

Foi destinada a resolução de exercícios contendo situações problemas e sistemas lineares com coeficientes fracionários. Assim, os exercícios deveriam ser interpretados e transformados em sistemas lineares com três equações e três incógnitas. Nestas questões, os alunos não apresentaram dificuldade para transcrever a situação para a linguagem matemática. No entanto, muitos não conseguiram chegar à resolução correta, devido a erros de sinal.

Foi gratificante visualizar o avanço dos alunos em relação à autonomia, desenvolvimento do raciocínio lógico e participação nas atividades propostas. Ao final desta etapa, responderam as cinco primeiras questões da Avaliação comparativa (Apêndice C).

Etapa: Inversão de Matrizes

1ª e 2ª Aulas

Iniciou-se o estudo utilizando a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Ao inserir a matriz no aplicativo, os alunos notaram a presença de uma matriz identidade à direita da matriz a ser resolvida e foi explicado o procedimento para determinação da matriz inversa. Como o raciocínio é análogo ao utilizado na resolução de sistemas lineares, os alunos não apresentaram dificuldades para a realização da atividade.

De acordo com a Sequência didática, exploramos mais alguns exemplos envolvendo matrizes de 2ª e 3ª ordens que admitiam inversa e, em seguida, foi colocado no quadro uma matriz que ao tentar invertê-la, obtêm-se uma linha nula. Neste momento, foi explicado que tratava-se de uma matriz que não admitia inversa. Após isto, os alunos foram estimulados a extrapolarem para matrizes de ordens superiores, utilizando a funcionalidade *“gerar”* do *MatrixCalculator.*

3ª Aula

Nesta aula, todos os alunos já estavam invertendo matrizes de ordens superiores a 5 (Figura 4.2). Utilizaram a tecla *“gerar”* para obtenção das matrizes e interagiram bastante, contribuindo para um clima propício à aprendizagem. As atividades foram realizadas em grupos e espontaneamente surgiu uma disputa para ver quem respondia primeiro e com ordens maiores. Ocorreram algumas dúvidas nas resoluções contendo soma e subtração de frações, muito embora os estudantes raramente tenham solicitado o auxílio da professora para esclarecê-las. Após o estudo, uma aula foi destinada para a resolução das 2 questões da Avaliação comparativa (Apêndice C).

Figura 4.2 - Inversão de matrizes de ordem 10

Etapa: Cálculo de Determinantes

O prosseguimento da pesquisa se deu com o estudo de *determinantes*. Como a turma já estava familiarizada com o aplicativo, em apenas 3 aulas o conteúdo foi explorado, tendo em vista que o método de resolução utilizado para o cálculo de *determinantes* se baseia também **no método de Gauss-Jordan**, levando a um escalonamento parcial em que se constrói uma matriz triangular superior e a partir do produto dos elementos de sua diagonal e o número de trocas de linhas ocorridas para ajuste do sinal, chega-se ao determinante da matriz em questão. A extrapolação para matrizes de ordens superiores também foi imediata e sem dificuldades (Figura 4.3). A aplicação das questões referentes a cálculo de *determinantes* da Avaliação comparativa foi realizada em seguida (Apêndice C).

Figura 4.3 - Cálculo de determinantes para matrizes de ordem 5.

1ª e 2ª Aulas

Como foi feito nos casos anteriores, o estudo dos *determinantes* iniciou-se explicando o procedimento para calcular o *determinante* de uma matriz. De acordo com a Sequência didática (Apêndice A), a partir de um sistema composto por duas equações e duas incógnitas, calculou-se o determinante da matriz correspondente. Em seguida, os alunos responderam atividades envolvendo determinantes de ordens superiores. Mostrou-se que, se um *determinante* for diferente de zero, o sistema equivalente será SPD e, se for igual a zero, o sistema será SPI (linha nula) ou SI (linha quase nula, isto é os termos correspondentes aos coeficientes das variáveis iguais a zero e o termo independente diferente de zero). Aproveitou-se o momento para relacionar estes resultados à inversão de matrizes, dado que ao obter-se determinante nulo, a matriz equivalente não admite inversa.

Os alunos ficaram entusiasmados com a relação entre os conteúdos, complementando assim sua aprendizagem. Ao resolverem as questões, já observavam os valores obtidos e verificavam a inversibilidade da matriz equivalente.

3ª Aula

Nesta aula foi feito o estudo das propriedades dos determinantes. Iniciamos a partir de questionamentos que colocados no quadro e perguntas feitas na primeira aula a respeito da tecla *“multiplicar”*[4] estar bloqueada neste conteúdo. Após a explicação sobre o motivo, foi apresentada a propriedade correspondente. Além disso, os alunos também perceberam que ao trocar linhas de posição, o valor era multiplicado por 1 ou -1. Respondendo às perguntas, as propriedades foram estudadas através de exemplos onde os alunos puderam utilizar o aplicativo e verificar os resultados obtidos. Após este momento, calcularam determinantes de ordem 10, sendo premiado o aluno que conseguiu responder primeiro.

4.4 ATIVIDADES COMPARATIVAS

A avaliação comparativa (Apêndice C) foi aplicada, em paralelo à Sequência didática, após o estudo de cada conteúdo, com o objetivo de comparar o desempenho das turmas pesquisadas. Foi composta por 10 questões, retiradas de livros da segunda série do ensino médio (GIOVANNI at al., 2017; SOUZA, GARCIA, 2016; PENA, 2018), distribuídas da seguinte forma: 5 questões sobre *sistemas lineares*, 2 questões sobre *inversão de matrizes* e 3 questões sobre cálculo de *determinantes*.

Os principais pontos analisados foram:

- Realização das operações entre as linhas das matrizes associadas aos sistemas lineares dados.
- Resolução de um sistema com coeficientes racionais.
- Classificação de um sistema linear.
- Cálculo da inversa de uma matriz.
- Cálculo de determinantes e utilização das propriedades estudadas.

4.5 OBSERVAÇÕES

Após o estudo dos conteúdos desta pesquisa, tem-se a sensação de dever cumprido. Depoimentos como “*professora, isso vicia*”, feitos por alunos que diziam não gostar de matemática e das observações realizadas durante o percurso, mostraram o quanto as aulas foram eficazes para a aprendizagem. Além disso, outros

---

[4] Ao multiplicar uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada A por um número real k, obtemos uma nova matriz B tal que det B = k det A (PAIVA, 2010).

discentes responderam questões em casa e as socializaram nas redes sociais, demonstrando o quanto estavam satisfeitos e empolgados com a utilização do aplicativo.

Notou-se o avanço considerável nas dificuldades elencadas durante a etapa de nivelamento, acerca dos conteúdos vistos no Ensino Fundamental.

De acordo com os objetivos desta pesquisa, após o estudo de cada conteúdo, os alunos de ambas as turmas seriam submetidos às atividades comparativas, para que fosse possível analisar a aplicabilidade do uso desta sequência didática no processo de ensino-aprendizagem.

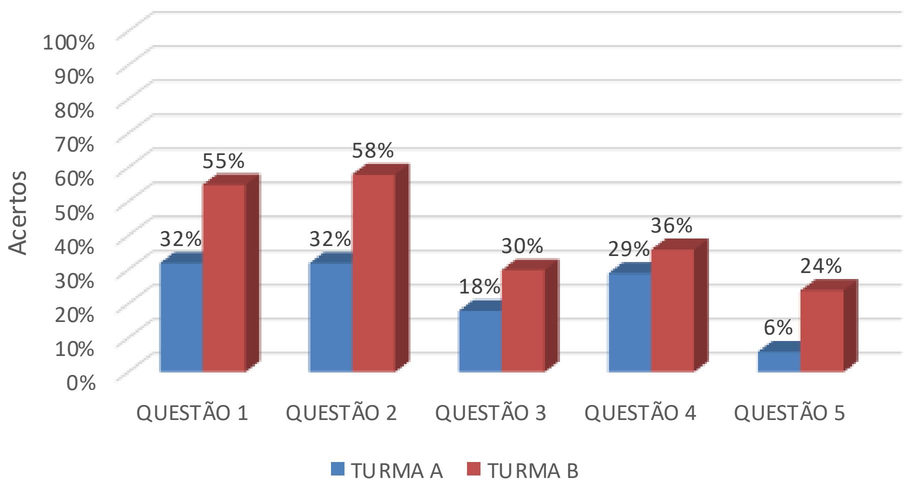
Os resultados das atividades realizadas serão apresentados no próximo capítulo, bem como a análise e as impressões dos alunos acerca do uso do aplicativo nas aulas de Matemática.

5 RESULTADOS

5.1 SISTEMAS LINEARES

Os resultados obtidos, conforme o Gráfico 5.1, revelaram que a turma que utilizou o aplicativo (**turma B**) apresentou resultado superior à turma que utilizou apenas os métodos tradicionais (**turma A**) em todas as questões, mostrando o quanto o uso do aplicativo melhorou o desempenho da turma que, antes desta pesquisa, mostrava-se desmotivada e com um número elevado de alunos abaixo da média para aprovação.

Gráfico 5.1 - Desempenho das turmas na atividade comparativa – Sistemas Lineares



Observando o gráfico, percebe-se que as questões 1 e 2 obtiveram um percentual de acertos consideravelmente superior às outras questões. Estas, tratavam de problemas nos quais o aluno deveria escrever o sistema linear correspondente. Notou-se que, na turma que fez uso do aplicativo *MatrixCalculator*, a interpretação e identificação das operações necessárias para a resolução correta foi superior à turma que utilizou apenas os métodos tradicionais.

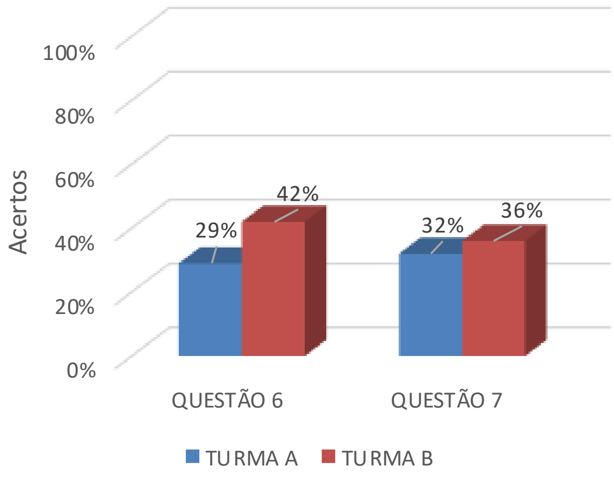
Com relação a questão 2, todos os alunos escreveram corretamente o *sistema linear*. Onze alunos da **turma A** e dezenove alunos da **turma B**, responderam corretamente o sistema. Notou-se, também, que o aplicativo colaborou para que os alunos melhorassem na identificação da operação entre as linhas corretamente, fato que não aconteceu com a **turma A**.

As turmas apresentaram um desempenho muito abaixo nas questões 3 e 5. Estas questões tratavam de *sistemas lineares* cujos coeficientes eram decimais e fracionários, evidenciando um problema relativo aos números fracionários e não propriamente aos *sistemas*. Na questão 5, apenas dois alunos da **turma A** acertaram a questão, enquanto na **turma B**, oito alunos efetuaram corretamente. Isso expõe o déficit que os alunos trazem nestes conteúdos.

Na questão 4, os alunos deveriam resolver o *sistema linear* proposto e classifica-lo em SPD, SPI ou SI. Verificou-se que sete alunos na **turma A**, enquanto onze na **turma B** responderam o sistema corretamente, porém não atentaram para a classificação de acordo as linhas, ou seja, no caso de linha nula, o sistema é possível indeterminado e linha quase nula, o sistema é classificado como impossível.

5.2 INVERSÃO DE MATRIZES

Gráfico 5.2 - Desempenho das turmas na atividade comparativa – Inversão de Matrizes



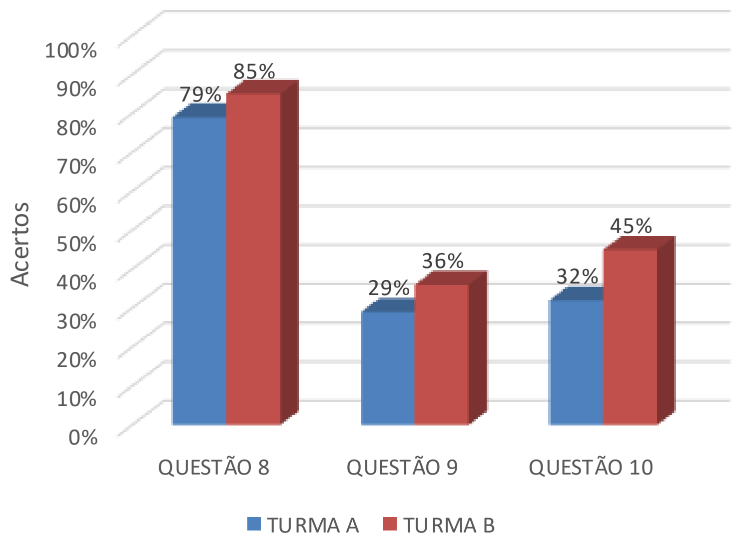
Nas questões 6 e 7, sobre *inversão de matrizes*, apesar de um número baixo de acertos, a **turma B** obteve um desempenho superior à **turma A** (Gráfico 5.2).

A questão 6 solicitava que o aluno verificasse se a matriz admitia ou não inversa. Nesta questão, após as operações entre linhas, chegava-se a uma linha nula, indicando que a matriz não admitia inversa. Nota-se que 42% dos alunos da **turma B** resolveram corretamente, enquanto na **turma A** apenas 29%.

Na sétima questão, através das operações entre linhas, observou-se que 12 alunos da **turma A** e 15 alunos da **turma B** executaram as operações corretas para determinar a inversa da matriz solicitada. A **turma B** mostrou um conhecimento maior na identificação das operações.

5.3 DETERMINANTES

Gráfico 5.3 - Desempenho das turmas na atividade comparativa – Determinantes



De acordo com o gráfico 5.3, a oitava questão apresentou o maior número de acertos nas duas turmas, correspondente a 30 alunos da **turma A** e 35 alunos da **turma B.** Executando apenas a operação $L3 \rightarrow L3 - 2L1$, chegava-se à terceira linha com todos os elementos iguais a zero, obtendo o *determinante* da matriz, através da multiplicação dos elementos da diagonal principal.

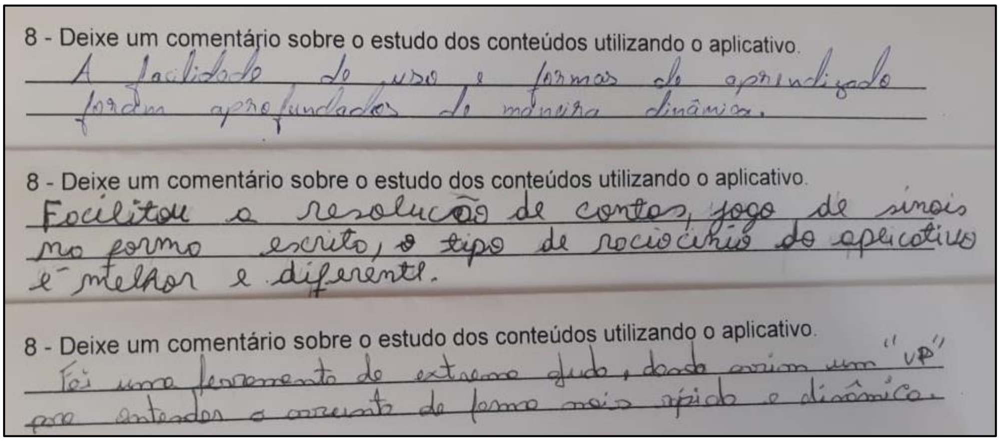
A questão 9 relacionava conhecimentos de *sistemas lineares* e *determinantes*. Notou-se que dos alunos que acertaram, 5 alunos na **turma A** e 7 alunos na **turma B**, responderam por meio da resolução do sistema, sem fazer qualquer relação com determinantes, obtendo um sistema possível indeterminado e os demais alunos que acertaram, isto é, 5 alunos em cada turma, optaram pela resolução por meio do cálculo do determinante da matriz dos coeficientes associado ao sistema. Esta questão demonstrou a relação entre os conteúdos estudados e alternativas para sua resolução, objetivo proposto na pesquisa e contemplado na Sequência didática.

A questão 10 tratou do cálculo de *determinante* de uma matriz de ordem 4. Os estudantes da **turma B** mostraram que o uso do *MatrixCalculator* auxiliou a aprendizagem dos mesmos, pois apenas 3 alunos deixaram a questão sem tentativas de resolução, ao contrário da **turma A**, que foram 12 alunos. Além disso, nota-se que 45% do número de alunos da **turma B** acertaram a questão, enquanto na **turma A**, o percentual de acertos correspondeu a 32%.

5.4 IMPRESSÕES GERAIS

Após a aplicação da Atividade comparativa (Apêndice C), os alunos da **turma B** responderam a Atividade avaliativa (Apêndice D), a fim de registrar as impressões e contribuições que o aplicativo proporcionou para a aprendizagem. Nesta avaliação, foram unânimes ao afirmar que o programa auxiliou na aprendizagem e as aulas de matemática no laboratório de informática foram estimulantes (Figura 5.1).

Figura 5.1 - Impressões dos alunos sobre o uso do aplicativo



8 - Deixe um comentário sobre o estudo dos conteúdos utilizando o aplicativo.

A facilidade do uso e formas de aprendizado foram aprofundados de maneira dinâmica.

8 - Deixe um comentário sobre o estudo dos conteúdos utilizando o aplicativo.

Facilitou a resolução de contas, jogo de sinais na forma escrita, o tipo de raciocínio do aplicativo é melhor e diferente.

8 - Deixe um comentário sobre o estudo dos conteúdos utilizando o aplicativo.

Foi uma ferramenta de extrema ajuda, dando assim um "UP" para entender o conteúdo de forma mais rápida e dinâmica.

Destacaram ainda a compreensão dos conteúdos, a visualização do que deve ser feito a partir do que é realizado em cada etapa do processo, orientando o usuário para o próximo passo e a agilidade para a resolução de sistemas lineares, inversão de matrizes e determinantes de ordens superiores.

6 CONCLUSÕES

As dificuldades para a promoção da aprendizagem em matemática no Brasil têm sido demonstradas nas avaliações em larga escala (BRASIL,2019). A procura por estratégias didáticas que possibilitem maior motivação para aprender a matemática é desejável e necessária para o contexto educacional. Tendo isso como orientação, a investigação realizada nesse estudo, buscou construir e avaliar uma sequência didática destinada ao ensino de *sistemas lineares*, *inversão de matrizes* e *cálculo de determinantes* para a 2ª série do ensino médio, por meio de um aplicativo *online*, construído especificamente para este fim.

A importância na diversificação de métodos no ensino pôde ser observada nos primeiros momentos de trabalho, uma vez que na aplicação da sequência didática, alunos que antes apresentavam dificuldades em matemática, demonstraram facilidade no uso da ferramenta e, em muitas situações, auxiliaram os colegas na identificação das operações necessárias para a resolução de atividades propostas. Uma maior inclusão e participação mais ativa desses estudantes, beneficiou a aprendizagem e auxiliou no desejo em aprender o componente curricular.

A avaliação da potencialidade desse aplicativo para os propósitos já mencionados foi realizada através da comparação dos resultados obtidos na aplicação das Atividades comparativas (Apêndice C) aplicadas nas duas turmas.

Os gráficos apresentados no capítulo anterior (Gráfico 5.1, Gráfico 5.2 e Gráfico 5.3), evidenciam que, em todas as questões propostas, para os três conteúdos analisados, a **turma B** obteve melhor desempenho. O número de acertos, por questão, dos alunos da **turma B**, chegou a ser, em porcentagem, até 4 vezes maior do que os alunos da **turma A**, no caso específico da questão de número 5, como mostra o gráfico 5.1. É possível concluir, portanto, que o uso do *MatrixCalculator* contribuiu de forma significativa para aprendizagem dos alunos, tornando-a mais eficaz.

A percepção de que o aplicativo funciona como estimulante e facilitador da aprendizagem, também pôde ser observada nos depoimentos dos alunos. Expressões como "*ajuda a aprender*", "*melhora a visualização*" e "*facilita o aprendizado*", corroboram o entendimento de que o *MatrixCalculator* é um caminho possível para a melhoria do ensino de matemática. Após a pesquisa efetuada, uma das hipóteses que verifico é que a sua utilização proporcionou aulas mais dinâmicas e participativas em relação às aulas aplicadas na forma tradicional. Uma vez que, ao utilizar a tecnologia, os alunos se apresentaram mais concentrados e as atividades proporcionaram o desenvolvimento do raciocínio lógico e o espírito investigativo, permitindo a extrapolação dos conteúdos e aguçando a curiosidade na resolução dos exercícios propostos. Alguns estudantes relataram ainda, o quanto esse aplicativo “vicia” (Figuras 5.1), atraindo e permitindo um longo período de concentração no desenvolvimento das atividades.

A investigação realizada, mostrou que o potencial do *MatrixCalculator* está diretamente relacionado às mudanças que essa ferramenta possibilita para a prática docente. Permitiu a melhora na qualidade das aulas, proporcionando um ambiente enriquecedor, propício à aprendizagem significativa, despertando a autonomia e a proatividade nos discentes, sem a necessidade de memorização de fórmulas ou métodos cansativos.

Como projetos futuros, pretendo utilizar o aplicativo nas próximas turmas de 2ª série, no estudo de sistemas lineares em conjunto com o software *Geogebra*, através dos quais os alunos poderão, além de resolver o sistema, visualizar geometricamente sua solução como forma de auxiliar a interpretação. Além disso, como professora, planejo aprofundar meus conhecimentos em relação ao uso da tecnologia em sala de aula, aprendendo a manusear outros aplicativos, que venham a transformar as aulas em momentos agradáveis, interativos e diversificados, despertando o interesse do aluno em estudar e aprender matemática.

REFERÊNCIAS

APPOLINÁRIO, Fábio. **Metodologia da Ciência: Filosofia e Prática da Pesquisa**. 2ª ed.; São Paulo: Cengage Learning, 2015.

ARAÚJO, Edson Leite. **MatrixCalculation**. Acessado em <http://www.univasf.edu.br/~edson.araujo/Research/matrixcalculator/index.html>, 2019.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Várias faces da Matemática: Tópicos para licenciatura e leitura Geral**. 2 ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BAHIA. Secretaria da Educação do Estado da Bahia. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**; Área: Matemática. Superintendência de políticas para a Educação Básica. 2015.

BATISTA, I.; LUCCAS, S. **Abordagem histórico-filosófica e Educação Matemática – uma proposta de interação entre domínios de conhecimento**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.6, n.1, p.101 – 133, 2004.

BLASIS, Eloísa de.; FALSARELLA, Ana Maria.; ALAVARSE Ocimar Munhoz. **Avaliação e Aprendizagem: Avaliações externas: perspectivas para a ação pedagógica e a gestão do ensino** – São Paulo: CENPEC: Fundação Itaú Social, 48p. 2013

BOLDRINI, José Luiz at al. **Álgebra Linear**. 3ª ed.; São Paulo: Editora HARBRA, 1996.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. 3 ed.; 4 reimpressão - São Paulo: Blucher, 2018.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 5 ed.; 3. Reip. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, SEB, 2017.

______. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Fundação Santillana. **Brasil no PISA 2015. Análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros**. 2016. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf> Acesso em: 01 set. 2018.

______. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Matrizes de Referências de língua portuguesa e matemática do SAEB: documento de referência do ano de 2001**. Brasília, DF: INEP, 2020. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb/matrizes-e-escalas> Acesso em: 20 jun. 2020.

______. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Relatório Brasil no PISA 2018 –** Versão Preliminar. 2019. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf> Acesso em: 14 jan. 2020.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**; volume 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC,SEB, 2008.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília: MEC/Semtec, 1999.

______. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais anísio Teixeira**. Resultado do índice de Desenvolvimento da Educação – IDEB 2017**. 2018. Disponível em < http://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/planilhas_para_download/2017/IDEB2017_APRESENTACAO_final.pdf> Acesso: 01 set. 2018.

COUTINHO JUNIOR, Francisco Raimundo**. Volumes de Sólidos Geométricos: Uma proposta de ensino com o auxílio do software Geogebra**, 2018. 130f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF. Juazeiro, BA, 2018. Disponível em <http://portais.univasf.edu.br/profmat/francisco_raimundo_coutinho_junior_turma_2016.pdf> Acesso: 15 set. 2019.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 1 ed.; São Paulo: Ática, 2010.

EL-HANI, C. N.; GRECA, I. **Com Pratica: A Virtual Community of Practice for Promoting Biology Teachers Professional Development in Brazil.** RESEARCH IN SCIENCE EDUCATION, v. 43, p. 1327-1359, 2013.

EL-HANI, C. N.; GRECA, I. **Participação em uma Comunidade Virtual de Prática Desenhada como Meio de Diminuir a Lacuna Pesquisa-Prática na Educação em Biologia. Ciência e Educação** (UNESP. Impresso), v. 17, p. 579-601, 2011.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**; tradução: Higino H. Domingues; Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FONSECA, Rafael Almeida. **Uso dos princípios básicos de programação como alternativa para o ensino de sistemas lineares e matrizes no ensino médio**. 2017. 100f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica, RJ, 2017. Disponível em <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150510751> Acesso: 21 agosto 2019.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4ª ed.; São Paulo: Atlas, 2002.

GIOVANNI, José Ruy at al. **360º Matemática completa, 2**. 1 ed. São Paulo: FTD, 2017.

GIOVANNI, José Ruy at al. **360º Matemática completa, caderno de atividades: ENEM e vestibular, volume 2**. 1 ed. São Paulo: FTD, 2017.

LARA, Isabel Cristina Machado de. **Jogando com a Matemática**. 1 ed. São Paulo: Rêspel, 2003.

LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. **Álgebra Linear**. 4ª ed.; Coleção Shaum. Porto Alegre: Bookman, 2011.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 9ª ed.; Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. 3ª ed.; Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

MORAN, José Manuel; MASSETTO, Marcos T.; LU BEHRENS, Maria Aparecida. **Novas tecnologias e mediações pedagógicas.** Campinas, SP. Papirus, 2012.

MOREIRA, M.A. **O professor-pesquisador como instrumento de melhoria do ensino de ciências.** Em Aberto, n. 40. out./dez.,p. 42-54. 1988.

O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E.F. **Matrices and determinants**. Arquivo de História da Matemática MacTutor. 1996. Disponível em <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants/> Acesso: 23 mar. 2020.

PENA, Marcelo. **Pré-Universitario anual: Matemática e Ciências da Natureza**, turbo 6.0., livro II. Fortaleza: Moderna; Sistema Farias Brito de Ensino (SFB), 2018.

PERCEVAL, Valéria Oliveira. **Conteúdos de álgebra Linear: Metanálise de Pesquisas na área de Educação Matemática.** 2017. 35f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal do Pampa, Campus Caçapava do Sul, 2017. Disponível em <http://cursos.unipampa.edu.br/cursos/cienciasexatas/files/2018/01/tcc_valeriaoliveiraperceval.pdf> Acesso:13 out. 2019.

PONTE, João Pedro da. BROCARDO, Joana. OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 3ª ed. rev. ampl.; 2 reimp.. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

RONSANI, Izabel Luvison. **Informática na educação: uma análise do PROINFO**. UnC. HISTEDBR On-line, Campinas, n.19, 2005. Disponível em < http://www.histedbr.fae. unicamp.br /Art8_ 16.pdf> Acesso: 16 set 2019.

SCHWARTZMAN, Simon. BROCK, Colin. **Os desafios da educação no Brasil**. editores. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2005. Disponível em: <http://www.schwartzman.org.br/simon/desafios/Sumario.html> Acesso: 25 fev. 2020.

SEPULVEDA, Claudia; SARMENTO, A.C. de H. ; GUIMARAES, A. P. M. ; MUNIZ, C. R. R. ; ALMEIDA, C.A ; El HANI, Charbel Niño . **A prática social de pesquisa colaborativa e a controvérsia sobre estatuto epistemológico da pesquisa docente**. In: Claudia Sepulveda; Mariangela Almeida. (Org.). Pesquisa colaborativa e inovações educacionais em Ensino de Ciências. 1ed.Feira de Santana: UEFS Editora, 2016, v. 1, p. 49-95.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. # **Contato Matemática**, 2º ano. 1 ed.; São Paulo: FTD, 2016.

TAPSCOOT, Don. **A Hora da Geração Digital**: **Como os jovens que cresceram usando a internet estão mudando tudo das empresas aos governos.** 1 ed.; Rio de Janeiro: Agir Negócios, 2010.

WOLF, M.M. **Social validity: the case for subjective measurement or How appliedbehavior analysis is fiding its heart.** Journal of Applied Behaviour Analysis, v. 11, n. 2, 1978, pp. 203-214.

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

COMPONENTE CURRICULAR: Matemática

ANO/SÉRIE: 2ª Série EM

TEMPO ESTIMADO: 14 aulas (com 50 minutos cada aula), distribuídas da seguinte forma: 08 aulas para sistemas lineares, 03 aulas para o estudo de inversão de matrizes e 03 aulas para o cálculo de determinantes.

CONTEÚDOS: Sistemas Lineares, Inversão de Matrizes e Cálculo de Determinantes.

RECURSOS DIDÁTICOS: Computadores com acesso à internet, aparelho de projeção de imagens, material didático do aluno.

SISTEMAS LINEARES

AULA 1

OBJETIVO: Resolver um sistema linear de segunda ordem por meio do método de Gauss-Jordan.

Nesta aula, encaminharmos os alunos ao laboratório de informática para terem o primeiro contato com o aplicativo, cujo endereço é http://www.univasf.edu.br/~edson.araujo/Research/matrixcalculator/index.html. Com o uso do retroprojetor, apresentar as teclas e suas respectivas funções (solicitar que os alunos cliquem nas teclas apresentadas para que possam se familiarizar com cada uma). Após este momento, explicar detalhadamente o método de Gauss-Jordan para determinar a solução de um sistema linear através do exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Estimular o cálculo mental para a resposta e, posteriormente, resolver o sistema por meio do aplicativo. Os alunos farão a resolução com o professor (acompanhando todos os passos que serão projetados no aparelho). Após a resolução, interpretar geometricamente, no plano cartesiano, o que a solução do sistema linear significa. Ou seja, um sistema é possível e determinado (SPD) quando possui uma única solução e sua representação gráfica tem-se duas retas concorrentes, cujo ponto de intersecção entre as retas é a solução do sistema. Quando o sistema possui infinitas soluções, tem-se um sistema possível e indeterminado (SPI) e, geometricamente, obtém-se duas retas paralelas coincidentes e, no caso de um sistema impossível (SI), as retas serão paralelas distintas.

AULA 2

OBJETIVO: Classificar um sistema linear em SPD, SPI ou SI.

Os alunos resolverão os sistemas abaixo e deverão classificá-los de acordo com o número de soluções (SPD, SPI ou SI), utilizando o aplicativo *MatrixCalculator*.

a) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$ (SPD)

b) $\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ (SPD)

c) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x - 8y = 7 \end{cases}$ (SI)

d) $\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 4x + 8y = 4 \end{cases}$ (SPI)

Observação: o professor deve circular pela sala de aula, observando a resolução dos alunos para esclarecimento das dúvidas e dificuldades que surgirem na resolução dos sistemas. Além de orientar os alunos ao que ocorre com as linhas durante o processo de resolução. Ou seja, linha nula: sistema SPI e linha quase nula, sistema impossível: SI. Incentivar a resolução por meio de grupos ou duplas produtivas, de modo que possam socializar o raciocínio e a resolução da atividade.

Após a resolução dos sistemas, os alunos responderão a Atividade II (Apêndice B).

AULAS 3 e 4

OBJETIVO: Resolver um sistema linear de terceira ordem, utilizando o método de Gauss-Jordan.

Nesta aula, os alunos irão resolver sistemas lineares de terceira ordem, a partir dos exemplos a seguir:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 5y - 5z = 7 \\ 3x + 7y - 6z = 12 \end{cases}$ (SPD)

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 8y - 2z = 7 \\ 4x + 10y - 3z = 9 \end{cases}$ (SI)

c) $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 3x + 4y + 8z = 11 \\ 5x + 6y + 14z = 15 \end{cases}$ (SPI)

Após a resolução de cada sistema deverão classificar de acordo com o número de soluções (SPD, SPI ou SI). Durante a atividade, o professor estará atento às dificuldades dos alunos, buscando sanar as dúvidas que impeçam a resolução correta da mesma.

Ao concluir a resolução dos sistemas propostos, os alunos responderão a Atividade III (Apêndice B), para colocar em prática os conhecimentos adquiridos e identificar as dúvidas sobre o método de Gauss-Jordan.

AULAS 5 e 6

OBJETIVO: Resolver sistemas lineares de ordem superior a 3 utilizando a tecla “gerar” do aplicativo.

Os alunos irão explorar a tecla “gerar” para determinar o sistema linear que será resolvido. Nesta aula, os alunos deverão resolver sistemas lineares com ordem superior a 3.

AULA 7

OBJETIVO: Utilizar os conceitos estudados com o uso do aplicativo na resolução de um sistema linear.

Iniciar a aula colocando o seguinte sistema linear no quadro:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 14 \end{cases}$$

A resolução da atividade acontecerá da seguinte forma:

- Um aluno será convidado para iniciar a resolução. Este aluno fará os cálculos relacionados a apenas uma linha e explicará aos colegas o raciocínio utilizado para a execução correta.
- Outro aluno continuará a resolução e assim sucessivamente até a conclusão da questão.

Será um momento propício para incentivar a participação dos alunos e socializar seus cálculos com os demais colegas de classe.

AULA 8

OBJETIVO: Resolver questões contextuais que recaem em sistemas lineares de segunda e terceira ordens.

Nesta aula os alunos resolverão as seguintes atividades (Livro didático) no laboratório da informática:

P. 261 (questão 22)

1 - Para uma partida de futebol, foram colocados à venda 3 tipos de ingresso:

- Para o setor verde, o preço era R$12,00;
- Para o setor azul, o preço era R$ 18,00;
- Para o setor branco, o preço era R$ 25,00.

Sabendo que a renda total da partida foi R$ 620 000,00 para 38000 pagantes e que o número de ingressos vendidos para o setor verde foi o dobro do número de ingressos para o setor azul, determine o número de ingressos vendidos para cada setor.

P. 261 (questão 23)

2 - Catarina, Felipe e Neusa foram a um supermercado e compraram arroz, feijão e açúcar das mesmas marcas. Catarina gastou R$ 9,20 na compra de 2 kg de arroz,3 kg de feijão e 1 kg de açúcar; Felipe gastou R$ 15,20 na compra de 4kg de arroz, 2 kg de feijão e 6 kg de açúcar. Neusa que comprou 1kg de arroz,1 kg de açúcar e 1 kg de feijão gastou quanto?

P. 299 (questão 94)

3 - (FUVEST - SP) Um caminhão transporta maçãs, peras e laranjas, num total de 10.000 frutas. As frutas estão condicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, peras e laranjas tem, respectivamente, 50 maçãs, 60 peras e 100 laranjas e custa, respectivamente, 20, 40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas e custa 3.300 reais, calcule quantas maçãs, peras e laranjas estão sendo transportadas.

4 - Determine o conjunto solução dos sistemas lineares:

a) $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}3y = 3{,}5 \\ 0{,}3x + 0{,}5y = 5{,}7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ -2x - y + \frac{z}{2} = -3 \\ 5x + 3y + z = 9 \end{cases}$

INVERSÃO DE MATRIZES

AULAS 1 e 2

OBJETIVO: Determinar a inversa de uma matriz.

Solicitar aos alunos que, ao acessar o aplicativo, escolham a opção "matrizes" e digitem a seguinte matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ para determinar a inversa. Este exemplo será feito pela professora, explicando aos alunos o procedimento para a obtenção da inversa utilizando o projetor de imagens.

Mostrar aos alunos o passo a passo da resolução da atividade que o aplicativo apresenta no final de cada resolução.

Em seguida, os alunos determinarão a inversa das seguintes matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

Os dois primeiros exemplos tratam de matrizes que admitem inversa, porém o terceiro exemplo a matriz dada não é invertível.

Após este momento, os alunos utilizarão a tecla "gerar" para determinar a inversão de matrizes de ordens superiores a 3.

AULA 3

OBJETIVO: Determinar a inversa de uma matriz.

Nesta aula os alunos utilizarão a tecla "gerar" para determinar a inversa de matrizes. Os alunos deverão calcular a inversa de matrizes de ordem 5 até a ordem 10 e verificar o passo a passo destas resoluções.

DETERMINANTES

AULAS 1 e 2

OBJETIVO: Calcular determinantes utilizando o método de Gauss-Jordan.

Utilizaremos o sistema abaixo com duas equações e duas incógnitas para calcular o determinante da matriz dos coeficientes.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Solicitar aos alunos que, ao acessar o aplicativo, escolham a opção "determinantes" e digitem os coeficientes do sistema. Este exemplo será feito pela professora, explicando aos alunos o procedimento para efetuar o cálculo utilizando o projetor de imagens.

Mostraremos que, se um determinante for diferente de zero, o sistema será SPD e, se o determinante for igual a zero, o sistema será SPI ou SI e para identificar qual dos casos o sistema se refere, deverá resolver o sistema (método estudo nas primeiras aulas desta sequência).

Em seguida, os alunos calcularão os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Fazer a retomada do exemplo $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, cuja matriz não admite inversa e solicitar que calculem o determinante da mesma (os alunos encontrarão resultado igual a zero). O professor deve conduzir a explicação de modo que o aluno conclua que se o determinante da matriz for igual a zero, a matriz não admite inversa.

AULA 3

OBJETIVO: Estudar as propriedades dos determinantes.

Nesta aula o professor deverá conduzir o estudo das propriedades dos determinantes a partir dos seguintes questionamentos:

- O que acontece com o determinante ao multiplicar uma linha por um escalar?
- Qual o valor do determinante ao efetuar uma troca de linhas.
- Qual o valor do determinante quando se obtém uma linha nula ou quase nula?
- Qual o valor do determinante quando uma fila é múltipla de outra fila?

O professor deverá colocar exemplos de matrizes para que o aluno resolva utilizando o aplicativo e conclua as propriedades de determinantes nas atividades.

APÊNDICE B – ATIVIDADES DIDÁTICAS

ATIVIDADE I

Este questionário é referente à atividade desenvolvida sobre resolução de sistemas lineares utilizando o método do escalonamento. Sua finalidade é coletar dados para a elaboração de uma dissertação de mestrado da discente Cristiane Martins Fernandes Tavares, mestranda na Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF), Campus Juazeiro – BA.

QUESTÕES

Identifique o sistema que representa cada situação abaixo e determine sua solução.

1 - (Prova Brasil). Um teste é composto por 20 questões classificadas em verdadeiras ou falsas. O número de questões verdadeiras supera o número de questões falsas em 4 unidades.

Sendo x o número de questões verdadeiras e y o número de questões falsas, o sistema associado a esse problema é:

a) $\begin{cases} x - y = 20 \\ x = 4 - y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 20 \\ y = 4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x = 4y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 4 \end{cases}$

2 - (Saresp – SP). Na promoção de uma loja, uma calça e uma camisa custam juntas R$ 55,00. Comprei 3 calças e 2 camisetas e paguei o total de R$ 140,00.

O sistema de equações do 1º grau que melhor traduz o problema é:

a) $\begin{cases} x + y = 55 \\ 3x + 2y = 140 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 140 \\ 3x + 2y = 55 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 55 \\ x + y = 140 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 55x + 140y = 3 \\ 3x - 2y = 55 \end{cases}$

3 - (Projeto con(seguir) - DC). Carlinhos organizou uma festa junina e vendeu 200 ingressos. Ele arrecadou R$ 900,00 sendo, R$ 5,00 o preço do ingresso para adulto e, R$ 3,00, para criança.

Qual o sistema que representa esse problema?

a) $\begin{cases} x + y = 200 \\ 5x + 3y = 900 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ x + y = 200 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5y + 3x = 200 \\ x + y = 900 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3y = 5x + 200 \\ x + y = 900 \end{cases}$

4 - (Unicamp 2012) As companhias aéreas costumam estabelecer um limite de peso para a bagagem de cada passageiro, cobrando uma taxa por quilograma de excesso de peso. Quando dois passageiros compartilham a bagagem, seus limites são considerados em conjunto. Em um determinado voo, tanto um casal como um senhor que viajava sozinho transportaram 60 kg de bagagem e foram obrigados a pagar pelo excesso de peso. O valor que o senhor pagou correspondeu a 3,5 vezes o valor pago pelo casal.

Para determinar o peso excedente das bagagens do casal (x) e do senhor que viajava sozinho (y), bem como o limite de peso que um passageiro pode transportar sem pagar qualquer taxa (z), pode-se resolver o seguinte sistema linear:

a) $\begin{cases} x + 2z = 60 \\ y + z = 60 \\ 3{,}5x - y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + z = 60 \\ y + 2z = 60 \\ 3{,}5x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2z = 60 \\ y + z = 60 \\ 3{,}5x + y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + z = 60 \\ y + 2z = 60 \\ 3{,}5x + y = 0 \end{cases}$

ATIVIDADE II

Este questionário é referente à atividade desenvolvida sobre resolução de sistemas lineares utilizando o método do escalonamento. Sua finalidade é coletar dados para a elaboração de uma dissertação de mestrado da discente Cristiane Martins Fernandes Tavares, mestranda na Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF), Campus Juazeiro – BA.

QUESTÃO

Fonte: https://blogdoenem.com.br/sistemas-lineares-matematica-enem/

Acesso em: 13/08/2019

1 - (Unisinos 2012) Numa loja, todas as calças têm o mesmo preço, e as camisas também, sendo o preço de uma calça diferente do de uma camisa. Ricardo comprou 1 calça e 2 camisas e pagou R$240,00. Roberto comprou 2 calças e 3 camisas e pagou R$405,00. Qual o preço, em reais, de uma calça e uma camisa, respectivamente?

a) 70 e 95.
b) 75 e 90.
c) 80 e 85.
d) 85 e 80.
e) 90 e 75.

ATIVIDADE III

Este questionário é referente à atividade desenvolvida sobre resolução de sistemas lineares utilizando o método do escalonamento. Sua finalidade é coletar dados para a elaboração de uma dissertação de mestrado da discente Cristiane Martins Fernandes Tavares, mestranda na Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF), Campus Juazeiro – BA.

QUESTÃO

Fonte: https://blogdoenem.com.br/sistemas-lineares-matematica-enem/

Acesso em: 13/08/2019

(G1 – IFPE 2012) Com a proximidade do final do ano, uma papelaria quis antecipar as promoções de material didático para o ano letivo de 2012. Foram colocados em promoção caneta, caderno e lápis. As três ofertas eram:

1ª) 5 canetas, 4 cadernos e 10 lápis por R$ 62,00;

2ª) 3 canetas, 5 cadernos e 3 lápis por R$ 66,00;

3ª) 2 canetas, 3 cadernos e 7 lápis por R$ 44,00.

Para comparar os preços unitários dessa papelaria com outras do comércio, o Sr. Ricardo calculou os preços de uma caneta, um caderno e um lápis. A soma desses preços é:

a) R$ 20,00

b) R$ 18,00

c) R$ 16,00

d) R$ 14,00

e) R$ 12,00

APÊNDICE C – ATIVIDADE COMPARATIVA

Este questionário é referente à atividade desenvolvida sobre resolução de sistemas lineares utilizando o método do escalonamento. Sua finalidade é coletar dados para a elaboração de uma dissertação de mestrado da discente Cristiane Martins Fernandes Tavares, mestranda na Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF), Campus Juazeiro – BA.

1 - (UEA - AM) Na era do real, o brasileiro nunca guardou tantos recursos na poupança quanto no mês de junho de 2013. Nesse mês, a caderneta captou R$ 9,5 bilhões líquidos (depósitos menos saques), um recorde mensal na série do Banco Central, iniciada em 1995. Sabendo que, nesse mês, a metade do valor total depositado mais $\frac{2}{5}$ do valor total sacado foi igual a R$ 100,6 bilhões, pode-se concluir que o valor total depositado na poupança em junho de 2013 foi, em bilhões de reais, igual a:

a) 112,5.

b) 108.

c) 106,5

d) 116.

e) 98

2 - No mercado Ver-o-Peso, três vendedores combinaram vender três espécies de peixe, cada uma delas pelo mesmo preço e fazer uma competição para ver quem vendia mais peixe pelo preço combinado, durante uma hora. Sabendo-se que:

- O vendedor **A** vendeu 1kg do peixe x, 5kg do peixe y, 4kg do peixe z e arrecadou R$65,00;
- O vendedor **B** vendeu 2kg do peixe x, 3kg do peixe y, 1kg do peixe z e arrecadou R$46,00;
- O vendedor **C** vendeu 3kg do peixe x, 7kg do peixe y, 2kg do peixe z e arrecadou R$85,00;

Quais os preços, por kg, dos peixes x, y e z, respectivamente?

3 - O conjunto solução do sistema linear $\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}6y + 0{,}6z = 18 \\ 0{,}1x + 0{,}4y + 0{,}2z = 6 \\ 0{,}1x \ + 0{,}2z = 20 \end{cases}$ é:

4 - Classifique o sistema $\begin{cases} x - 3y + 2z = -4 \\ -x + 2y - z = 5 \\ 2x - 7y + 5z = 1 \end{cases}$ em sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI).

5 - Determine o conjunto solução do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + 2y + \dfrac{z}{2} = 7 \\ 2x + 12y + 8z = 36 \\ \dfrac{x}{4} \ + y + \dfrac{z}{2} = 4 \end{cases}$$

6 - Determine, se existir, a inversa da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

7 - Considere a matriz A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

A matriz inversa de A, corresponde a:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

8 - O valor do determinante $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 10 & 12 \end{vmatrix}$ é igual a:

a) -36

b) -12

c) 0

d) 12

e) 36

9 - (Ufsm 2012) - Na peça "Um xadrez diferente", que encenava a vida de um preso condenado por crime de “colarinho branco”, foi utilizado como cenário um mosaico formado por retângulos de três materiais diferentes, nas cores verde, violeta e vermelha. Considere que **x, y e z** são, respectivamente, as quantidades, em quilos, dos materiais verde, violeta e vermelho utilizados na confecção do painel e que essas quantidades satisfazem o sistema linear

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 250 \\ 2x + 5y + 3z = 420 \\ 3x + 5y + 2z = 430 \end{cases}$$

Sobre a solução desse sistema e a quantidade dos materiais verde, violeta e vermelho utilizada no painel, afirma-se:

I. O sistema tem solução única e x + y + z = 120, isto é, a soma das quantidades dos três materiais empregados é 120 quilos.

II. O sistema não tem solução, é impossível determinar a quantidade de cada material empregado.

III. O determinante da matriz dos coeficientes a qual está associada ao sistema é diferente de zero e x = 2y e y = 3z.

IV. O determinante da matriz dos coeficientes a qual está associada ao sistema é zero. O sistema tem solução, porém, para determinar a quantidade dos materiais utilizados, é necessário saber previamente a quantidade de um desses materiais.

Está (ão) correta(s):

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) apenas I e III.

e) apenas IV.

10 - Seja A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. O valor do determinante da matriz A corresponde a:

a) 72

b) 48

c) 24

d) -36

e) -60

APÊNDICE D – ATIVIDADE AVALIATIVA

QUESTIONÁRIO AVALIATIVO

1 - Sexo:

( ) Masculino ( ) Feminino

2 - Como é o seu desempenho em Matemática:

( ) Ótimo ( ) Bom ( ) Precisa Melhorar

3 - A utilização do aplicativo MatrixCalculator, ajudou você a compreender os conteúdos?

( ) Sim ( ) Não

4 - Qual o conteúdo que apresentou dificuldade?

( ) Resolução de sistemas

( ) Determinantes

( ) Inversão de matrizes

5 - Em sua opinião, quais os pontos positivos da utilização do aplicativo nas aulas de Matemática nos conteúdos estudados?

____

____

6 - Quais os pontos negativos?

____

____

7 - Você tem alguma sugestão para melhorar o aplicativo? Qual?

____

____

____

8 - Deixe um comentário sobre o estudo dos conteúdos utilizando o aplicativo.

____

____

9 - Qual o conteúdo que você sugere a utilização das tecnologias? Como seria esta atividade?

____

____

10 - Se você fosse dar um nome ao aplicativo, qual seria o nome?

____