Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Sociedade Brasileira de Matemática

Claudivania de Alencar de Aquino

Introduzindo o Pensamento Combinatório nos Anos Finais do Ensino Fundamental: uma proposta de ensino

Juazeiro – BA

2013

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Sociedade Brasileira de Matemática

Claudivania de Alencar de Aquino

Introduzindo o Pensamento Combinatório nos Anos Finais do Ensino Fundamental: uma proposta de ensino

Dissertação apresentada à Comissão Local do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Orientador: Profº. Edson L. Araújo

Juazeiro – BA
2013

Aquino, Claudivania de A. de.
A657i Introduzindo o pensamento combinatório nos anos finais do ensino fundamental: uma proposta de ensino / Claudivania de Alencar de Aquino. – – Juazeiro, 2013.
xiv, 64 f.: il. ; 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT,) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro - BA, 2013
Orientador: Prof. Msc. Edson Leite Araujo.

Inclui referências.

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Análise Combinatória. 3. Ensino Fundamental. I. Título. II. Araújo, Edson Leite. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510.712

UNIVASF
UNIVERSIDADE FEDERAL DO
VALE DO SÃO FRANCISCO

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT/UNIVASF

PROFMAT

Introduzindo o Pensamento Combinatório nos Anos Finais do Ensino Fundamental: uma Proposta de Ensino

Por

Claudivania de Alencar de Aquino

Dissertação aprovada em 19 de agosto de 2013

Aníbal Livramento da Silva Netto
Prof. Dr. Aníbal Livramento da Silva Netto
Examinador Interno- UNIVASF

Lucília Batista Dantas Pereira
Profa. Dra. Lucília Batista Dantas Pereira
Examinadora Externa- UPE

Profa. Dra. Mônica Aparecida Tomé Pereira
Examinadora Externa- UNIVASF

Edson Leite Araújo
Prof. MSc. Edson Leite Araújo
Orientador- UNIVASF

Juazeiro-BA
2013

Dedico este trabalho **aos meus pais**:
A oportunidade que um dia vocês não
tiveram de estudar, eu tive graças ao esforço
de vocês.
Mesmo sem concluir os estudos, seus
ensinamentos são extremamente valiosos
para minha formação!

Agradecimentos

Chegado o fim de uma jornada é momento de agradecer, reconhecendo todos que ajudaram de alguma forma nessa luta, fazendo também parte dessa conquista.

Dessa forma, agradeço primeiro a Deus, pelo dom da vida e por mais essa graça concedida!

A minha família, que é o meu alicerce e minha fonte de inspiração, por ter me apoiado sempre nessa caminhada na conquista de meus objetivos.

A minha mãe, Rita Maria, que mesmo de longe sempre foi minha companheira, me incentivando, me apoiando e me dando forças para que eu seguisse adiante.

Ao meu pai, João Bosco, que sempre acreditou em mim e permitiu que eu estudasse, mesmo com todas as dificuldades.

Ao meu esposo Welton, pelo companheirismo e paciência que teve comigo ao longo desses dois anos; também lhe agradeço pelas suas contribuições concedidas ao longo desse curso. Pelas vezes que nele “descarreguei” as minhas frustrações, quero agora compartilhar essa conquista.

A meu irmão Wilton Carlos, pela amizade verdadeira e companheirismo.

Aos colegas de curso pela amizade e pela troca de experiências, enriquecendo meu aprendizado. Em especial às amigas Francinária e Poliana, que estiveram sempre ao meu lado, contribuindo para a realização desse trabalho, ajudando e compartilhando das alegrias e também das frustrações.

Ao professor Edson Leite Araújo pela paciência e pelas valiosas orientações que contribuíram para a realização desse trabalho.

Aos demais mestres do PROFMAT, pelos ensinamentos transmitidos e compartilhados.

Aos ex-colegas de profissão, Gonçalo e Rita de Cássia, pessoas com as quais aprendi muito ao longo de nossas jornadas de trabalho, enriquecendo minha prática pedagógica.

A SBM, pela criação do PROFMAT, permitindo sonhar novos caminhos para o ensino de Matemática.

A CAPES, pelo auxílio financeiro, contribuindo nos custos da realização deste trabalho.

Em fim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente na realização desse trabalho, àqueles que acreditaram na minha capacidade, e me deram forças para continuar nessa jornada.

A todos aqueles que acreditaram na concretização desse trabalho, muito obrigada!

“O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis”

José de Alencar

Introduzindo o Pensamento Combinatório nos Anos Finais do Ensino Fundamental: uma proposta de ensino

Claudivania de Alencar de Aquino

RESUMO

Neste estudo, elaboramos uma proposta de ensino voltada à abordagem da **Análise Combinatória** nos anos finais do Ensino Fundamental. O principal objetivo é propor o estudo da **Análise Combinatória** nessa modalidade de ensino, possibilitando aos alunos interagirem com o conteúdo de forma integradora, uma vez que este conteúdo está presente em diversas situações do cotidiano das pessoas, não devendo, portanto, ser abordado apenas no Ensino Médio. Quando a **Análise Combinatória** não é explorada desde o Ensino Fundamental, muitos alunos sentem dificuldade quando se deparam com este conteúdo no Ensino Médio. O trabalho fundamenta-se em uma proposta de ensino que visa inicialmente averiguar os conhecimentos prévios dos educandos acerca da **Análise Combinatória**. Adotaremos como metodologia o trabalho em grupo, sendo que após a aplicação de atividades de sondagem envolvendo problemas combinatórios de quatro tipos (*produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação*), são apresentadas duas outras sequências de atividades envolvendo esses conceitos de combinatória, dando ênfase para que o aluno resolva-as utilizando estratégias diversificadas, sem o uso de fórmulas. Diante da importância da **Análise Combinatória** surgiu a motivação para a elaboração desta proposta, na qual se buscou um embasamento teórico na análise dos trabalhos de outros pesquisadores, bem como em documentos oficiais que regem o ensino de Matemática no Ensino Fundamental e ainda em livros didáticos dessa modalidade de ensino. Esperamos que esta proposta venha a colaborar para a melhoria da Educação Básica, visto que pretende fornecer subsídio para o professor abordar a combinatória nas séries finais do Ensino Fundamental, além de auxiliar o aluno quando os conceitos de **contagem** forem explorados no Ensino Médio.

Palavras - chave: Análise Combinatória. Ensino Fundamental. Proposta de ensino.

Introduzindo o Pensamento Combinatório nos Anos Finais do Ensino Fundamental: uma proposta de ensino

Claudivania de Alencar de Aquino

ABSTRACT

In this study, we developed a teaching proposal focused on Combinatorial Analysisisapproachin the final years of Elementary School. The main objective is to propose the study of the Combinatorial Analysis in this mode of teaching, allowing students to interact with the content integrator, since this content is present in various situations of everyday life of the people, and should not, therefore, be approached only in High School. When the Combinatorial Analysis is not explored since ElementarySchool, many students fell difficulty when encountering this content in High School. The work is based on a proposal of teaching which aims initially to determine initially the previous knowledge of students about Combinatorial Analysis. We will adopt as group work methodology, and after polling activities involving Combinatorial problems of four types (Cartesian product, arrangement, permutation and combination), are presented two other sequences of activities involving these Combinatorial concepts, emphasizing that the student resolve them using diverse strategies, without using formulas. On the importance of Combinatorial Analysis was the motivation for this proposal, which sought a theoretical analysis of the work of other researchers, as well as in official documents governing the teaching of Mathematics in Elementary School and even in textbooks of this mode of teaching. We hope that this proposal will contribute to the improvement of basic education, because you want to provide subsidy for the teacher to address the combinatorial in the final series of Elementary School, in addition to helping the student when counting concepts are explored in High School.

Keywords: Combinatorial Analysis, Elementary Education, Teaching proposal.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Lista de Siglas

BCC-PE – Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco
MEC – Ministério da Educação e Cultura
OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

Sumário

1 Introdução

Historicamente, a Matemática tem demonstrado sua grande utilidade na vida social dos indivíduos. No mundo atual, não se pode fugir da Matemática, pois ela está presente no cotidiano em inúmeras atividades. Assim, o seu ensino deve proporcionar ao aluno o *pensar*, tornando-o capaz de identificar e resolver problemas, estimulando seu raciocínio ajudando-o em sua percepção.

Entre os conteúdos matemáticos, encontra-se a **Análise Combinatória**, que, conforme destacam alguns documentos oficiais, deve ser abordado desde o Ensino Fundamental. (BRASIL, 1997) e (BRASIL, 1998). Este conteúdo deve ser ensinado de forma interativa entre o professor e seus alunos, sendo destacadas as ideias em comum, reunindo novas formas de pensar e de interagir com as informações propostas. Para isso, o professor deve incentivar o educando a problematizar, a raciocinar, tendo seu aluno como sujeito ativo e participante do processo de ensino e aprendizagem.

O estudo da Análise Combinatória a partir das séries iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio é essencial à formação de indivíduos conscientes e críticos, uma vez que está presente em situações simples do cotidiano, nas quais podem ser exploradas capacidades como a observação, o levantamento de hipóteses, a investigação, a sistematização, a generalização, entre outras.

Apesar dos processos de contagem se fazerem presentes em nosso cotidiano desde cedo, quando enumeramos e contamos objetos, seja pelo princípio aditivo ou multiplicativo, na maioria das vezes, na educação básica a **Análise Combinatória** é trabalhada apenas no Ensino Médio. Quando a abordagem é feita no Ensino Fundamental, não é realizada de maneira significativa, visto que o principal subsídio para o professor ainda é o livro didático. Boa parte dos livros direcionados ao Ensino Fundamental não apresenta a **Análise Combinatóri**a em seus conteúdos e, quando conceitos relativos ao tema são abordados, é feito de maneira resumida e inadequada, de forma que não prioriza sua compreensão, como podemos perceber em livros como Giovanni Jr. e Castrucci (2009), Bianchini (2006), Souza e Pataro (2009), Dante (2009), Iezzi, Dolce e Machado (2009).

É o que também nos reforça Pessoa e Borba (2011, p. 1):

> *Na prática de sala de aula, a maioria dos problemas de raciocínio combinatório (Produto Cartesiano, Arranjo, Combinação e Permutação) é introduzida formalmente na escola a partir do 2º ano do Ensino Médio, apenas o do tipo produto cartesiano é trabalhado explicitamente nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Além disso, embora os livros didáticos do Ensino Fundamental já tragam diversificados problemas de raciocínio combinatório, eles não fazem uma distinção desses tipos, ou seja, não há um trabalho sistemático com o raciocínio combinatório antes do 2º ano do Ensino Médio.*

Essa falta de contato com a **Análise Combinatória** desde as séries iniciais é apontada por alguns pesquisadores (PESSOA e BORBA, 2009b), (PESSOA e BORBA, 2011), (COSTA, 2003) e (MENEZES e OLIVEIRA, 2010) como sendo um dos motivos das dificuldades enfrentadas por muitos alunos nesse conteúdo. Por isto é importante que este assunto seja trabalhado também ao longo do Ensino Fundamental, através de princípios mais simples que venham a formar uma "*base*" para auxiliá-los na compreensão dos conceitos da combinatória quando forem explorados no Ensino Médio, como advertem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do Ensino Fundamental:

> *(...) o emprego de problemas envolvendo combinatória leva o aluno, desde cedo, a desenvolver procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios, úteis não só em Matemática como também em outros campos, o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do ensino fundamental. (BRASIL, 1998, p. 52)*

Corroborando com as orientações determinadas pelos PCNs, alguns autores enfatizam a importância de se trabalhar esse conteúdo também ao longo do Ensino Fundamental, conforme ressaltam Pessoa e Borba:

> *(...) é possível que o raciocínio combinatório se inicie antes do ensino formal e influencie-se por experiências tanto escolares quanto extraescolares, nas quais esse raciocínio se faz necessário. Em situações cotidianas os alunos são estimulados ao levantamento e à*

> *escolha de possibilidades, bem como, no estudo de outras áreas da Matemática e de outras áreas do conhecimento, o raciocínio combinatório se faz presente e pode ser desenvolvido. (PESSOA e BORBA, 2009b, p. 3).*

Diante do exposto, elaboramos uma proposta pedagógica de inserção do ensino de **Análise Combinatória** nos anos finais do Ensino Fundamental (6º, 7º, 8º e 9º anos), baseada nos quatro pilares, considerados fundamentais para a aprendizagem da **Combinatória** segundo Pessoa e Borba, (2009a): *a listagem de possibilidades, o destaque para os invariantes de cada tipo de problema combinatório, a sistematização e a generalização*, objetivando facilitar a compreensão dos alunos, sobre situações combinatórias para que sejam capazes de estabelecer adequadamente estratégias e técnicas para solucionarem problemas que permeiam a vida, além de propiciar um “embasamento” para uma melhor compreensão quando este assunto for trabalhado no Ensino Médio.

O nosso trabalho foi desenvolvido e estruturado em quatro capítulos conforme detalhamos a seguir:

O próximo capítulo traz a fundamentação teórica que norteia o trabalho, por meio de uma análise dos documentos oficiais que orientam o ensino da Análise Combinatória no Ensino Fundamental, análise de pesquisas relacionadas ao tema e análise da abordagem desse conteúdo em livros didáticos das séries finais do Ensino Fundamental.

O terceiro capítulo traz a proposta de inserção da **Análise Combinatória** no Ensino Fundamental, relatando objetivos e métodos a serem seguidos.

Por fim, são apresentadas no quarto capítulo, as considerações sobre o tema que foi proposto.

2 Fundamentação Teórica

2.1 A Análise Combinatória segundo documentos oficiais do Ensino Fundamental

Os PCNs do Ensino Fundamental reconhecem a importância da **Combinatória** e indicam a necessidade de sua abordagem desde os anos iniciais. Nesta obra são apresentados ainda os objetivos gerais do ensino de Matemática e inclui a proposta de divisão dos conteúdos matemáticos em quatro grupos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. No bloco de conteúdos matemáticos que diz respeito ao Tratamento da Informação propõe-se a realização de “(...) estudos relativos a noções de Estatística e de probabilidade, além dos problemas de contagem que envolvem o princípio multiplicativo” (BRASIL, 1998, p. 52).

Este bloco de conteúdos foi recentemente incluído aos currículos brasileiros, devendo ser trabalhado em todos os níveis da educação básica, a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental até a conclusão do Ensino Médio, de maneira a complementar e aprofundar as noções matemáticas envolvidas.

De acordo com os PCNs, em relação ao raciocínio combinatório, no primeiro e segundo ciclos, “os alunos devem ser levados a desenvolver a familiarização com a contagem de agrupamentos, de maneira informal e direta, fazendo, por exemplo, uma lista de todos os agrupamentos possíveis para depois contá-los” (BRASIL, 1997, p. 52). Também sugere que a combinatória seja explorada através da “identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais” (BRASIL, 1997, p. 62). Um exemplo: “Tendo duas saias - uma preta (P) e uma branca (B) - e três blusas - uma rosa (R), uma azul (A) e uma cinza (C) -, de quantas maneiras diferentes posso me vestir?” (BRASIL, 1997, p. 73).

Nesse tipo de problema os alunos podem obter a resposta de diversas maneiras: desenhos, diagramas de árvore, tabelas, entre outros testes de possibilidades.

No terceiro ciclo (6º e 7º ano) e quarto ciclo (8º e 9º ano), em relação aos *problemas de contagem*,

> *o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para a aplicação no cálculo de probabilidades (BRASIL, 1998, p. 52).*

Para esses ciclos os PCNs sugerem no bloco Tratamento da Informação a seguinte abordagem: “Representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias.” (BRASIL, 1998, p. 74).

O trabalho com problemas combinatórios no decorrer do terceiro e quarto ciclos (6º à 9º ano) do Ensino Fundamental tem como finalidade explorar as diversas formas de representação dos casos possíveis de uma situação combinatória, assim como a compreensão da ideia do **princípio multiplicativo** como estratégia de resolução para os **problemas de contagem**, desenvolvendo o raciocínio combinatório, útil não somente em Matemática, como em outras áreas do conhecimento.

A Base Curricular Comum do Estado de Pernambuco (BCC-PE) (PERNAMBUCO, 2008) determinou orientações direcionadas a todas as escolas públicas desse estado, cujo objetivo é contribuir e orientar os sistemas de ensino, quanto à formação e atuação de professores da rede pública, que trabalham com a educação básica; também informa o que é importante para o Ensino Fundamental, suas exigências, prioridades, assim como o conteúdo que deve ser trabalhado, e a articulação das ideias da **Análise Combinatória** associada às operações numéricas.

Quanto à segunda etapa do Ensino Fundamental, cujo objetivo é conduzir o aluno em direção à construção do saber, articulado ao aprendizado obtido na primeira etapa, esse documento sugere que sejam realizadas atividades que explorem conjugadamente a representação e a contagem que levem o aluno a construir a ideia do **princípio multiplicativo** como recurso essencial na resolução de diversos problemas.

A proposta curricular para o Ensino Fundamental do município de Petrolina-PE (PETROLINA, 2009) traz os conteúdos curriculares que precisam ser abordados nessa modalidade de ensino. Os conteúdos relativos à Matemática estão divididos em quatro blocos:

- Números e Operações;
- Espaço e Forma;
- Grandezas e Medidas;
- Tratamento da Informação.

A **Análise Combinatória** está presente no bloco "*Tratamento da Informação*" e deve ser trabalhada no 3º bimestre do 6º, 7º e 8º anos, conforme os quadros abaixo:

Quadro 1: Descritores para o 6º ano – 3º bimestre

6º ano – 3º bimestre
Tratamento da informação
Representação e contagem de todos os casos possíveis em situações combinatórias.

Fonte: Petrolina (2009, p. 9)

Quadro 2: Descritores para o 7º ano – 3º bimestre

7º ano – 3º bimestre
Tratamento da informação
Representação e contagem de todos os casos possíveis em situações combinatórias.

Fonte: Petrolina (2009, p. 23)

Quadro 3: Descritores para o 8º ano – 3º bimestre

8º ano – 3º bimestre
Tratamento da informação
Resolução de situações-problema que envolvem situações combinatórias, utilizando estratégias variadas (construção de diagramas, tabelas, esquemas, o princípio multiplicativo da contagem).

Fonte: Petrolina (2009, p. 34)

Como é possível perceber nesses documentos, o ensino de **Análise Combinatória** deve se fazer presente ao longo do Ensino Fundamental, destacando a importância do contato com problemas de contagem para que o aluno compreenda o princípio multiplicativo e possa fazer uso de representações (*diagramas de árvore, tabelas, desenhos, esquemas*, entre outros) como procedimentos de resolução. Além disso, desenvolver o raciocínio combinatório nesta etapa serve como suporte a um futuro contato com a **Análise Combinatória**, no Ensino Médio.

2.2 A Análise Combinatória segundo outros pesquisadores

Para compreender melhor os métodos de ensino elaborados para a **Análise Combinatória** também é relevante verificar como as pesquisas de diversos autores abrangem o ensino desse conteúdo no Ensino Fundamental.

No seu trabalho, Alves (2010) explorou, através da metodologia da engenharia didática, a introdução do pensamento combinatório e sua relação com o cálculo probabilístico em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental. Segundo Carneiro (2005), a engenharia didática é “(...) uma metodologia, com potencial para servir de base para as pesquisas de sala de aula (...) e tem como característica a articulação entre a prática didática e a produção de conhecimento.” (CARNEIRO, 2005, p. 2, apud ALVES, 2010, p. 22).

Alves (2010) norteou sua pesquisa tomando como base as seguintes reflexões: de que forma seria possível abordar os conceitos básicos da **Análise**

Combinatória junto a alunos do Ensino Fundamental? Que estratégias didáticas poderiam ser usadas para a implementação deste conteúdo no Ensino Fundamental?

Os objetivos do autor foram:

- Investigar acerca de estratégias de ensino e aprendizagem que podem viabilizar a introdução dos conceitos básicos de **Análise Combinatória** no Ensino Fundamental;

- Identificar as formas combinatórias de contagem e sua relação com os estudos de probabilidade utilizando os diferentes registros de representação pelos alunos.

Para atingir seus objetivos, o autor utiliza uma metodologia qualitativa orientada pelos estudos da engenharia didática, que é estruturada em quatro fases: análises preliminares; concepção e análise a priori; experimentação, ou condução do módulo de ensino; análise a posteriori e avaliação.

Foi realizado inicialmente um estudo piloto, onde foi trabalhada a resolução de exercícios em dupla pelos alunos, seguido da socialização dos resultados que foram apresentados pelos estudantes. Esse trabalho mostrou que os alunos não utilizaram fórmulas para resolver os problemas de *arranjo* e *combinação*, e sim diferentes estratégias de resolução como a *representação das possibilidades*. A socialização dos resultados e a resolução dos exercícios levaram os alunos a perceberem quando a ordenação é ou não importante para a formação de agrupamentos.

Com a análise dos resultados obtidos foi possível observar que o trabalho com diferentes formas de registro de representação oportuniza aos educandos um melhor entendimento no cálculo das possibilidades, além de auxiliá-los na distinção de situações que envolvem *arranjo* e *combinação*. Os resultados desse estudo piloto favoreceram a elaboração de uma sequência de ensino voltada para o favorecimento do ensino e aprendizagem de **Análise Combinatória** e Probabilidade no 9º ano do Ensino Fundamental, possibilitando a participação ativa, o envolvimento e a compreensão dos conceitos básicos de **Análise Combinatória** no Ensino Fundamental. Essa proposta de ensino foi composta de quatro sequências de atividades, na forma de situações problema que abordaram o *princípio multiplicativo,* ideias sobre *permutação simples, arranjo simples* e *combinação simples*, além de explorar conceitos básicos de probabilidade.

O autor verificou ainda que os livros do 6º ano do Ensino Fundamental abordam o pensamento combinatório associando-o ao conteúdo de multiplicação. Nesses livros, a multiplicação aparece associada a três ideias básicas: adição de parcelas iguais, proporcionalidade e combinação de possibilidades. Alves (2010) observa que a **Análise Combinatória** é trabalhada em alguns problemas de contagem que envolvem a multiplicação de possibilidades. A partir daí, o assunto volta a ser abordado apenas nos livros do 9º ano relacionado ao conteúdo de **Probabilidades**, onde o cálculo de possibilidades servirá como ferramenta para auxiliar a probabilidade de um determinado evento acontecer. Em sua análise, o pesquisador afirma que o conteúdo, no Ensino Fundamental, é visto de forma superficial, não possibilitando a exploração e o entendimento de seus conceitos básicos, uma vez que o mesmo aparece associado a outros cálculos.

Em outro trabalho, Correia, Fernandes e Almeida (2009) estudaram as aquisições em **Análise Combinatória** de alunos do 12º ano de escolaridade, avaliadas através de um teste em duas fases, que foi ministrado no final de uma intervenção de ensino das operações combinatórias, centrada na sequencialização das operações (pela ordem: *arranjos com repetição, arranjos simples, permutações simples* e *combinações simples*), nas ideias prévias dos alunos sobre as operações combinatórias, na aprendizagem por descoberta, no trabalho de grupo e na valorização das conexões matemáticas em detrimento da aplicação de fórmulas.

O estudo foi realizado com alunos de uma turma do 12º ano do Ensino Básico do norte de Portugal e teve como objetivo avaliar o impacto da intervenção de ensino. Para isso, recolheram-se dados através da aplicação de um teste constituído por um conjunto de problemas de contagem, envolvendo as operações combinatórias estudadas. As análises dos dados foram feitas observando as estratégias de resolução adotadas pelos estudantes nos problemas propostos, procurando identificar e analisar os erros cometidos nas suas produções escritas e o seu desempenho nas operações combinatórias.

De forma geral, as resoluções dos alunos forneceram evidências sobre a influência da intervenção de ensino no desenvolvimento do pensamento combinatório e das relações entre as operações combinatórias, em detrimento de um ensino fundamentado na utilização de fórmulas.

Os resultados revelam que a intervenção de ensino se mostrou eficaz no desenvolvimento do raciocínio combinatório, visto que a maioria dos alunos recorria a *esquemas* e *desenhos* como estratégia de resolução dos problemas, enquanto que uma minoria recorreu a *operações aritméticas* e *fórmulas*. Este fato mostra a importância em obter o máximo proveito de estratégias diversificadas na resolução de problemas combinatórios, permitindo ao aluno uma clarificação do significado dos operandos envolvidos em cada tipo de problema de contagem.

Apesar da pesquisa de Costa, Fernandes e Almeida (2009) ser direcionada ao 12º ano de escolaridade, o que no Brasil corresponde ao 3º ano do Ensino Médio, julgou-se importante analisar este trabalho, pois se assemelha com a proposta que aqui se pretende realizar, uma vez que os autores buscaram valorizar o conhecimento prévio dos estudantes no trabalho com problemas sobre **Análise Combinatória**, além do trabalho em grupo e da aprendizagem por descoberta, sem a necessidade da utilização de fórmulas na aprendizagem do conteúdo. Conforme os resultados descritos pelos autores, percebe-se a importância da realização de trabalhos que valorizem as diversas estratégias de resolução pelos alunos, sobretudo nesse conteúdo, pois proporciona uma aprendizagem mais significativa aos estudantes.

Em sua dissertação Esteves (2001) destaca a aquisição e o desenvolvimento dos conceitos prévios sobre **Análise Combinatória** em adolescentes de 14 anos de idade, cursando o último ano do Ensino Fundamental. Para tal, foi construída uma sequência de ensino fundamentada em teorias psicológicas e educacionais com o uso de situações-problemas através da contagem direta.

A autora enfatiza que o *raciocínio combinatório* tem importância tanto no aspecto social na formação de cidadãos, quanto na formação matemática de um indivíduo, tornando-o flexível com a utilização de formas para representar ideias matemáticas.

Entendemos que o raciocínio combinatório torna o indivíduo capaz de analisar situações, estabelecer padrões, criar estratégias, identificar possibilidades, além de desenvolver seu espírito crítico e argumentativo.

Esteves (2001) afirma que sua pesquisa tem por objetivo formalizar o conceito, logo, não ocorreu treinamento com algoritmos utilizados no ensino de **Análise Combinatória**. O estudo foi realizado com dois grupos de alunos com características semelhantes, porém utilizando abordagens didáticas diferentes para cada um. O primeiro grupo, denominado Grupo Experimental, foi composto por alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, que realizaram as atividades propostas em dupla. O segundo grupo, denominado Grupo de Referência, composto por alunos do 2º ano do Ensino Médio, teve uma abordagem tradicional do conteúdo com a utilização do livro didático.

Ambos os grupos foram submetidos a dois testes individuais: um antes de ser introduzido o ensino de **Análise Combinatória**, o outro, após o contato com conteúdo. A aplicação do pós-teste foi complementada por meio de entrevista ao aluno quando as suas soluções não estavam totalmente explícitas para a pesquisadora.

Ao analisar as compreensões apresentadas pelos alunos no pré-teste e na sequência de ensino, a pesquisadora pôde perceber algumas concepções que dificultavam a aprendizagem de tópicos da **Análise Combinatória**, como: a falta de um procedimento recursivo; resposta errônea injustificada; não uso ou uso inadequado da *árvore de possibilidades*; má interpretação da palavra "*distribuir*"; confusão sobre a importância da ordem em problemas de *combinação* e *arranjo*.

A pesquisa apontou que os alunos pouco usavam a *árvore de possibilidades*, mesmo quando esta estratégia é proposta como sugestão nos problemas. Contudo, considerou que a sequência de ensino desenvolvida com o grupo experimental foi bastante proveitosa, visto que os alunos evoluíram passo-a-passo com as representações das soluções e com as discussões relativas aos processos de resolução usados, tendo como aspecto favorável a exploração de problemas através de situações reais e o trabalho em duplas.

Os resultados obtidos por Esteves (2001) mostraram que os alunos apresentavam dificuldades em resolver esses problemas. As principais causas de fracasso são referentes à confusão sobre relevância da ordem, principalmente em problemas de *combinação*, falta de organização para enumerar os dados sistematicamente, dúvidas na operação aritmética resultante da interpretação incorreta do problema, quando este apresentava mais de uma etapa.

Em suas considerações finais, Esteves (2001) considerou que o ensino de **Análise Combinatória** deveria ser iniciado no Ensino Fundamental de forma significativa, sem introdução de fórmulas, enquanto que no Ensino Médio, o aluno deveria ter esse conceito esquematizado e formalizado, inserindo as fórmulas de maneira significativa e não apenas de forma mecânica.

No trabalho desenvolvido por Esteves (2001) os alunos foram submetidos, inicialmente, a um pré-teste e, após a aplicação da sequência, ocorreu um pós-teste. A referida pesquisa nos faz refletir sobre a importância da realização de um pré-teste e um pós-teste quando se pretende investigar o uso de uma sequência didática de ensino, pois, os dados coletados por esses instrumentos permitem perceber de forma clara se os alunos conseguem ou não resolver os problemas.

Costa (2003), em sua dissertação, procura analisar quais os instrumentos disponíveis para o professor de Matemática ensinar **Análise Combinatória** no Ensino Fundamental usando Modelagem, além de estudar o "*nível*" de conhecimento dos professores sobre esse conteúdo.

Os objetivos específicos dessa pesquisa foram:

- Analisar a postura dos professores sobre as estratégias de resolução adotadas pelos alunos em situações combinatórias;

- Verificar se os professores conhecem o conteúdo de contagem e diferenciam seus conceitos na interpretação de uma situação-problema;

- Promover uma reflexão de que nem todos os problemas combinatórios podem ser resolvidos apenas pelo princípio multiplicativo.

Ao longo do desenvolvimento de sua pesquisa, o autor busca responder as seguintes questões norteadoras: como o professor de Matemática está instrumentalizado para ensinar **Análise Combinatória** no Ensino Fundamental? Quais as concepções do professor que influenciam sua prática pedagógica? Como uma formação continuada pode alterar ou reforçar essas concepções?

Segundo o autor, é adequado que não haja uma formalização do conteúdo no Ensino Fundamental, visto que é uma etapa de ensino onde o conteúdo deve ser visto de maneira a abordar seus conceitos básicos, através de diversas estratégias de resolução de problemas, como a *tentativa e erro, princípio multiplicativo, árvores de possibilidades* e *tabelas*, o que vem a favorecer a aprendizagem do aluno.

Nos resultados de sua pesquisa Costa (2003) concluiu que o uso da Modelagem é um instrumento importante no processo de ensino e aprendizagem, pois permitiu que o educando fosse construindo o significado daquilo que era estudado. Entretanto, o autor percebeu também que ainda há muita contradição no processo de ensino e aprendizagem, visto que boa parte dos livros didáticos não aborda adequadamente a **Análise Combinatória**, conforme as orientações feitas nos PCNs, logo não é um subsídio suficiente para a prática de ensino desse conteúdo. Alguns dos livros analisados pelo autor enfatizam a *contagem direta* e o uso de *representações*, e por último o *principio multiplicativo*, porém não favorecem o crescimento da autonomia do aluno. Além disso, pela aplicação dos questionários foi possível ao autor perceber que a “fala dos professores” não condiz com a prática dos mesmos, por falta até mesmo de uma formação teórica, matemática e didática, adequada.

Ao analisar os resultados dessa pesquisa foi possível constatar que os professores apresentaram dificuldades com a resolução de problemas de **Análise Combinatória**, como: a falta de um procedimento sistemático que os levasse a enumeração de todas as possibilidades, soluções numéricas sem justificativas, não uso da árvore de possibilidades ou sua construção inadequada, dificuldades em reconhecer quando a ordem é importante ou não em um agrupamento. Todos esses elementos contribuem com as dificuldades que os docentes sentem ao ensinar esse conteúdo, sobretudo no Ensino Fundamental. O autor verificou ainda que a maioria dos professores pesquisados apresentava certa "*insegurança*", falta de conhecimentos básicos sobre o tema e dificuldades em resolver questões sem o auxílio de fórmulas. Um dos pontos que chamou mais atenção, como o autor afirma, foi esse despreparo do professor de matemática em ensinar seus conteúdos, sobretudo a **Análise Combinatória**.

Em outro trabalho, Pessoa e Borba, (2011) descreveu um estudo investigativo realizado com os alunos dos anos finais Ensino Fundamental, que teve como objetivo observar as estratégias e analisar a compreensão desses alunos em relação à resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios.

A pesquisa foi desenvolvida com alunos do 6º ao 9º ano Ensino Fundamental de duas escolas, uma pública e a outra particular. Foi entregue a cada estudante uma ficha contendo oito problemas abrangendo o raciocínio combinatório (*produto cartesiano, arranjo, permutação* e *combinação*), sendo dois de cada tipo. Os quatro problemas iniciais envolviam um número maior de possibilidades de agrupamentos, já os quatro últimos continha números que levavam a um número menor de possibilidades. Os educandos foram orientados a resolver individualmente a ficha e, a utilizarem as estratégias que julgassem mais convenientes, como: desenhos, tabelas, gráficos, fazendo cálculos ou usando qualquer outra forma de raciocínio.

As autoras realizaram uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados. Na avaliação quantitativa verificou-se o desempenho dos estudantes por ano, tipo de escola, tipo de problema e por ordem de grandeza dos números apresentados nos problemas combinatórios. Na análise qualitativa observou os tipos de respostas e as estratégias utilizadas pelos estudantes ao resolverem os problemas sugeridos na ficha individual.

A análise dos resultados evidenciou que os alunos apresentaram um melhor desempenho nos problemas do tipo *produto cartesiano*. As pesquisadoras levaram a crer que o maior número de acertos nesse tipo de problema aconteceu porque nos anos iniciais há uma abordagem explícita desse tipo de problema combinatório. Esse fator também comprova a necessidade da escola trabalhar os outros problemas combinatórios (*arranjo, permutação* e *combinação*) abordando suas características e particularidades.

Quanto à ordem de grandeza dos números apresentados nos problemas, as autoras observaram que essa variável influencia diretamente o desempenho dos alunos, pois os estudantes apresentaram melhor resultado nos problemas que envolviam um número menor de possibilidades, uma vez que o trabalho com um número pequeno de possibilidades facilita o manuseio dos dados e a utilização de diferentes estratégias de resolução.

Na análise das estratégias e do tipo de respostas utilizadas pelos estudantes, a pesquisadora verificou que, algumas vezes, os alunos não conseguiram construir relações corretas e conduziram as resoluções por uma lógica alheia ao problema. No entanto, a maioria dos alunos empregaram estratégias adequadas e dependendo da sistematização dessas estratégias e da ordem de grandeza dos números contidos nos problemas, conseguiam ou não esgotar todas as possibilidades de agrupamentos envolvidos. Essas situações evidenciam a importância do trabalho escolar no sentido de auxiliar os alunos na compreensão dos conceitos combinatórios e na exploração e esgotamento de todas as possibilidades. Além disso, a escola deve reconhecer que o desenvolvimento do pensamento combinatório dos estudantes é influenciado por atividades informais.

Pessoa e Borba (2011) destacaram ainda que a utilização de diversas formas de representação pelos alunos comprova que o uso de diferentes maneiras de raciocinar devem ser exploradas e valorizadas pela escola no sentido de auxiliar os estudantes no entendimento dos problemas combinatório e na exploração de suas particularidades.

Como se pode perceber, em linhas gerais, quatro desses trabalhos aqui analisados, (ALVES, 2010), (CORREIA, FERNANDES e ALMEIDA, 2009), (ESTEVES, 2001) e (PESSOA e BORBA, 2011) são direcionados à investigação prévia dos conhecimentos que os alunos do Ensino Fundamental têm sobre o assunto, quais são as suas dificuldades, facilidades, estratégias e procedimentos de resolução, mesmo antes de uma introdução formal aos mesmos. Já o outro trabalho (COSTA, 2003) investiga as concepções dos professores frente ao ensino de **Análise Combinatória**, as dificuldades enfrentadas pelo docente, bem como os instrumentos disponíveis para se ensinar **Análise Combinatória** em especial no Ensino Fundamental.

De forma geral, o que se pode observar é que os autores apontam para sequências de ensino, onde se priorizem os conhecimentos prévios trazidos pelos alunos, oportunizando a exploração de diferentes formas de representação, bem como o trabalho em grupo. Pelo conjunto de resultados descritos nos estudos apresentados, problemas de raciocínio combinatório trazem dificuldades para os estudantes e até mesmo para alguns professores. Uma dificuldade comumente apontada em todos os trabalhos analisados é o reconhecimento da importância da ordem nos agrupamentos.

Torna-se necessário, portanto, o desenvolvimento de trabalhos que levem à superação destas dificuldades, dando "*liberdade*" aos alunos para resolverem problemas do tipo combinatório utilizando-se de estratégias diferenciadas e por diferentes formas de representação. Além disso, é importante também que se proporcionem momentos de discussão na sala de aula, para que os alunos apresentem suas próprias ideias e dúvidas, tornando-os co-autores na construção do próprio saber.

No que se refere ao pensamento combinatório, se este for trabalhado desde o Ensino Fundamental, isso poderá favorecer um ensino significativo, que valorize os conhecimentos prévios e que esteja ligado ao cotidiano, despertando assim o interesse e envolvimento no processo ensino e aprendizagem.

Assim, apoiando-se nos documentos oficiais que orientam os estudos de Matemática no Ensino Fundamental e em consonância com os trabalhos realizados por outros autores e pelos resultados apontados pelos mesmos, a proposta pedagógica que aqui nos propomos a desenvolver é lançada com o objetivo de inserir e explorar conjuntamente os conceitos de *arranjo, combinação, permutação* e *produto cartesiano* nos anos finais (6º, 7º, 8º e 9º anos) do Ensino Fundamental, sem caracterizá-lo por nomes, mas utilizando-se de quatro tópicos importantes na área: a **listagem** como estratégia, a **sistematização** da listagem, o enfoque nas **propriedades invariantes** de cada significado do problema e a **generalização**.

2.3 A Análise Combinatória nos livros didáticos

O livro didático é um recurso importante para o processo de ensino e aprendizagem, visto que auxilia o aluno no estudo e pesquisa dos conteúdos matemáticos e, para o professor, funciona como um instrumento de apoio ao planejamento e monitoramento de suas aulas. No entanto, o livro didático não pode ser utilizado como única fonte de recurso, já que, por melhor que seja, nunca será um material completo. Assim, ao preparar suas aulas o educador deve fazer um estudo mais aprofundado dos conteúdos a serem ministrados, procurando fazer uma transposição didática, isto é, adaptar os assuntos para a realidade dos alunos.

De acordo com Costa (2003, p. 27), “a Transposição Didática pode ser definida como o conjunto das transformações que sofre um saber a fim de ser ensinado (de saber científico a saber escolar).” Segundo esse mesmo autor, a utilização da transposição didática permite analisar as preferências didáticas do professor, haja visto que “o estudo dos fenômenos relacionados ao ensino e a aprendizagem da Matemática pressupõe a análise de variáveis envolvidas no processo aluno, professor e saber matemático, assim como as relações entre elas.” (COSTA, 2003, p. 27).

Como neste trabalho é sugerida uma proposta pedagógica de inserção da **Análise Combinatória** nos anos finais do Ensino Fundamental, consideramos importante analisar a abordagem desse conteúdo nas coleções de livros didáticos de Matemática aprovados pelo MEC no âmbito do PNLD nesta modalidade de ensino, observando o enfoque metodológico proposto para se trabalhar de forma introdutória com o **Princípio Fundamental de Contagem** e os conceitos de *arranjo, permutação* e *combinação*. Para esta análise foram adotados os seguintes critérios:

- abordagem ou não do conteúdo nos livros didáticos;
- como é feita a introdução do conteúdo;
- como são explorados os conceitos de **Análise Combinatória** (*Produto Cartesiano, Arranjo,Combinação e Permutação*);
- como é representado a listagem dos agrupamentos (*tabelas, diagramas, árvores de possibilidades, entre outros*).

O que determinou a escolha desses critérios foram os fatores que podem auxiliar na aprendizagem dos alunos, conforme descritos acima. Ao fazer esta análise, o objetivo aqui não é fazer um julgamento da "qualidade" dos livros analisados, nem mesmo escolher qual o melhor livro a ser adotado. A finalidade é observar quais livros se enquadram nos critérios e na proposta de ensino que pretendemos realizar.

Dessa forma, foram analisadas as seguintes coleções:

- **Matemática** - 6º ao 9º ano - Luiz Márcio Imenes, Marcelo Lellis - São Paulo: Editora Moderna, 2009;

- **A Conquista da Matemática** - 6º ao 9º ano - José Ruy Giovanni Jr, Benedicto Castrucci - São Paulo: FTD, 2009;

- **Tudo é Matemática** - 6º ao 9º ano - Luiz Roberto Dante - São Paulo: Ática, 2009;

- **Vontade de saber Matemática** - 6º ao 9º ano - Joamir Souza, Patrícia Moreno Pataro - São Paulo: FTD, 2009;

- **Matemática e Realidade** - 6º ao 9º ano - Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antônio Machado - São Paulo: Atual, 2009;

- **Matemática** - 6º ao 9º ano - Edwaldo Bianchini - São Paulo: Moderna, 2006.

2.3.1 Matemática, 6º ao 9º ano, Imenes e Lellis (2009)

O livro do 6º ano desta coleção apresenta no **capítulo 1: Um panorama da Matemática** um tópico denominado “*Contando possibilidades*”, no qual os autores abordam a idéia de contagem. O conteúdo é introduzido através de um problema que estimula no aluno a curiosidade em descobrir o total de placas de automóveis que é possível formar utilizando 3 letras escolhidas dentre as 26 do nosso alfabeto e 4 algarismos selecionados entre os 10 símbolos do nosso sistema numérico.

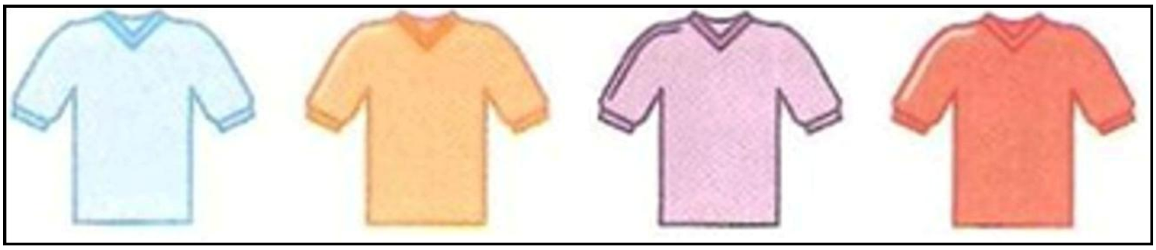
Em seguida, o pensamento combinatório é abordado através de problemas onde estão implícitas as ideias de *produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação*. Os autores exploram a tabela como forma de listagem de possibilidades, como nos exemplos a seguir:

Exemplo 1: *As garotas da classe estão montando um time de vôlei e precisam escolher o uniforme. Na loja de artigos esportivos, há 3 possibilidades para a cor do short:*

Figura 1 - Extraída de Imenes e Lellis (2009a, p. 25)

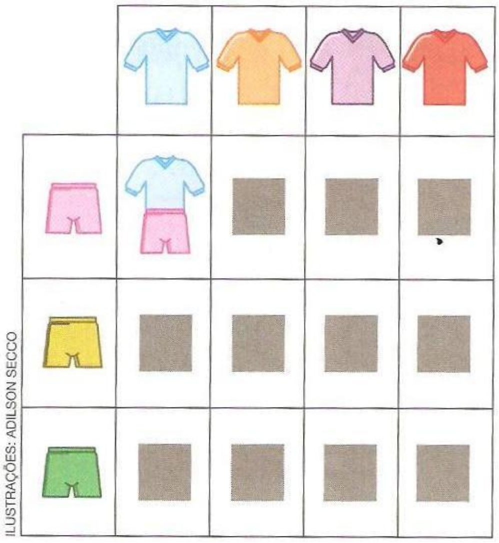
Para a camiseta, há 4 opções:

Figura 2 - Extraída de Imenes e Lellis (2009a, p. 25)



Para visualizar todas as possibilidades para o uniforme, pode-se fazer uma tabela desta maneira:

Figura 3 - Extraída de Imenes e Lellis (2009a, p. 25)



a) *Faça uma tabela como essa, desenhando todos os uniformes possíveis.*

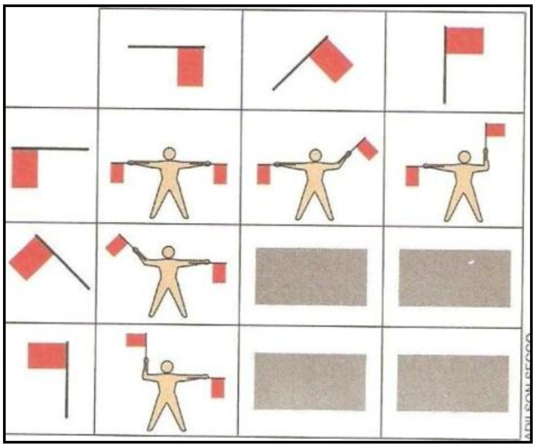
b) *Quantos uniformes diferentes podemos montar com 3 tipos de shorts e 4 tipos de camisetas?*

Exemplo 2: *Você já viu pessoas enviando mensagens com duas bandeirinhas? Isso pode acontecer quando 2 navios estão próximos e desejam comunicar-se. Vamos ver um código para essas mensagens, no qual cada bandeirinha só pode ter 3 posições. Cada par de posições representa uma instrução do código.*

Figura 4 - Extraída de Imenes e Lellis (2009a, p. 26)

a) *Copie a tabela no caderno e complete-a*.

Figura 5 - Extraída de Imenes e Lellis (2009a, p. 26)



b) *Quantas são as instruções desse código?*

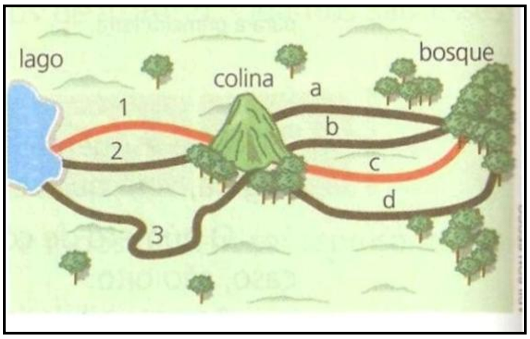
c) *Agora, vamos imaginar que cada bandeirinha possa ocupar 4 posições. Invente essa posição e, por meio de desenhos, mostre 3 novas instruções.*

No livro do 7º ano, **capítulo 3: Padrões numéricos**, no tópico "*Possibilidades e padrões"* os autores abordam novamente a contagem de possibilidades, através de dois problemas resolvidos e comentados, que exploram a *tabela* e *árvore de possibilidades* como forma de listagem dos agrupamentos.

Em seguida, aparecem outros problemas onde estão presentes as ideias de *produto cartesiano, arranjo e permutação*. Neste volume, aparecem a *árvore de possibilidades* (como no exemplo 3 mostrado abaixo), além da *tabela* e do *diagrama* como forma de representar a listagem de possibilidades.

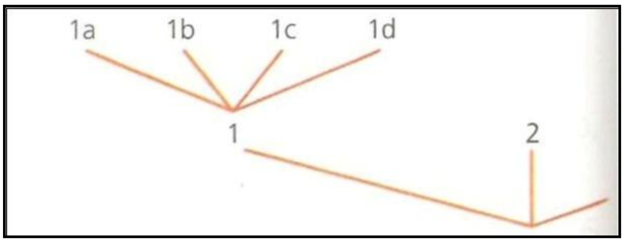
Exemplo 3: *Na ilustração a seguir, do lago até o bosque, passando pela colina, há vários caminhos. O caminho vermelho é o 1c.*

Figura 6 - Extraída de Imenes e Lellis (2009b, p. 66)



a) *Parte da árvore de possibilidades já está construída. Desenhe a árvore completa.*

Figura 7 - Extraída de Imenes e Lellis (2009b, p. 66)



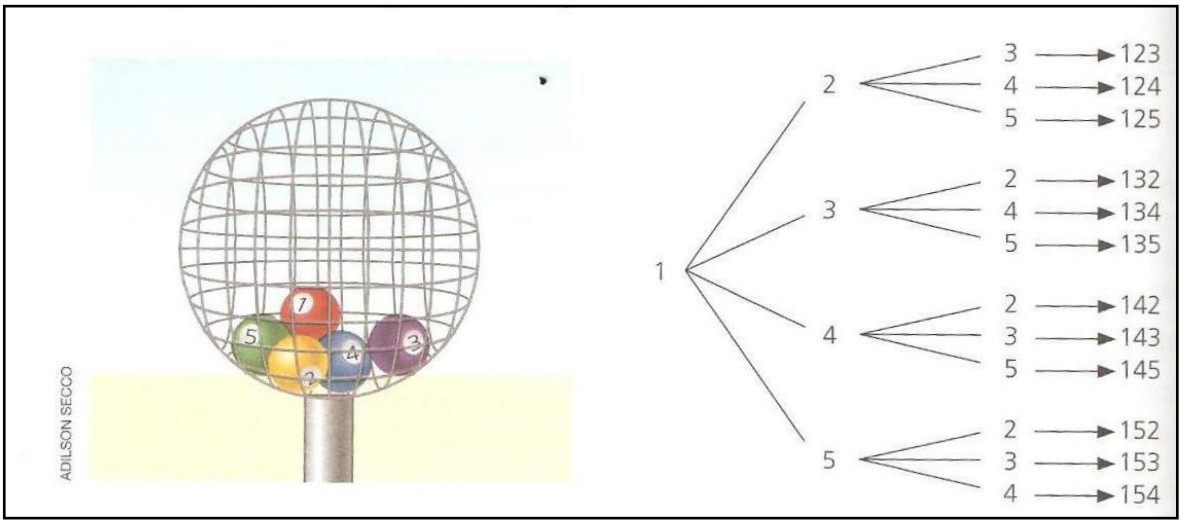
b) *Quantos são os caminhos do lago até o bosque?*

c) *Se houvesse nove caminhos do lago até a colina e sete da colina até o bosque, qual seria o total de caminhos do lago até o bosque?*

O livro do 8º ano, **capítulo 8: Estatística e possibilidades**, apresenta no tópico "*Possibilidades e chances*" uma abordagem da contagem de possibilidades para auxiliar o cálculo de probabilidade, utilizando como mecanismo de representação a *árvore de possibilidades*, como podemos perceber nos exemplos dados abaixo:

Exemplo 4: *Na urna esférica, há cinco bolinhas numeradas de 1 a 5. Vamos sortear três delas, uma de cada vez. Mas atenção! A bolinha sorteada uma vez não volta à urna! Nesse sorteio, formaremos números de três algarismos.*
Veja aqueles que começam com o algarismo 1:

Figura 8 - Extraída de Imenes e Lellis (2009c, p. 154)



a) *Quantos são os números começados com 1?*

b) *Quantos números começados com 2 podem ser formados nesse sorteio?*

c) *No total, quantos números podem ser obtidos?*

Exemplo 5: *No problema anterior, admitindo que as bolinhas têm a mesma chance de ser sorteadas, calcule a chance de o número extraído ser:*

a) *123*

b) *132*

c) *133*

d) *421*

Nesse mesmo livro, também é utilizada a tabela como forma de representação de possibilidades.

Ainda nessa coleção, o **capítulo 5: Estatística** do livro do 9º ano traz, no tópico "*Contando possibilidades*", a **Análise Combinatória** através de um exemplo introdutório das "*bandeiras*", no qual se pede a contagem de todas as bandeiras de quatro faixas horizontais que podem ser pintadas utilizando quatro cores diferentes. Este exemplo é resolvido utilizando *árvore de possibilidades* e o *princípio multiplicativo* é utilizado como forma de generalização.

Em seguida, são propostos problemas sobre *arranjos* e *combinações*, onde o *princípio multiplicativo* passa a ser usado como principal ferramenta de solução, embora os autores ainda utilizem a *árvore de possibilidades* como forma de compreensão.

Exemplo 6: *Este é um cartão da Loteca, um jogo de aposta controlado pelo governo:*

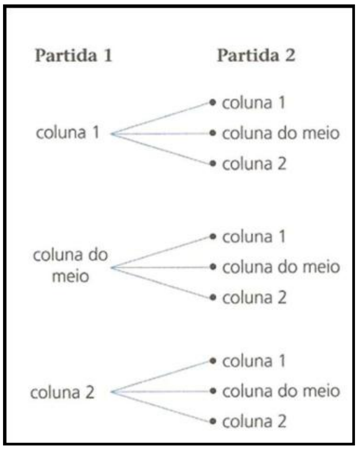
Figura 9 - Extraída de Imenes e Lellis (2009d, p. 93)

Volante do jogo de loteria Loteca com 14 jogos.

O cartão menciona 14 partidas de futebol. O apostador deve prever se o resultado de cada partida será vitória para o primeiro time (coluna 1), empate (coluna do meio) *ou vitória do segundo time (coluna 2). Assim, para cada partida, ele deve marcar um* **X** *na coluna 1, ou na do meio ou na coluna 2.*

Veja as várias maneiras de preencher a primeira e a segunda linhas do cartão, marcando para cada partida um único **X** *em uma das três colunas.*

Figura 10 - Extraída de Imenes e Lellis (2009d, p. 93)



Portanto, as possibilidades para as duas partidas são: (1, 1), (1, M), (1, 2), (M, 1),(M, M), (M, 2), (2, 1), (2, M), (2, 2).

a) *Se o cartão mencionasse só 2 partidas, de quantas maneiras diferentes ele poderia ser preenchido?*

b) *E se o cartão contivesse apenas 3 partidas?*

c) *E se tivesse somente 4 partidas?*

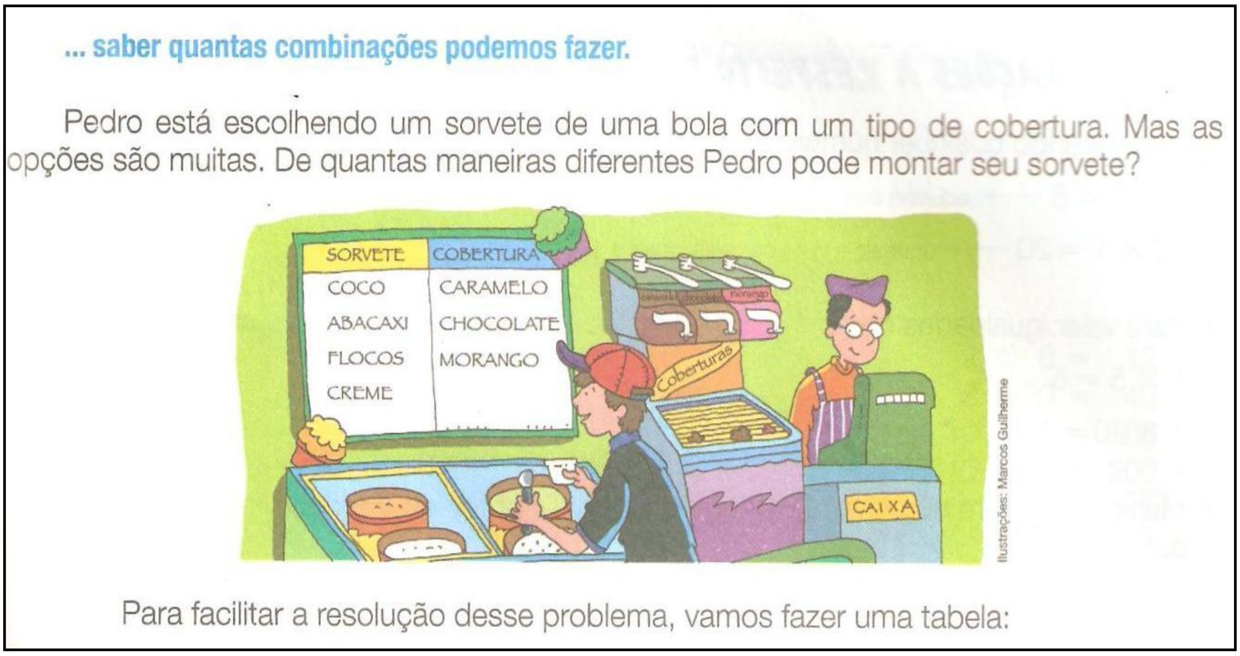
d) *Generalize o raciocínio e responda: tendo 14 partidas, de quantas maneiras diferentes o cartão pode ser preenchido, da maneira que descrevemos?*

Observamos que nesta coleção a **Análise Combinatória** é explorada através de problemas significativos presentes no cotidiano do aluno, nos quais são utilizadas diversas estratégias de representação para descrição dos *casos possíveis* nas situações de *contagem*, cabendo ao aluno observar qual o método mais adequado à cada situação. Os autores não definem os conceitos de **Análise Combinatória** (*arranjo, combinação, permutação*), pois têm como objetivo a introdução do raciocínio combinatório, incentivando as estratégias diversificadas de solução que devem ser construídas pelo próprio aluno.

2.3.2 A Conquista da Matemática, 6º ao 9º ano, Giovanni Jr. e Castrucci (2009)

Nesta coleção, o pensamento combinatório é abordado somente no livro do 6º ano na **unidade 2: Calculando com números naturais**, no tópico "*Ideias associadas à multiplicação*", onde aparece um problema introdutório no qual é preciso calcular as diferentes opções de se montar um sanduíche quando se dispõe de 4 tipos de pães e 6 tipos de recheios. O livro não explora conceitos relacionados à combinatória, apresenta apenas problemas envolvendo o **produto cartesiano**, explorando somente a *tabela* como recurso para representação da listagem de possibilidades, induzindo em seguida o aluno a utilizar o *princípio multiplicativo*, como é possível observar no exemplo a seguir das figura 11 e 12.

Figura 11 - Extraída de Giovanni Jr e Castrucci (2009a, p. 53)

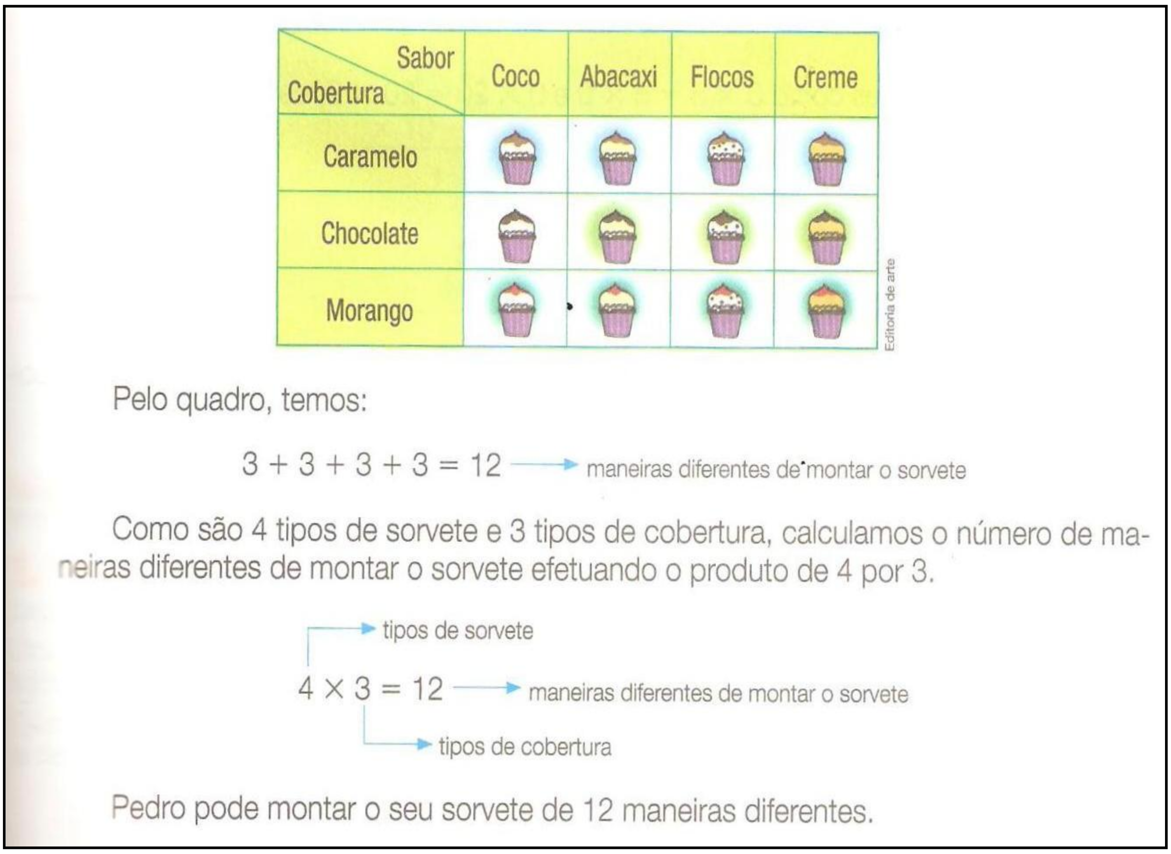


... saber quantas combinações podemos fazer.

Pedro está escolhendo um sorvete de uma bola com um tipo de cobertura. Mas as opções são muitas. De quantas maneiras diferentes Pedro pode montar seu sorvete?

Para facilitar a resolução desse problema, vamos fazer uma tabela:

Figura 12 - Extraída de Giovanni Jr e Castrucci (2009a, p. 53)



Cobertura \ Sabor	Coco	Abacaxi	Flocos	Creme
Caramelo				
Chocolate				
Morango				

Editoria de arte

Pelo quadro, temos:

3 + 3 + 3 + 3 = 12 → maneiras diferentes de montar o sorvete

Como são 4 tipos de sorvete e 3 tipos de cobertura, calculamos o número de maneiras diferentes de montar o sorvete efetuando o produto de 4 por 3.

$$\underbrace{4}_{\text{tipos de sorvete}} \times \underbrace{3}_{\text{tipos de cobertura}} = 12 \rightarrow \text{maneiras diferentes de montar o sorvete}$$

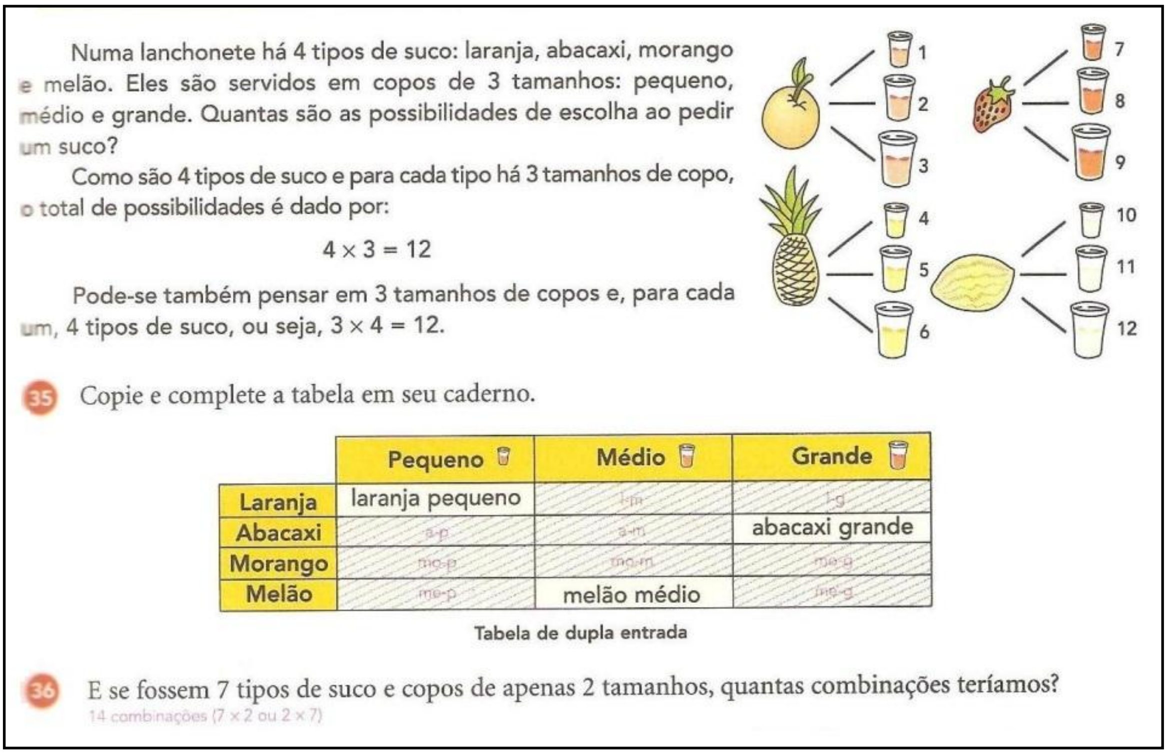
Pedro pode montar o seu sorvete de 12 maneiras diferentes.

Esta coleção não favorece a construção gradativa do pensamento combinatório, uma vez que trabalha com um só tipo de problema de contagem (*produto cartesiano*) e não retoma o conteúdo nos demais volumes. Nessa coleção não há uma preocupação em abordar os diversos conceitos presentes na **Análise Combinatória**, tais como o *arranjo*, a *permutação* e a *combinação*. Além disso, o único livro que traz o conteúdo (o do 6º ano) apresenta-o apenas como uma das ideias associada à multiplicação, não priorizando que o aluno construa suas próprias estratégias de resolução, visto que induz a uma resolução através do *produto cartesiano*; também não explora a utilização das diversas formas de representação de listagem dos agrupamentos. Ao mesmo tempo, o autor não aborda a **Combinatória** em nenhum dos outros livros da coleção, fazendo com que os alunos não tenham contato com esse conteúdo no decorrer dos outros anos do Ensino Fundamental.

2.3.3 Tudo é Matemática, 6º ao 9º ano, Dante (2009)

O conteúdo é abordado no livro do 6º ano, **Capítulo 2: Operações fundamentais com números naturais**, no tópico "*Multiplicação: ideias associadas e algoritmos*". Nesse tópico, o autor apresenta algumas ideias associadas à multiplicação, sendo que uma delas é o "*cálculo do número de possibilidades ou combinações possíveis*", onde inicialmente é apresentado um exemplo que é resolvido pela ideia do *princípio multiplicativo* e que explora a *árvore de possibilidades* e a *tabela* como forma de representação da listagem de possibilidades, conforme exemplo da figura 12 logo abaixo:

Figura 13 - Extraída de Dante (2009a, p. 39)



Numa lanchonete há 4 tipos de suco: laranja, abacaxi, morango e melão. Eles são servidos em copos de 3 tamanhos: pequeno, médio e grande. Quantas são as possibilidades de escolha ao pedir um suco?

Como são 4 tipos de suco e para cada tipo há 3 tamanhos de copo, o total de possibilidades é dado por:

$$4 \times 3 = 12$$

Pode-se também pensar em 3 tamanhos de copos e, para cada um, 4 tipos de suco, ou seja, $3 \times 4 = 12$.

35 Copie e complete a tabela em seu caderno.

	Pequeno	Médio	Grande
Laranja	laranja pequeno	l-m	l-g
Abacaxi	a-p	a-m	abacaxi grande
Morango	mo-p	mo-m	mo-g
Melão	me-p	melão médio	me-g

Tabela de dupla entrada

36 E se fossem 7 tipos de suco e copos de apenas 2 tamanhos, quantas combinações teríamos?
14 combinações (7×2 ou 2×7)

O tema é retomado apenas no livro do 9º ano, **no capítulo 10: Noções de Estatística e Probabilidade**, no tópico "*Noções de Probabilidade*" onde o pensamento combinatório é abordado com o objetivo de auxiliar o cálculo de probabilidades.

Nesse livro, o autor explora o conteúdo em apenas dois problemas de *permutação simples*: um sobre a formação de números com três algarismos distintos e outro sobre a formação de anagramas com a palavra AMOR. Nesses problemas não são utilizadas nenhum tipo de representação de listagem de possibilidades, como é possível observar abaixo:

Exemplo 7: *Forme todos os números possíveis de três algarismos distintos com os dígitos 1, 2 e 3. Depois, responda em seu caderno:*

a) *Qual a probabilidade de, escolhendo um desses números ao acaso, ele ser par?*

b) *Qual a probabilidade de, na escolha de um desses números, ele ser ímpar?*

c) *Qual a probabilidade de, na escolha de um desses números, ele ser maior do que 100?*

d) *Qual a probabilidade de, na escolha de um desses números, ele ser menor do que 100?*

e) *Qual a probabilidade de, na escolha de um desses números, ele ser menor do que 220?*

Exemplo 8: *Veja alguns anagramas da palavra AMOR: AMOR, ROMA, MORA, OMAR. Escreva em seu caderno todos os anagramas da palavra AMOR e responda:*

a) *Quantos são os anagramas formados?*

b) *Quantos terminam em vogal?*

c) *Sorteando ao acaso, qual a probabilidade de um desses anagramas terminar em vogal?*

d) *Sorteando ao acaso, qual a probabilidade de um desses anagramas começar e terminar em consoante?*

Embora o autor incentive o uso de diversas formas de representação e listagem dos casos possíveis, novamente, o *raciocínio combinatório* não é trabalhado de forma gradativa, uma vez que só aparece como uma idéia ligada à multiplicação e no auxilio do cálculo de probabilidades. Mesmo apresentando problemas que envolvem as ideias de *princípio multiplicativo* ou *permutação simples*, o autor não traz problemas que envolvem a ideia de *arranjo* e de *combinação*, nem faz distinção entre os diferentes tipos de agrupamentos presentes na **Análise Combinatória**. Além disso, falta uma continuidade do conteúdo no que diz respeito a sua abordagem ao longo das séries do Ensino Fundamental.

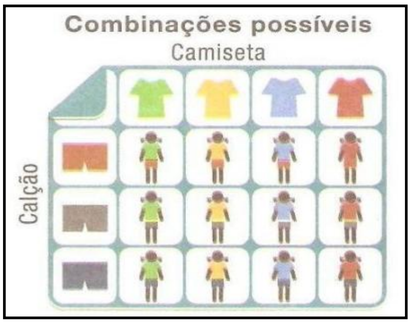
2.3.4 Vontade de saber Matemática, 6º ao 9º ano, Souza e Pataro (2009)

O livro do 6º ano enfatiza o pensamento combinatório ligado à ideia de multiplicação, quando apresenta, no **capítulo 3: Operações com Números Naturais**, no tópico "*Multiplicação*", um problema resolvido onde explora representações da *tabela* e da *árvore de possibilidades*, seguido da aplicação do *princípio multiplicativo*. (Veja abaixo no exemplo 9). Em seguida apresenta dois problemas cuja ideia de resolução é a mesma do problema resolvido.

Exemplo 9: *Para compor o uniforme da equipe de handebol feminino da escola, formado por um calção e uma camiseta, as atletas escolheram entre três opções de calção e quatro de camiseta. Podemos obter o número de combinações possíveis de duas maneiras:*

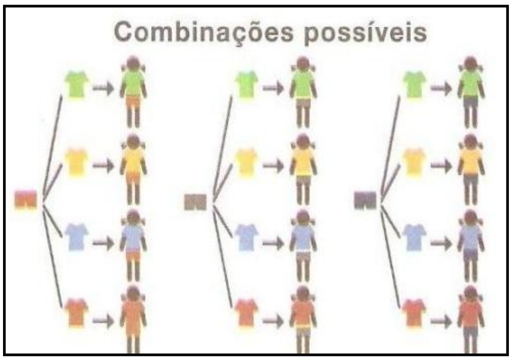
- *por meio de uma tabela*

Figura 14 - Extraída de Souza e Pataro (2009a, p. 56)



- *por meio de um diagrama de árvore*

Figura 15 - Extraída de Souza e Pataro (2009a, p. 56)



Dessa forma, temos 12 combinações diferentes para compor o uniforme. Também podemos obter o número de combinações multiplicando o número de opções de calção (3) pelo número de opções de camiseta (4), ou seja, 3= 12.
Agora, calcule o número de combinações de uniformes se os atletas pudessem escolher entre 2 opções de calção e 4 opções de camiseta.

Exemplo 10: *Tânia foi a uma lanchonete e leu o cardápio a seguir:*

Figura 16 - Extraída de Souza e Pataro (2009a, p. 56)

QUE DELÍCIA
LANCHONETE

Lanches

Cachorro-quente	R$ 3,00
Misto-quente	R$ 2,00
Hambúrguer	R$ 4,00
X-Salada	R$ 4,00
X-Bacon	R$ 5,00
X-Frango	R$ 5,00

Sucos

Laranja	R$ 1,00
Limão	R$ 1,00
Abacaxi	R$ 2,00
Goiaba	R$ 2,00

Sobremesas

Pudim	R$ 2,00
Fatia de bolo	R$ 1,00
Sorvete	R$ 1,00

a) *De quantas maneiras diferentes Tânia pode escolher um lanche, um suco e uma sobremesa nessa lanchonete?*

b) *Quanto Tânia vai pagar se escolher um cachorro-quente, um suco de abacaxi e um pudim?*

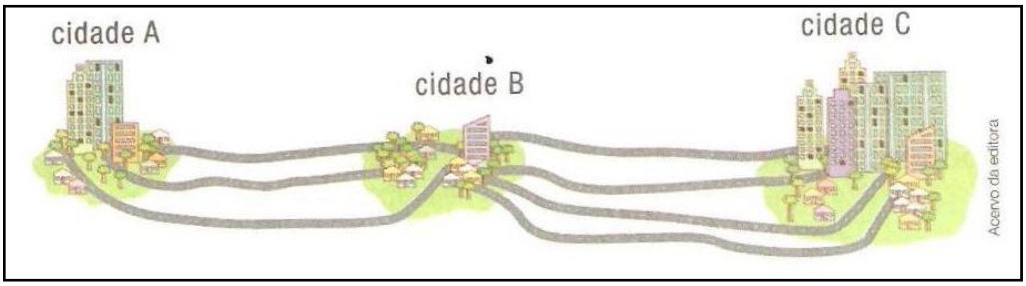
c) *Que combinações, com um lanche, um suco e uma sobremesa, Tânia pode fazer gastando no máximo R$ 4,00?*

Além do livro dedicado ao 6º ano, o conteúdo é trabalhado novamente apenas no livro do 7º ano, no **capítulo 5: Tratamento da Informação**, no tópico: "*Possibilidades*", onde os autores apresentam um problema introdutório sobre as possibilidades da compra de um computador em uma loja, quando se tem três opções de configuração e duas formas de pagamento e na sua resolução é utilizada a *árvore de possibilidades* e a *tabela* para representar todas as possíveis soluções, generalizando com o *princípio multiplicativo*. Em seguida outros exemplos são resolvidos utilizando apenas o *principio multiplicativo*.

Os únicos conceitos de combinatória trabalhados são os de *produto cartesiano* e de *arranjo*. Para representar os agrupamentos são utilizados *diagramas*, *tabelas* ou *árvore de possibilidades*, como podemos perceber em um dos exemplos:

Exemplo 11: *Janaína está na cidade A e vai até a cidade C, passando pela cidade B. Para ir da cidade A até a cidade B há 3 rodovias, e da cidade B até a cidade C, 4 rodovias. Veja o esquema das cidades e das rodovias.*

Figura 17 - Extraída de Souza e Pataro (2009b, p. 134)



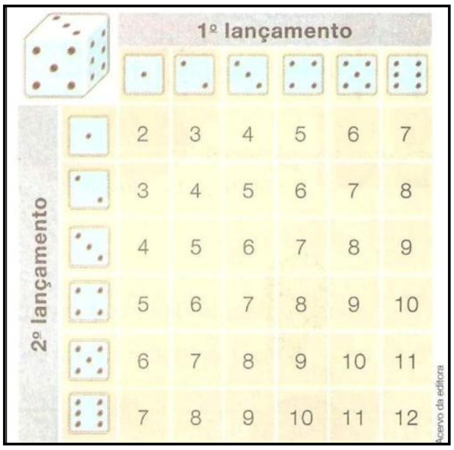
a) *Construa um diagrama de árvore e uma tabela de dupla entrada para representar a situação acima.*

b) *De quantas maneiras diferentes Janaína pode ir da cidade A até a cidade C, passando pela cidade B?*

Neste mesmo capítulo, no tópico "*Probabilidade*", os autores aplicam a contagem de possibilidades como forma de auxiliar no cálculo de probabilidades, conforme pode ser visto a seguir no exemplo 12.

Exemplo 12: *Certo jogo consiste em lançar duas vezes o mesmo dado e adicionar os pontos obtidos na face voltada para cima, vencendo o participante que obtiver a menor pontuação. O quadro apresenta as possibilidades de pontuação que um participante pode obter.*

Figura 18 - Extraída de Souza e Pataro (2009b, p. 138)



	1º lançamento					
2º lançamento	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Acervo da editora

De acordo com o quadro, responda às questões:

a) *Quantas possibilidades de resultados diferentes uma pessoa pode obter nesse jogo?*

b) *Qual a probabilidade de uma pessoa obter:*

- *10 pontos?*
- *12 pontos?*
- *5 pontos?*

c) *Em uma partida disputada por dois participantes, o 1º obteve no lançamento as faces (3) e (5). Qual a probabilidade de o 2º participante:*

- *Vencer a partida?*
- *Perder a partida?*

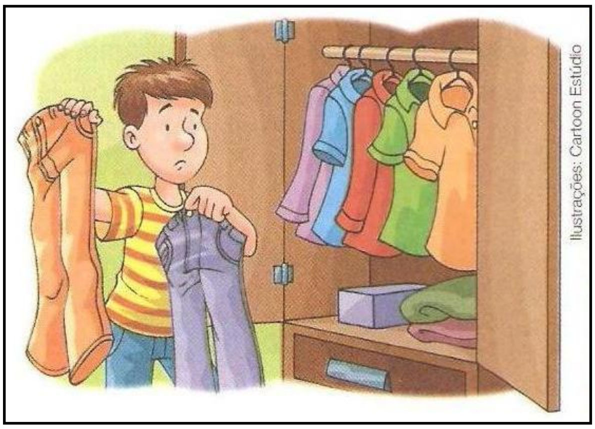
Nesta coleção, a metodologia adotada na resolução dos exercícios não prioriza as estratégias de resolução criadas pelo aluno, já que induz a aplicação direta do *princípio multiplicativo*. Também não explora outros problemas de **Análise Combinatória**, envolvendo *combinações* e *permutações*. Apesar disso traz diferentes formas de representação para a *contagem de possibilidades*.

2.3.5 Matemática e Realidade, 6º ao 9º ano, Iezzi, Dolce e Machado (2009)

No **capítulo 2: Multiplicação e Divisão** do livro do 6º ano, no tópico "*Problemas de contagem*", os autores apresentam alguns problemas (do tipo *produto cartesiano*), que para a resolução é induzido diretamente o *princípio multiplicativo*, não apresentando outras situações de contagem, nem formas de representação, conforme pode-se observar em um dos exemplos mostrado abaixo.

Exemplo13: *Ingo dispõe de duas calças e cinco camisas.*

Figura 19 - Extraída de Iezzi, Dolce e Machado (2009a, p. 31)



a) *De quantos modos ele pode escolher uma calça e uma camisa para se vestir?*

b) *Quantos dias ele pode usar essas peças de roupa sem repetir o mesmo conjunto calça-camisa, vestindo um conjunto por dia?*

O assunto só é retomado novamente no livro do 9º ano, no **capítulo 16: Contagem e Probabilidade**, no tópico de *contagem*, onde é apresentado um problema introdutório sobre as *possibilidades de combinação* na escolha do sabor e da cobertura de um sorvete. As possibilidades de escolha são representadas através de *diagrama da árvore*, seguido de aplicação direta do *princípio multiplicativo*. A partir deste exemplo, é enunciado o conceito de *princípio multiplicativo*, seguido de uma relação de exercícios propostos. Os problemas sugeridos são sobre *produto cartesiano*, *arranjos* e *combinação*, não trazendo a ideia de *permutação*, conforme é possível observar em dois dos problemas propostos, apresentados nos exemplos abaixo.

Exemplo 14: *Samanta vai à lanchonete do Pedrão comer um sanduíche e tomar um suco. Ela está em dúvida se vai ou não pedir a porção de fritas. De quantos modos ela poderá compor o pedido?*

Figura 20 - Extraída de Iezzi, Dolce e Machado (2009d, p. 176)

Exemplo 15: *Ari, Bete, Caio e Maíra encontram-se para jogar bola. Cada um cumprimentou todos os outros com um aperto de mãos.*

Figura 21 - Extraída de Iezzi, Dolce e Machado (2009d, p. 177)

a) *Quantos foram os apertos de mãos de Ari?*

b) *Quantos foram os apertos de mãos de Bete?*

c) *Quantos foram os apertos de mãos de Caio?*

d) *Quantos foram os apertos de mãos de Maíra?*

e) *Quantos foram os apertos de mãos entre Ari e Bete?*

f) *Qual foi o total de apertos de mãos?*

Nessa coleção os conceitos de **Análise Combinatória** são abordados de maneira mecânica, com aplicação direta do *princípio multiplicativo* seguido de uma relação de exercícios e sem explorar as diversas formas de representação de contagem, o que não oportuniza o aluno a desenvolver seu raciocínio combinatório e nem construir seus próprios procedimentos de resolução.

2.3.6 Matemática, 6º ao 9º ano, Bianchini (2006)

Novamente, nesta coleção, a abordagem do pensamento combinatório é feita somente no livro do 6º ano no **capítulo 2: Operações com números naturais**, no tópico "*Uma outra ideia associada à multiplicação*". Nesse tópico o conteúdo é introduzido por meio de uma situação problema sobre combinação de peças de roupas. O autor reforça o conceito com outro problema resolvido, neste caso, sobre possibilidades de escolha de um lanche escolhendo um entre três tipos de sanduíches, um entre dois tipos de sucos e um entre três tipos de doces.

O conceito é bem explicitado, já que em ambos os problemas o autor resolve mostrando todas as possíveis combinações por meio de *diagrama* para depois generalizar o *princípio multiplicativo*, explicando porque é possível realizar essa multiplicação. Porém, deixa a desejar ao explorar apenas o *diagrama de árvore* como estratégia de visualização de possibilidades, não fazendo uso de outras formas de representação.

Após essa explanação o autor propõe uma relação de oito exercícios que podem ser resolvidos utilizando o *princípio multiplicativo*, sendo que alguns desses problemas compreendem a ideia de *produto cartesiano*, *arranjo* ou *permutação*, conforme é possível perceber em um desses exercícios apresentado no exemplo 16 logo abaixo:

Exemplo 16: *Tenho três lápis de cor nas cores azul, amarelo e verde. Desejo pintar três faixas numa figura com essas três cores, usando uma para cada faixa, conforme mostra a figura 21 abaixo. De quantas maneiras poderei fazê-lo? Desenhe no caderno todas as possibilidades.*

Figura 22 - Extraída de Bianchini (2006a, p. 57)

A coleção não favorece a construção permanente do pensamento combinatório pelo aluno, visto que o conteúdo só é abordado numa série e não chega a ser retomado nos demais livros da coleção. Além disso, o único volume da coleção que aborda o conteúdo explora a utilização de apenas uma forma de representação de listagem dos agrupamentos: o *diagrama de árvore*.

Embora o livro didático ainda continue sendo o principal recurso utilizado no dia-a-dia das salas de aula pode-se perceber que a **Análise Combinatória** ainda é pouco explorada nos mesmos. Mesmo os livros que fazem essa abordagem não apresentam nenhuma distinção dos diferentes tipos de problemas combinatórios (*produto cartesiano, arranjo, permutação* e *combinação*) além de não destacar as semelhanças e diferenças entre os mesmos.

De maneira geral, é possível perceber que nos livros do 6º ano do Ensino Fundamental a **Análise Combinatória** aparece como uma ideia associada à multiplicação. Os livros apresentam quatro ideias fundamentais de multiplicação: adição de parcelas iguais, disposição retangular, proporcionalidade e combinação de possibilidades. Dessa forma, ao abordar a combinação, os livros apresentam a multiplicação de possibilidades como forma de se calcular as respostas em alguns exercícios de contagem, na maioria das vezes sem priorizar as diversas estratégias de resolução dos alunos. Nos livros de 7º e 8º anos, o conteúdo quase sempre nem chega a ser apresentado.

Já nos livros do 9º ano, a contagem geralmente aparece associada ao conteúdo de probabilidade, onde os cálculos de possibilidades servem de apoio ao cálculo das probabilidades de um evento acontecer. Assim, pode-se afirmar que, pelo fato de muitos livros não explorarem a Combinatória por si só, mas como ferramenta para outros conteúdos, este assunto geralmente acaba sendo visto de forma superficial, não sendo explorado, portanto, seus conceitos básicos, tais como *produto cartesiano, arranjo, permutação* e *combinação*.

Com isso, torna-se necessário que o professor busque sempre outros recursos que o auxiliem no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo tão essencial para a educação do discente, tais como buscas na internet, pesquisas diversas que envolvam o conteúdo ou mesmo adaptando problemas de outros livros do Ensino Médio para o nível do Ensino Fundamental.

Em nosso trabalho pretendemos mostrar a possibilidade de abordar **Análise Combinatória** nos anos finais do Ensino Fundamental, por meio de uma proposta de ensino a ser detalhada no próximo capítulo.

3 Uma abordagem Voltada ao Ensino Fundamental

3.1 Objetivos e Métodos

Esta é uma proposta pedagógica de inserção da **Análise Combinatória** nos anos finais (6º, 7º, 8º e 9º anos) do Ensino Fundamental, baseada nos quatro pilares considerados fundamentais para a aprendizagem deste tema, segundo (PESSOA e BORBA, 2009a): a *listagem de possibilidades*, o destaque para os *invariantes* de cada tipo de problema, a *sistematização* e a *generalização*, objetivando facilitar a compreensão de situações combinatórias, fazendo com que os alunos deste nível tornem-se capazes de estabelecer adequadamente estratégias e técnicas para solucionar problemas que permeiam sua vida.

Diante do exposto, esta proposta fundamenta-se nos seguintes objetivos:

- Propor o ensino da **Análise Combinatória** nos anos finais do Ensino Fundamental, possibilitando aos alunos interagirem com o conteúdo de forma integradora.

Para isso, pretendemos:

- Sondar o desempenho de alunos em solucionar problemas que envolvem o raciocínio combinatório, antes de um processo de ensino na temática;

- Propor uma sequência de atividades baseada nos quatro pilares considerados fundamentais para a aprendizagem da **Análise Combinatória**, tendo como foco o trabalho em equipe;

- Explorar princípios básicos de **Combinatória** nos anos finais do Ensino Fundamental, auxiliando os alunos a desenvolverem seu conhecimento nessa área e possibilitando uma posterior formalização no Ensino Médio.

Nessa proposta, os conteúdos matemáticos devem ser trabalhados levando os alunos a serem participantes ativos na construção de seu conhecimento. Os conhecimentos prévios, interesses, expectativas, e ritmos de aprendizagem devem ser valorizados nesta perspectiva. Assim, o papel do professor em seu processo de ensino deve ser de orientar os alunos, dando a eles a oportunidade de verificar suas dificuldades e necessidades, reconhecendo que a participação ativa dos alunos é essencial para que o conhecimento seja atingido.

De acordo com os PCNs, “O significado da atividade matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos e também entre estes (...) e as situações do cotidiano” (BRASIL, 1998, p. 37).

Bastos (2005) também destaca a importância do professor conhecer as ideias de seus alunos, pois estas podem parecer um obstáculo para o processo de ensino-aprendizagem, mas na realidade representam um importante ponto de partida para o mesmo, o que faz com que esta averiguação seja fundamental para que se consiga um ensino mais eficaz.

Partindo dessa ideia de que é importante valorizar o conhecimento prévio dos alunos na construção do seu conhecimento, propomos aplicar uma sondagem individual que investigue mais aprofundadamente o raciocínio combinatório, para posteriormente aplicar intervenções que possibilitem uma compreensão mais ampla da **Análise Combinatória**.

Com o intuito de diagnosticar a capacidade de resolver variados tipos de problemas a cerca da combinatória, convém que esta sondagem contenha os vários tipos de problemas que envolvem raciocínio combinatório: **Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação** e **Combinação**, de acordo com a classificação feita por Pessoa e Borba (2009a).

> *É possível desenvolver o raciocínio combinatório antes da introdução formal deste conteúdo na escola. Os alunos são capazes de desenvolver estratégias para resolver problemas combinatórios dos diferentes tipos. Assim, é importante que se observem as estratégias*

> *utilizadas pelos estudantes -- sejam as desenvolvidas diretamente por instrução escolar, sejam as aprendidas por meio de instrução indireta ou através de experiências extra-escolares -- ao resolverem problemas de Combinatória, pois seus procedimentos de resolução podem servir de base para a construção de intervenções mais próximas das suas formas de pensar sobre os problemas (PESSOA e SILVA, 2012, p. 1-2).*

Os problemas que envolvem conceitos combinatórios podem ser explorados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, pois estão presentes no cotidiano em situações que envolvem, por exemplo, expectativas de um acontecimento, regras de um jogo, combinação de placas de carro, escolha de vestimentas, senhas, combinações de sucos e sanduíches em uma lanchonete ou de sabores de um sorvete, entre outras.

Portanto, sugerimos agora, questões que podem ser aplicadas nesta investigação prévia.

Questão 1 - **Produto Cartesiano**

(Adaptado do livro de Mori e Onaga (2005, p. 78))

Lucas tem 3 camisas de cores diferentes: amarela, vermelha e azul. Ele tem também 2 calças de cores diferentes: azul e verde.

Com isso, ele está em dúvida sobre qual roupa usar.

Figura 23 - Imagem da questão 1

Fonte: Mori e Onaga (2005, p. 78)

Quantas possibilidades diferentes Lucas têm para escolher uma calça e uma camisa para vestir-se?

Questão 2 - Permutação

(Adaptado do livro de Bonjorno, Bonjorno e Olivares (2006, p. 249))

*Quatro carros, **A**, **B**, **C** e **D**, disputam uma corrida.*

Figura 24 – Imagem da questão 2

Fonte: http://2.bp.blogspot.com/-QPhFJVUvYqo/UWREdml5ebI/AAAAAAAAEE4/fgLZnAxeBCY/s1600/silversonte3.jpg <acesso em 28/04/2013>

Supondo que todos completem a prova, responda:

a) *Quantas e quais são as possibilidades de chegada desses carros se o carro A ficar em primeiro lugar?*

b) *Quantas e quais são as possibilidades de chegada desses carros se o carro B ficar em primeiro lugar?*

c) *Quantas e quais são as possibilidades de chegada desses carros se o carro C ficar em primeiro lugar?*

d) *Quantas e quais são as possibilidades de chegada desses carros se o carro D ficar em primeiro lugar?*

e) *Quantas são, no total, as possibilidades de chegada desses carros?*

Questão 3 - Arranjo

(Adaptado do livro Araribá (2006, p. 127))

Uma família com 4 pessoas dispõe de um carro de 5 lugares. Se apenas uma das pessoas sabe dirigir, de quantos modos as outras 3 pessoas poderão se acomodar para uma viagem nesse carro?

Figura 25 – Imagem da questão 3

Fonte: http://www.medodirigir.org/como-aprender-a-dirigir/. <acesso em: 22/01/2013>

Questão 4 - Combinação

(Adaptado do livro Araribá (2006, p.127))

A lanchonete da escola Sorriso oferece sucos com duas frutas diferentes misturadas. Sabendo que a lanchonete dispõe das frutas manga, laranja, abacaxi, morango, mamão e caju, quantos tipos de suco podem ser preparados misturando duas dessas frutas?

Figura 26 – Imagem da questão 4

Fonte: http://www.baressp.com.br/restaurantes/pizzarias/terra-santa-sucos <acesso em: 22/01/2013>

Estes problemas envolvem a contagem dos agrupamentos simples, ou seja, dos grupos em que não há repetição de nenhum elemento. Dessa forma, com esse estudo de sondagem pretende-se observar o que os alunos compreendem sobre problemas desse tipo, quais as dificuldades e facilidades identificadas, modo de compreensão e estratégias de resolução evidenciadas.

A partir da análise das estratégias e procedimentos de resolução utilizada pelos alunos é possível diagnosticar quais são as suas principais dificuldades nesta aprendizagem, bem como no entendimento e na construção do desenvolvimento do raciocínio combinatório, em especial dos conceitos sobre problemas que envolvem *produto cartesiano, arranjo, permutação* e *combinação*, verificando a existência prévia ou não de algum contato com esse tipo de conteúdo.

A seguir, detectadas as dificuldades, é imprescindível que os problemas sejam resolvidos com os alunos, destacando os invariantes dos mesmos e mostrando a importância em se utilizar diferentes esquemas e estratégias que facilitem a visualização das possibilidades de soluções.

Tomando como partida os resultados desta investigação prévia e das pesquisas bem sucedidas sobre o tema realizadas por (PESSOA e BORBA, 2009a), (PESSOA e BORBA, 2010), (PESSOA e BORBA, 2011) e (PESSOA e SANTOS, 2012), que também apresentam resultados sobre o ensino da **Análise**

Combinatória no Ensino Fundamental, propomos estratégias de abordagem deste conteúdo desde os anos finais dessa modalidade de ensino.

3.2 Introduzindo a Análise Combinatória no Ensino Fundamental

Consideramos importante explorar os quatro tipos de problemas combinatórios (*produto cartesiano, arranjo, permutação* e *combinação*), pois possibilita ao aluno conhecer as diferentes formas de abordagem da **Análise Combinatória**, levando-o a perceber as características comuns a cada tipo de situação.

Para trabalhar esses tipos de problemas, foram selecionados, em livros didáticos e outras fontes como banco de questões e provas da OBMEP, algumas questões que foram retiradas ou adaptadas para serem exploradas nos anos finais (6º, 7º, 8º e 9º anos) do Ensino Fundamental. Em alguns problemas, houve a necessidade de adaptá-los para o público alvo em questão. Em outros, por gerar um número de possibilidades muito grande, o que poderia dificultar a compreensão dos alunos no momento de enumerar as possibilidades, achamos conveniente reescrevê-los com o mesmo contexto, porém gerando um número menor de possibilidades. Outras questões foram adaptadas no sentido de aproximar o tema ao contexto dos alunos, aproximando-os de situações cotidianas. Outras questões ainda, na qual os livros apresentam apenas como parte de outros conteúdos (*Multiplicação em livros de 6º ano* ou *Probabilidade em livros de 9º ano*), foram adaptadas visando explorar diversos conceitos e propriedades a cerca da Combinatória.

Com isto, nesse segundo momento da proposta, os problemas são apresentados visando os seguintes objetivos:

- Levar os alunos a investigar e encontrar diferentes maneiras de possíveis soluções desses problemas;

- Explorar estratégias específicas como esquemas, tabelas, diagramas ou árvores de possibilidades na resolução das questões;

- Compreender os invariantes de cada tipo de problema combinatório;

- Generalizar e sistematizar soluções;

- Entender e aplicar o princípio multiplicativo em situações de contagem.

Acreditamos ser importante adotar uma metodologia de trabalho em grupo na sala de aula, pois ao interagir com os colegas durante a realização de algumas atividades os alunos têm a possibilidade de expor idéias, argumentar acerca de seus pontos de vista e discutir diferentes estratégias de soluções. Além disso, têm a oportunidade de desenvolver a capacidade de organizar seu raciocínio, comunicá-lo, bem como argumentar e ouvir seus colegas.

Segundo os PCNs,

> *a interação entre alunos desempenha papel fundamental no desenvolvimento das capacidades cognitivas, afetivas e de inserção social. (...) Assim, trabalhar coletivamente, por sua vez, favorece o desenvolvimento de capacidades como saber explicitar o próprio pensamento e procurar compreender o pensamento do outro (BRASIL, 1998, p. 38-39).*

Por isso é importante apresentar aos grupos situações que promovam a discussão dos conceitos combinatórios envolvidos, bem como as características invariantes e formas de representações simbólicas que estão contidas em cada situação.

No segundo momento devem ser trabalhados problemas que gerem um menor número de possibilidades, o que facilitará a listagem, a montagem de esquemas, bem como o entendimento de cada conceito combinatório (*produto cartesiano, arranjo, permutação* e *combinação*).

Para aplicar essa intervenção, podem ser trabalhadas, por exemplo, as seguintes situações-problema:

Problema 1 - **Produto Cartesiano**

(Retirado do livro de Bonjorno, Bonjorno e Olivares (2006, p. 252))

De quantos modos é possível formar um casal homem-mulher entre as pessoas a seguir?

Figura 27 – Imagem do problema 1

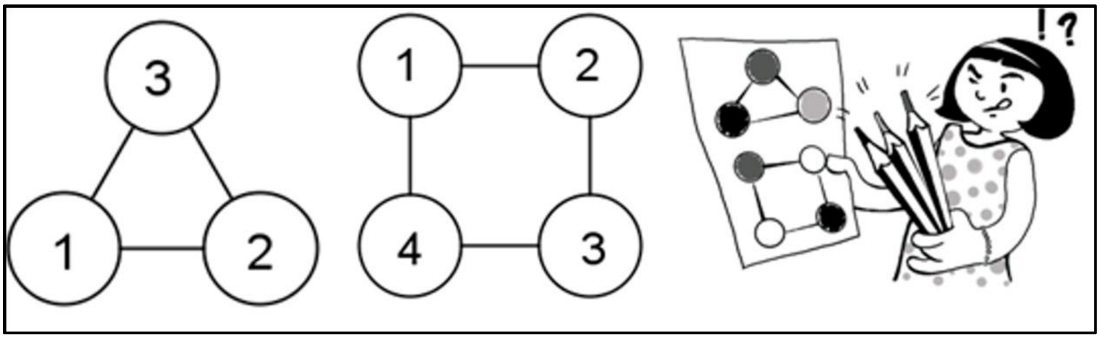
Fonte: Bonjorno, Bonjorno e Olivares (2006, p. 252)

Problema 2 - **Permutação**

(Adaptado da prova da OBMEP (2009, questão 5))

Ana quer colorir as bolinhas das figuras abaixo de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.

Figura 28 – Imagem do problema 2



Fonte: OBMEP (2009)

Sugestão: Reproduza as figuras e utilize lápis de cor para colori-las.

a) *De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 1 (triangular)?*

b) *De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 2 (quadrangular)?*

Problema 3 - Arranjo

(Fonte: AQUINO, C. A.)

O quadrangular final do futsal dos jogos escolares da cidade de Quixajuba será disputado por quatro equipes: Escola Saber, Colégio Novo Ensino, Colégio Paulo Freire e Escola Pitagórica. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?

Figura 29 – Imagem do problema 3

Fonte: http://pt.cutcaster.com/vector/901868222-Cartoon-winners-podium/. <acesso em: 22/01/2013>

Problema 4 - Combinação

(Retirado do banco de questões da OBMEP (2006, p. 58)- Nível 2)

Sete equipes, divididas em dois grupos, participaram do torneio de futebol do meu bairro.

O grupo 1 foi formado pelas equipes Avaqui, Botágua e Corinense.

O grupo 2 foi formado pelas equipes Dinossauros, Esquisitos, Flurinthians e Guaraná.

Na primeira rodada do torneio, cada equipe enfrentou cada uma das equipes do seu grupo exatamente uma vez.

Na segunda rodada do torneio, cada equipe enfrentou cada uma das equipes do outro grupo exatamente uma vez.

Figura 30 – Imagem do problema 4

Fonte: Araribá (2006, p. 160)

a) *Quantas partidas foram disputadas na primeira rodada no grupo 1?*

b) *Quantas partidas foram disputadas na primeira rodada no grupo 2?*

c) *Quantas partidas foram disputadas na segunda rodada?*

Para a realização desse segundo estágio de intervenção, montam-se os grupos e pede que os alunos tentem resolver as questões utilizando estratégias próprias. Nesse momento é importante que o professor não interfira no método de solução dos alunos, que ele tenha um papel de mediador, estimulando-os a resolverem os problemas, sem interferir diretamente nas respostas.

É importante enfatizar aos alunos que eles podem resolver os problemas da forma que considerarem melhor: usando *diagramas, desenhos, árvore de possibilidades, tabelas, gráficos, cálculos* ou quaisquer outros métodos.

Uma vez aplicada as questões, novamente devem ser discutidas as estratégias de soluções apresentadas por cada grupo, bem como suas dificuldades, enfatizando as características e as lógicas implícitas em cada tipo de problema, seus significados, para que sejam percebidos as regularidades, auxiliando-os numa possível generalização.

É importante que nessa discussão o professor apresente a resolução dos problemas por meio da listagem das possibilidades utilizando-se de estratégias diversificadas, como tabelas, diagramas, listagem e árvore de possibilidades, fazendo a generalização através do princípio multiplicativo. Além disso, devem ser consideradas outras formas de representação da listagem construídas pelos alunos.

De acordo com Pessoa e Borba (2010, p. 20)

> em sala de aula os variados significados, distintas relações e propriedades e diversificadas representações simbólicas que compõem as situações combinatórias devem ser aproveitadas da melhor forma possível, no sentido de auxiliar os alunos no desenvolvimento deste raciocínio.

Ainda segundo as autoras, **raciocínio combinatório** é “um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto” (PESSOA E BORBA, 2010, p. 2).

Na discussão da solução dos problemas, deve se destacar os invariantes presentes em cada situação. É importante que os alunos percebam e consigam compreender esses invariantes a cerca de cada problema combinatório.

Nos problemas em que estão presentes a ideia de *produto cartesiano*, os alunos devem perceber que dados dois (ou mais) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto. Ou seja, os agrupamentos resultantes contêm um elemento de cada agrupamento inicial, logo pode ser obtido por meio da multiplicação entre pares ordenados envolvendo os conjuntos distintos.

Nos problemas em que estão presentes a ideia de *permutação simples*, ou seja, sem repetição de elementos, os alunos devem perceber que todos os elementos do conjunto serão usados na formação dos possíveis agrupamentos, cada um apenas uma vez, observando que a ordem dos elementos gera novas possibilidades. É necessário que o aluno perceba que nesses problemas todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar as permutações, sendo que quando a ordem dos elementos é modificada, novas possibilidades são geradas.

Nos problemas em que estão presentes a ideia de *arranjo*, os alunos devem observar que tendo um número total de elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados escolhendo um número menor de elementos desse agrupamento total, percebendo que a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Nos problemas em que estão presentes a ideia de *combinação*, os alunos devem entender que tendo um número total de elementos, também poderão ser formados subconjuntos escolhendo um número menor de elementos desse agrupamento total, porém observando que a ordem dos elementos não gera novas possibilidades. De forma semelhante aos problemas de arranjo, tem-se um conjunto maior e dele são selecionados elementos para formar subconjuntos, porém nesse caso, invertendo a ordem dos elementos o agrupamento gerado permanece o mesmo.

Prosseguindo em nossa proposta, num terceiro momento, os tipos de problemas apresentados geram um maior número de possibilidades, objetivando levar o aluno a observar que a *listagem de possibilidades* pode ser muito trabalhosa e, com isso, perceber a necessidade da sistematização na resolução desses problemas, sem a necessidade de escrever todas as possibilidades.

Diante do número de possibilidades nas soluções dessas questões, pode ocorrer ao aluno não conseguir realizar a listagem das possibilidades ou não esgotar todas elas, e com isso se sentir cansado e desmotivado para resolver esses problemas. Assim, cabe ao professor exercer o papel de orientador e incentivador, conduzindo e organizando o trabalho em sala de aula, desenvolvendo a autonomia dos alunos, motivando-os a refletir, investigar, levantar questões e trocar ideias com os colegas, até quem sabe conseguirem generalizar e aplicar o princípio multiplicativo.

Dando continuidade a intervenção, podem ser apresentadas, por exemplo, as seguintes situações-problema:

Problema 5 - **Produto Cartesiano**

(Retirado do livro de Mori e Onaga (2005, p. 80))

Um marceneiro dispõe de três tipos de madeira (jacarandá, pinho, cerejeira) em dois tons (claro e escuro) e de três modelos de móveis (estante, barzinho, mesa). Quantos móveis diferentes ele poderá fazer?

Figura 31 – Imagem do problema 5

Fonte:
http://3.bp.blogspot.com/_XGc3YeS4Wxk/SGuSdslLl3I/AAAAAAAAAMo/LrPdFPHYtqY/s400/Estante+Simples+150+x+195+b.jpg; http://cidadesaopaulo.olx.com.br/movel-barzinho-para-sala-iid-284785281 e http://projetomoveleiro.blogspot.com.br/2010/03/mesa-madeira-macica.html. <acesso em: 22/01/2013>

Problema 6 - **Permutação**

(Adaptado da prova da OBMEP (2007, questão 16))

O mapa abaixo representa os estados em que está dividido a região Sudeste.

Figura 32 – Imagem do problema 6

Fonte: http://www.baixarmapas.com.br/wp-content/uploads/mapa-regiao-sudeste-capitais.jpg. <acesso em: 28/04/2013>

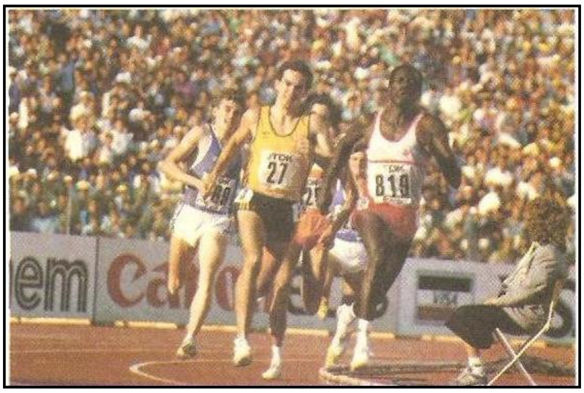
Manuela quer pintar esse mapa usando as cores amarelo, rosa, verde e laranja, cada estado de uma cor diferente. De quantas maneiras distintas ela pode pintar esse mapa?

Problema 7 - Arranjo

(Retirado do livro de Bonjorno, Bonjorno e Olivares (2006, p. 253))

Cinco atletas disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades de chegada para os três primeiros lugares?

Figura 33 – Imagem do problema 7



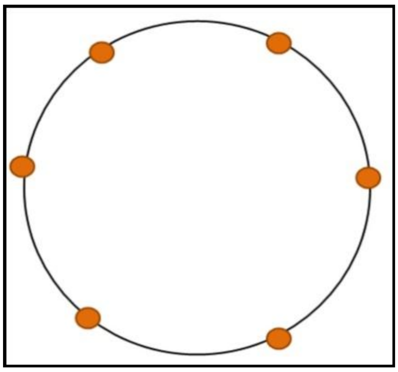
Fonte: Bonjorno, Bonjorno e Olivares (2006, p.253)

Problema 8 - Combinação

(Adaptado do banco de questões da OBMEP (2011, p. 37)- Nível 2)

Seis pontos são marcados ao redor de uma circunferência, como ilustra a figura.

Figura 34 – Imagem do problema 8



Fonte: Aquino, C. A (2013)

a) *Quantas cordas podem ser formadas ligando dois quaisquer destes pontos? (Uma corda é um segmento de reta ligando dois pontos sobre uma circunferência.)*

b) *Quantos triângulos podem ser formados ligando três quaisquer destes pontos?*

Ao término da aplicação desses problemas, mais uma vez devem ser discutidas as soluções apresentadas pelas equipes, observando o melhor procedimento e buscando a sistematização e a generalização.

Estes problemas não devem ser explorados em um único dia, mas no decorrer de várias aulas, em forma de uma sequência didática, uma vez que não é possível explorar todos esses conceitos em um único momento, de forma a obter uma aprendizagem significativa. O tempo estimado necessário à aplicação dessa proposta é de no mínimo seis aulas, sendo que para cada uma das três etapas devem ser reservadas pelo menos duas aulas. Em cada etapa, sugere-se que uma aula seja destinada à aplicação dos problemas e outra para a discussão das soluções apresentadas pelos alunos, sanando também suas dúvidas caso existam.

Durante toda a intervenção é necessário também fazer uma avaliação contínua e processual, observando o desempenho dos alunos no grupo, sua postura, suas dificuldades, envolvimento nas discussões e se as situações-problema foram adequadas ao processo. Conforme ratifica os PCNs:

> *(...) A avaliação é parte do processo de ensino e aprendizagem. Ela incide sobre uma grande variedade de aspectos relativos ao desempenho dos alunos, como aquisição de conceitos, domínio de procedimentos e desenvolvimento de atitudes. Mas também devem ser avaliados aspectos como seleção e dimensionamento dos conteúdos, práticas pedagógicas, condições em que se processam o trabalho escolar e as próprias formas de avaliação. (BRASIL, 1998, p. 57).*

Assim, a avaliação é uma forma de refletir sobre todos os elementos que compõem o processo de ensino e aprendizagem aplicados nesta proposta, de verificar a eficácia do método pedagógico do professor bem como verificar as dificuldades e necessidades dos alunos na construção do seu conhecimento.

De acordo com os resultados já apontados por outros autores, (ESTEVES, 2001) e (PESSOA e BORBA, 2011), os alunos podem sentir algumas dificuldades como, por exemplo: não conseguir realizar a listagem ou o não esgotamento de todas as possibilidades, sobretudo nos problemas que geram um número maior de possibilidades, discernir quando a ordem é ou não importante para gerar novos agrupamentos, não conseguirem construir relações corretas e conduzirem as resoluções por uma lógica alheia ao problema, dúvidas na operação aritmética resultante da interpretação incorreta do problema.

Dessa forma, é necessário também realizar uma avaliação individual dos alunos, pois assim o professor tem como refletir se os elementos de sua prática foram adequados aos objetivos que se pretendia atingir e se favoreceram a aprendizagem dos alunos. Conforme o resultado dessa avaliação é possível verificar se há a necessidade de realizar novas intervenções, de maneira a proporcionar aos alunos uma outra oportunidade de aprendizagem.

4 Considerações Finais

Apesar dos processos de contagem fazerem-se presentes em inúmeras situações do nosso cotidiano, o que se percebe é que na maioria das vezes a **Análise Combinatória** não é trabalhada nas séries finais do Ensino Fundamental, ficando sua exploração restrita apenas ao Ensino Médio. Quando essa abordagem é realizada, geralmente não é feita de maneira a priorizar o entendimento de seus conceitos. Ocasionando um dos motivos de dificuldade de aprendizagem desse conteúdo para os alunos no Ensino Médio, segundo apontado por alguns pesquisadores como Pessoa e Borba (2011) e Esteves (2001). Percebendo isto surgiu a motivação para a realização desse estudo.

Diante desse quadro, torna-se imprescindível que este assunto seja trabalhado também ao longo do Ensino Fundamental, através de princípios mais simples, sem a utilização de fórmulas, explorando situações que valorize os conhecimentos prévios de cada educando e estejam ligadas ao seu cotidiano, para que venha a propiciar um "*embasamento*" para auxiliá-los na compreensão da **Análise Combinatória** quando esta for explorada no Ensino Médio.

Assim, foi possível elaborar esse trabalho, cujo objetivo foi abordar o ensino de **Análise Combinatória** nos anos finais do Ensino Fundamental, através de uma sequência de atividades baseada nos pilares considerados fundamentais para a aprendizagem da **Análise Combinatória**, explorando seus princípios básicos de forma a auxiliar os alunos a desenvolverem seu conhecimento nessa área.

Para a viabilização desta proposta fez-se necessário uma análise prévia de outros trabalhos nessa área para fundamentar o estudo, como também análise de documentos oficiais voltados para o ensino de Matemática no que diz respeito ao conteúdo de **Análise Combinatória** e de materiais didáticos que o professor dispõe para o seu trabalho em sala de aula.

Ao analisar trabalhos de outros pesquisadores sobre o tema foi possível perceber que os autores enfatizam a necessidade de uma abordagem mais ampla do pensamento combinatório no Ensino Fundamental. Em linhas gerais, o que se pôde perceber é que essas propostas buscam valorizar o conhecimento prévio dos estudantes, as diversas estratégias de resolução que os mesmos utilizam, como também o trabalho em grupo.

Na análise de documentos oficiais voltados para o ensino de Matemática no Ensino Fundamental observou-se que todos eles também enfatizam a necessidade de abordar conceitos de contagem ao longo dessa modalidade de ensino. Esses documentos destacam a importância do contato com problemas de contagem nessa esfera de ensino para que o aluno compreenda o princípio multiplicativo e possa fazer uso de representações diversas como procedimentos de resolução.

Entretanto, pela análise realizada nos livros didáticos observamos que a maioria deles não está de acordo com as propostas apresentadas nos documentos oficiais, sendo necessário o professor recorrer a outros subsídios para realizar o seu trabalho, tais como bancos de questões, buscas na internet, pesquisas diversas que envolvam o conteúdo ou mesmo adaptando problemas de outros livros didáticos para serem explorados no Ensino Fundamental. Entre as coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental analisados, foi possível perceber que o conteúdo de Combinatória, quando é apresentado, na maioria deles, é feito de maneira superficial, geralmente vinculado a outros conteúdos, o que pode limitar a sua abordagem.

Assim, para abordar esse conteúdo no Ensino Fundamental, o professor precisa buscar outros recursos que subsidiem o seu trabalho. Neste sentido, verifica-se a importância da aplicação dessa proposta de ensino de **Análise Combinatória** nos anos finais do Ensino Fundamental, baseando-se nos pilares fundamentais para a aprendizagem da Combinatória: a listagem de possibilidades, o destaque para os invariantes de cada tipo de problema combinatório, a sistematização e a generalização.

Espera-se que essa proposta possa auxiliar professores do Ensino Fundamental na abordagem desse conteúdo, ajudando também os alunos, facilitando sua compreensão sobre situações combinatórias, para que sejam capazes de estabelecer adequadamente estratégias e técnicas para solucionar problemas que permeiam sua vida, além de formar uma base para um melhor entendimento do assunto quando esse for trabalhado no Ensino Médio.

Como a proposta não foi aplicada, fica como sugestão para trabalhos futuros que a mesma seja aplicada e descrito os seus resultados. No desenvolvimento dessa sequência de ensino, voltada para alunos de 6º a 9º anos, pode ocorrer de alunos de uma turma sentir maiores dificuldades que em outra turma. Assim, a partir da observação dos resultados deste estudo também convém que uma nova sequência de ensino seja desenvolvida, desmembrando esta proposta em quatro novas sequências, cada uma voltada para uma turma específica de um dos anos finais do Ensino Fundamental, o que pode tornar-se mais eficiente para o entendimento dos estudantes a cerca de problemas envolvendo a **Análise Combinatória**.

Referências

ALVES, Alessandro Caldeira. **Uma Introdução ao Pensamento Combinatório no 9º Ano do Ensino Fundamental**. 160 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. PUC-MG, Belo Horizonte, 2010.

ARARIBÁ. **Projeto Araribá: matemática / obra coletiva, Concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna** – 9º Ano do Ensino Fundamental. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2006.

BASTOS, F. Construtivismo e ensino de ciências. In: NARDI, R. **Questões atuais no ensino de ciências**. Série Educação para a ciência. São Paulo: Escrituras, 2005. p. 9-25.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática** – Obra em 4 V. - 6º Ano do Ensino Fundamental. 6. ed. São Paulo: Moderna, 2006a.

______. **Matemática** – Obra em 4 V. – 7º Ano do Ensino Fundamental. 6. ed. São Paulo: Moderna, 2006b.

______. **Matemática** – Obra em 4 V. – 8º Ano do Ensino Fundamental. 6. ed. São Paulo: Moderna, 2006c.

______. **Matemática** – Obra em 4 V. - 9º Ano do Ensino Fundamental. 6. ed. São Paulo: Moderna, 2006d.

BONJORNO, José Roberto; BONJORNO, Regina Azenha; OLIVARES, Ayrton. **Matemática: Fazendo a Diferença** - 9º Ano do Ensino Fundamental. São Paulo: FTD, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. (1º e 2º ciclos do ensino fundamental). v.3. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998.

CORREIA, Paulo Ferreira; FERNANDES, José Antônio; ALMEIDA, Fernando. **Ensino e aprendizagem das operações combinatórias no 12º ano de Escolaridade**. In: Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na escola. (org.). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, 2009.

COSTA, Claudinei Aparecido. **As concepções dos professores de Matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental.** 163 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2003.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática** - Obra em 4 V. – 6º Ano do Ensino Fundamental. 3. ed. São Paulo: Ática 2009a.

______. **Tudo é Matemática** - Obra em 4 V. – 7º Ano do Ensino Fundamental. 3. ed. São Paulo: Ática 2009b.

______. **Tudo é Matemática** - Obra em 4 V. – 8º Ano do Ensino Fundamental. 3. ed. São Paulo: Ática 2009c.

______. **Tudo é Matemática** - Obra em 4 V. – 9º Ano do Ensino Fundamental. 3. ed. São Paulo: Ática 2009d.

ESTEVES, Inez. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescente de 14 anos – 8ª série do Ensino Fundamental.** 203 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2001.

GIOVANNI Jr, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática –** Obra em 4 V. **–** 6º Ano do Ensino Fundamental. 1.ed. São Paulo: FTD, 2009a.

______. **A Conquista da Matemática –** Obra em 4 V. **– 7**º Ano do Ensino Fundamental. 1.ed. São Paulo: FTD, 2009b.

______. **A Conquista da Matemática –** Obra em 4 V. **–** 8º Ano do Ensino Fundamental. 1.ed. São Paulo: FTD, 2009c.

______. **A Conquista da Matemática –** Obra em 4 V. **–** 9º Ano do Ensino Fundamental. 1.ed. São Paulo: FTD, 2009d.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antônio. **Matemática e Realidade –** Obra em 4 V. – 6º Ano do Ensino Fundamental. 6.ed. São Paulo: Atual, 2009a.

______. **Matemática e Realidade –** Obra em 4 V. **–** 7º Ano do Ensino Fundamental. 6.ed. São Paulo: Atual, 2009b.

______. **Matemática e Realidade –** Obra em 4 V. **–** 8º Ano do Ensino Fundamental. 6.ed. São Paulo: Atual, 2009c.

______. **Matemática e Realidade –** Obra em 4 V. **–** 9º Ano do Ensino Fundamental. 6.ed. São Paulo: Atual, 2009d.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática –** Obra em 4 V. **–** 6º Ano do Ensino Fundamental. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009a.

______. **Matemática –** Obra em 4 V. **–** 7º Ano do Ensino Fundamental. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009b.

______. **Matemática –** Obra em 4 V. **–** 8º Ano do Ensino Fundamental. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009c.

______. **Matemática –** Obra em 4 V. **–**9º Ano do Ensino Fundamental. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009d.

MENEZES, Gabrielle Janaína Barros de; OLIVEIRA, José Sávio de Bicho. **Reflexões sobre a abordagem de Análise Combinatória em livros didáticos do Ensino Médio.** In: Anais do VII E P A E M **–** Encontro Paraense de Educação Matemática Cultura e Educação Matemática na Amazônia. Pará, 2010.

OBMEP. **Banco de questões da OBMEP –** Nível 2. 2006.

______. **Prova da OBMEP**. Nível 2 **–**1ª Fase. 2007.

______. **Prova da OBMEP**. Nível 1 **–** 2ª Fase. 2009.

______. **Banco de questões da OBMEP –** Nível 2. 2011.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce S. **Matemática: ideias e desafios** – 6º Ano do Ensino Fundamental. São Paulo: Saraiva, 2005.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes públicas de Ensino Pernambuco:** Matemática. Recife: SE, 2008.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O desenvolvimento do raciocínio combinatório dos anos iniciais aos finais da escolarização básica. In: **Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática** – IV SIPEM, 2009, Taguatinga – DF, 2009 a. p. 1-21.

______. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série**. ZETETIKÉ, UNICAMP, v. 17, nº 31, p. 105-150, jan./jun. 2009b.

______. (2010). O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. 2010. p. 1-22.

______. Resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos do 6º ao 9º ano. In: **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática** – **XIII CIAEM**, p. 1-17, Recife, 2011.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; SANTOS, Laís Thalita Bezerra dos. Listagem, invariantes, sistematização e generalização: Um caminho para o ensino de combinatória em uma Turma do 5º ano do ensino fundamental. In: **Anais do 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática** – **3º SIPEMAT.** Fortaleza, 2012. p. 1-13.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; SILVA, Monalisa Cardoso. Invariantes, generalização, sistematização e Estratégias bem sucedidas: o ensino da Combinatória no 9º ano do ensino fundamental. In: **Anais do 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática** – **3º SIPEMAT**. Fortaleza, 2012. p. 1-13.

PETROLINA. Secretaria Municipal de Educação – SMEP. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática** – Ensino Fundamental. Petrolina: SMEP, 2009.

SOUZA, Joamir; PATARO, Patrícia Moreno. **Vontade de saber Matemática** – Obra em 4 V. – 6º Ano do Ensino Fundamental. 1.ed. São Paulo: FTD, 2009a.

______. **Vontade de saber Matemática** – Obra em 4 V. – 7º Ano do Ensino Fundamental. 1.ed. São Paulo: FTD, 2009b.

______. **Vontade de saber Matemática** – Obra em 4 V. – 8º Ano do Ensino Fundamental. 1.ed. São Paulo: FTD, 2009c.

______. **Vontade de saber Matemática** – Obra em 4 V. – 9º Ano do Ensino Fundamental. 1.ed. São Paulo: FTD, 2009d.