UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT/UNIVASF

Magnum Miranda de Araújo

CONSTRUÇÃO DE CALCULADORAS DE FINANCIAMENTOS USANDO O MICROSOFT EXCEL: UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA A MATEMÁTICA FINANCEIRA

Juazeiro - Bahia

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Magnum Miranda de Araújo

CONSTRUÇÃO DE CALCULADORAS DE FINANCIAMENTOS USANDO O MICROSOFT EXCEL: UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA A MATEMÁTICA FINANCEIRA

Dissertação apresentada à Coordenação local do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UNIVASF, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Felipe Wergete Cruz

Coorientador: Prof. Anibal Livramento da Silva Netto

Juazeiro - Bahia

2013

	Araújo, Magnum Miranda.
A663c	Construção de calculadoras de Financiamentos usando o Microsoft Excel: uma proposta de ensino para a matemática Financeira/ Magnum Miranda de Araújo. -- Juazeiro, 2013.
	73f.: il. 29 cm.
	Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro–BA, 2013.
	Orientador: Prof. Felipe Wergete Cruz.
	1. Matemática Financeira. 2. Calculadoras. 3. Excel (Programa de Computador). I. Título. Cruz, Felipe Wergete. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco
	CDD 658.15

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Renato Marques Alves

Universidade Federal do Vale do São Francisco

Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT/UNIVASF

Construção de Calculadoras de Financiamentos Usando o Microsoft Excel: Uma Proposta de Ensino para a Matemática Financeira

Por

Magnum Miranda de Araujo

Dissertação aprovada em quinze de maio de 2013

Lucília Batista Dantas Pereira

Profa. Dra. Lucília Batista Dantas Pereira

Examinarora Externa- UPE

Prof. Dr. Alan Christie da Silva Dantas

Examinador Externo- UNIVASF

Aníbal Livramento da Silva Netto

Prof. Dr. Aníbal Livramento da Silva Netto

Coorientador - UNIVASF

Felipe Wergete Cruz

Prof. MSc. Felipe Wergete Cruz

Orientador- UNIVASF

Juazeiro 2013

Dedicatória

A minha mãe:

Maria Augusta Miranda de Araújo

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida, saúde e sabedoria com as quais fui capaz de chegar até aqui. Agradeço e saliento que a realização deste trabalho deve-se ao apoio irrestrito de meus pais, Francisco e Maria, dos meus irmãos, Vinícius e Leandro, das minhas avós, D. Bela e D. Evani e da minha noiva, Cínthia. Agradeço a boa vontade, o empenho e o incentivo dos professores Felipe Wergete, orientador, e Anibal Netto, coorientador, que deram subsídio para realização deste trabalho.

Sou grato a CAPES pelo incentivo financeiro através da concessão da bolsa de estudos. Agradeço a UNIVASF, especialmente a pessoa do Profº Severino Cirino, por dar subsídio a minha formação. Agradeço aos excelentes professores do mestrado: Edson, Evando, Renato e em especial ao professor Beto Rober. Externo meus agradecimentos aos meus colegas de turma Adriano, André, Claudivânia, Evandro, Francinária, George, Geraldo, Izabel, Levi, Márcio, Marcílio, Murilo, Poliana e Rutênio. Devo enfatizar Evandro, George, Geraldo e Izabel pelas parcerias ao longo do curso. Aos amigos matemáticos da graduação Anildo, Bob, Gilberto, Joselito, Neander, Rayala e Thiago e as Professoras Mirian Brito e Celeste Castro o meu muito obrigado.

Agradeço aos meus amigos/irmãos da casa dos estudantes de Miguel Calmon em Senhor do Bonfim e aos meus colegas de trabalho da Escola Estadual Polivalente de Miguel Calmon e do Centro Educacional Sagrado Coração - Cesc de Senhor do Bonfim pela compreensão e apoio.

Por fim, agradeço a todos que me ajudaram desde a minha infância até os dias atuais, dando-me conselhos e orientações para um bom caminho.

RESUMO

Esta proposta de ensino propõe o uso de calculadoras de financiamentos para melhoria do estudo do conteúdo matemática financeira, destacando neste os conceitos de razão, proporção, porcentagem, juros e financiamentos. Foi desenvolvido para dar subsídio aos professores que lecionam Matemática Financeira e também como melhoria da educação financeira dos estudantes. Está voltado para o ensino médio e traz um aprofundamento do conteúdo abordado pela maioria dos livros didáticos deste período escolar. Conceitua-se matemática financeira, traz definições e exemplos dos financiamentos pelos métodos PRICE e SAC, ensinando-se de forma objetiva e clara o processo de construção das calculadoras para esses tipos de financiamentos, necessariamente similares as que são usadas pelos bancos, mas não estão acessíveis a todos, com situações problemas ilustrativas para que possa subsidiar a intervenção.

Palavras Chaves: Calculadoras; Financiamentos; Matemática Financeira.

ABSTRACT

This is a teaching proposal concerning the use of financial calculators for improvement of the study of Financial Mathematics, highlighting the concepts of ratio, proportion, percentage, interest rates and financing rates. It has been developed for giving to the Mathematics teachers tools and improving the financial education of students. It is directed to High School and brings a deepening of the matter approached by the most of textbooks in this level. One defines Financial Mathematics, are brought some definitions and examples of the financings by PRICE and SAC methods, teaching them in a concise and clear way the process of making calculators for this kind of financings. These calculators are similar to the used in banks, but are clear for everyone, with quotidian problems for helping the interposition.

Keywords: Calculators; Financing; Financial Mathematics.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

A conjuntura financeira do Brasil, bem como a mundial, tem mudado bastante nos últimos anos. Num passado distante, nosso país viveu um momento histórico de superinflação e "sem juízo" econômico estabelecido. A taxa básica de juros, taxa referencial dos juros básicos praticados pelo governo, atualmente regulamentada e divulgada pelo Comitê de Política Monetária (COPOM), era altíssima. As bolsas de valores e sociedades corretoras, exemplos de mercado de capitais, que compõem um sistema de distribuição de valores que viabiliza o processo de capitalização, eram praticamente inexistentes. O equilíbrio da economia brasileira expôs o país ao mundo como um excelente mercado para investimento. Também trouxe para seus cidadãos novas oportunidades e desafios para quem ambiciona melhora financeira, a fim de que os mesmos entendam e usufruam de tais mudanças.

Como consumidores, ou mesmo investidores, precisamos acompanhar a postura do mercado financeiro, onde se faz necessário, criar ou dar valor a um objetivo traçado, seja a compra de um produto caro ou mesmo um investimento, pois, diante do cenário econômico atual, mais estabilizado e em fase de desenvolvimento, é possível pensar a longo prazo sem espanto e vincular a família ao raciocínio de sempre poupar para realizar um projeto financeiro. O comodismo, o não conhecimento e a passividade podem emperrar e prejudicar a "saúde financeira" da família, como podemos perceber nas palavras de Gitman (2004, p.4): "A área de finanças é dinâmica. Afeta diretamente a vida de todas as pessoas e organizações."

Oposto ao que parece, encarar os investimentos e financiamentos com um novo olhar e objetivos previamente estabelecidos, **não** é nenhum problema. Pelo contrário! Será perceptível que suas operações financeiras e seus sonhos tornarão mais próximos de serem realizados e que o envolvimento pleno levará o planejamento à condição de sucesso muito maior e mais rápido do que o programado. A educação financeira o deixa preparado para isso! Segundo Chiang (1982), Economia Matemática sendo uma abordagem à análise econômica não difere em nenhum sentido fundamental da abordagem não-matemática.

Esta educação financeira possui pequenos resquícios na escola, quando, em alguns cursos de nível médio, aprende-se uma matemática financeira limitada para a exigência do mercado financeiro. Em geral, estuda-se razão, proporção, porcentagem, juros simples compostos, numa perspectiva utilitária apenas para aprovações em concursos, conforme discussões que circulam entre alunos e professores.

Instigados pelo crescimento dos financiamentos e propagandas e preocupados com o endividamento de quem educamos, aprofundamos essa matemática financeira nessa proposta de ensino com o objetivo de dar subsídio ao indivíduo para entendimento da matemática financeira aplicada no dia a dia. Construindo um método de intervir, provocar e estimular o aluno do ensino médio a aprender mais sobre a vida financeira com situações cotidianas, elaboramos esta proposta em três capítulos e dois apêndices.

No primeiro capítulo, abordamos a matemática financeira comumente apresentada ao ensino médio: razão, proporção, porcentagem, juros simples e juros compostos.

No segundo capítulo, damos início à parte diferencial do nosso trabalho. Trazemos dois métodos de financiamentos: PRICE, caracterizado por ter parcelas fixas, e SAC, caracterizado por ter amortização constante da dívida, que eles só teriam conhecimento na graduação e em alguns cursos desta área. Trouxemos exemplos cotidianos e fórmulas que garantem o resultado, porém o objetivo específico e mais importante desta proposta é o desenvolvimento do raciocínio de modo que o indivídio seja capaz de entender o que acontece nestas operações. Temos o compromisso de contribuir para que o aluno perceba o que acontece nas situações e evitar que adquiram um produto pagando o preço de dois, por exemplo.

No terceiro capítulo, trazemos as ferramentas de intervenção. São duas calculadoras, comumente usadas pelos bancos, para realizarem empréstimos. No caso de financiamentos de veículos dá-se preferência ao uso do método de pagamento onde a parcela é fixa. Por outro lado, parcelas de diferentes valores, porém com amortização do capital constante, são usadas nos financiamentos de imóveis. Estas calculadoras foram construídas no *Microsoft Excel 2003* e o processo de construção é feito com minuciosos detalhes para que o leitor possa acompanhar e "criar" a sua própria máquina de calcular.

Os apêndices trazem um pouco da história de Richard Price e o desenvolvimento de uma fórmula para o montante de uma seqüência uniforme de depósitos.

Capítulo 1

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Segundo Zentgraf (2007, p. 26), o objetivo da matemática financeira é: "estudar a evolução do dinheiro ao longo do tempo, nos vários tipos de operações de investimento ou de empréstimo, estabelecendo as fórmulas que relacionam as quantias existentes em diferentes datas".

Sendo assim, a **Matemática Financeira** é um conteúdo da "matemática escolar" bastante presente na vida das pessoas que, mesmo sem perceber, a usa intuitivamente em recebimento do salário e organização dos gastos, nas compras parceladas ou com cartão de crédito, aplicações em caderneta de poupança, entre outras circunstâncias, também, práticas de empréstimos.

Para melhor entendimento desse conteúdo, trazemos neste capítulo uma situação que ajuda na compreensão do que é razão e proporção, treze exemplos com soluções detalhadas e faremos uma abordagem do conteúdo matemática financeira com muita minúcia para suprir a deficiência que a realidade da educação pública mostra, pois existem professores, possíveis usuários desta proposta de ensino, que não têm formação em matemática, contudo estão lecionando esta componente curricular por infinitos motivos, tais como, carência de profissionais na área, ou mesmo, professores que estão excedentes em suas áreas de formação.

1.1 Razão e Proporção

Nesta seção, definiremos *razão* e *proporção* segundo Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004) e Dante (2008), respectivamente, e conduziremos o leitor a desmistificar as operações de multiplicação e divisão, levando-o a compreender as simplificações de frações ou mesmo transformação de fração em números decimais.

Definição 1.1 *Razão entre dois números é o quociente entre esses números.*

Observe a seguinte situação: em duas salas de uma brinquedoteca existem dez crianças, de modo que na sala A estão quatro e na sala B, seis crianças. Para os lanches, têm-se algumas frutas, sendo 20 maçãs e 15 bananas. Chegada à hora da primeira merenda, a responsável teve o seguinte raciocínio: - se são duas salas, devo colocar 10 maçãs para cada uma, pois

$$\frac{20\,(\text{maçãs})}{2\,(\text{salas})} = 10.$$

Contudo, na hora de distribuir, percebeu que algo estava errado! Na sala A seria distribuída duas maçãs pra cada criança e ainda sobrariam duas. Entretanto, na sala B não havia fruta suficiente pra cada criança receber duas. Caso tentasse essa divisão, duas crianças receberiam apenas uma fruta, ou seja, estavam sobrando duas frutas na sala A e faltando duas na sala B. Então, ela teve outro raciocínio: - se são vinte maçãs e dez crianças, devo dar duas frutas a cada uma. E assim, completou a distribuição, dando as duas maçãs que sobraram na sala A às crianças da sala B.

Então, como primeira conclusão, pode-se perceber que as maçãs estavam relacionadas com as crianças de modo que cada criança receberia duas frutas, ou seja, a **razão** entre as frutas e as crianças era de duas para uma.

Chegada a hora da segunda merenda, a responsável, seguiu o critério de dividir as frutas de modo que cada criança recebesse a mesma quantidade.

E desta vez concluiu que 15 bananas divididas para 10 crianças, cada uma receberia uma fruta e meia. E assim, fez a divisão.

Como segunda conclusão, percebe-se que as bananas estavam relacionadas com as crianças na razão de $1,5$ fruta para cada criança.

Diante desta situação, qual deveria ser a quantidade de maçãs caso a quantidade de crianças fosse cinco na sala A e dez na sala B?

Moleza! Pensaria a responsável pela merenda. Ora, se cada criança deve receber duas maçãs, devem-se ter dez maças para a sala A e vinte para a sala B.

Mas, matematicamente falando, essa nova operação realizada é chamada de **proporção**.

Definição 1.2 *Duas grandezas são proporcionais se para cada valor x de uma delas corresponde um valor y bem definido na outra ($x \to y$), satisfazendo:*

(i) *quanto maior for x, maior será y, ou seja: se $x \to y$ e $x' \to y'$, então $x < x'$ implica $y < y'$;*

(ii) *se dobrarmos, triplicarmos, etc, o valor de x, então o valor correspondente de y será dobrado, triplicado, etc, ou seja: se $x \to y$, então $nx \to ny$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Note que da primeira situação, concluiu-se que seriam duas frutas para cada criança, pois:

$$\frac{20\,(\text{maçãs})}{2\,(\text{crianças})} = 10.$$

Na segunda situação, o número de crianças subiria para 15, logo o número de frutas deveria ser alterado para que fosse mantida a mesma quantidade para cada criança, assim, chamando de m a nova quantidade de maçãs, vê-se que:

$$2 = \frac{m\,(\text{maçãs})}{15\,(\text{crianças})} \Rightarrow m = 30.$$

Logo, percebe-se que: $2 = \frac{20}{10} = \frac{30}{15}$. Portanto, pode-se dizer que os números 20 e 30 são diretamente proporcionais aos números 10 e 15, respectivamente.

Também são proporcionais os números $15, 20$ e 35 aos números $12, 16$ e 28, nessa ordem. Pois:

$$
\begin{aligned}
\frac{15}{12} &= \frac{5}{4}\text{(simplificando a fração por 3),}\\
\frac{20}{16} &= \frac{5}{4}\text{(simplificando a fração por 4),}\\
\frac{35}{28} &= \frac{5}{4}\text{(simplificando a fração por 7).}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.1 *Sabendo que os números $2, x, 9$ e 11 são proporcionais aos números $6, 15, y$ e z, nesta ordem, determine os valores de x, y e z.*

Solução. Observemos que $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Então, as frações

$$\frac{x}{15}, \frac{9}{y} \text{ e } \frac{11}{z},$$

também devem apresentar a mesma fração irredutível. Logo:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{15} = \frac{1}{3} &\Rightarrow x = 5,\\
\frac{9}{y} = \frac{1}{3} &\Rightarrow y = 27,\\
\frac{11}{z} = \frac{1}{3} &\Rightarrow z = 33.
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.2 *Verificar se os números $6, 10$ e 27 são proporcionais aos números $3, 5$ e 9, nessa ordem.*

Solução. Percebamos que:

(i) $\frac{6}{3} = 2;$

(ii) $\frac{10}{5} = 2;$

(iii) $\frac{27}{9} = 3.$

Logo, pelos itens (i) e (ii) os números seriam proporcionais, contudo, o item (iii) faz com que o resultado do quociente seja diferente dos demais. Então, eles **não** são proporcionais.

Para maiores detalhes sobre *grandezas diretamente* e *inversamente proporcionais* veja Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004, p. 7).

1.2 Porcentagem

Definição 1.3 (Dante (2008)) *Porcentagem (ou percentagem) é uma amostra proporcional avaliada sobre uma quantidade de* 100 *unidades. Em outras palavras, porcentagem é o resultado da divisão por* 100*.*

Ou seja, são frações cujo denominador é 100. O símbolo % indica esse tipo de fração. Por exemplo:

(i) $50\% = \dfrac{50}{100}$;

(ii) $23\% = \dfrac{23}{100}$.

Note, ainda, que $25\% = \dfrac{25}{100}$, que é equivalente a $\dfrac{1}{4}$ ou ainda $0,25$. Mas, o que significa falar, por exemplo, em 30%? Significa que a cada grupo de 100 partes, 30 são selecionadas.

Exemplo 1.3 *Considerando-se uma pizza com* 10 *pedaços, dizer que um individuo comeu* 30% *da pizza, significa dizer que ele comeu* 3 *pedaços.*

De fato,

$$30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}.$$

Observação 1.1 *Note que que* $100\% = \dfrac{100}{100} = 1$, *ou seja, falar em "cem por cento" implica em selecionar o total.*

Exemplo 1.4 *Determinar:*

(a) 15% *de* 210*;*

(b) 25% *de* 400*;*

(c) $3,1\%$ *de* 62.

Solução.
(a) Percebamos que o total é 210, ou seja, 100%. Daí, fazendo-se um esboço de uma regra de três simples, segue que:

$$\frac{210}{100\%} = \frac{x}{15\%} \Rightarrow x = 31,5.$$

Portanto, $31,5$ correspondem aos 15% dos 210. Seguindo a linha de raciocínio do item **(a)**, temos que:

(b) $\dfrac{400}{100\%} = \dfrac{x}{25\%} \Rightarrow x = 100.$

(c) $\dfrac{62}{100\%} = \dfrac{x}{3,1\%} \Rightarrow x = 1,922.$

Exemplo 1.5 *Considerando que um produto custa* $R\$\,300,00$ *e está em uma promoção com* 12% *de desconto, qual o novo valor deste produto?*

Solução. Considerando que o produto tem um desconto de 12% concluimos que o desconto à ser dado é de $R\$\,36,00$, pois:

$$\frac{R\$\,300,00}{100\%} = \frac{x}{12\%} \Rightarrow x = R\$\,36,00.$$

Logo, o novo valor será de $R\$\,300,00 - R\$\,36,00 = R\$\,264,00$.
Outra solução. Por outro lado, se o produto tem um desconto de 12%, significa dizer que o novo valor será correspondente a 88% do total; daí:

$$\frac{R\$\,300,00}{100\%} = \frac{x}{88\%} \Rightarrow x = R\$\,264,00.$$

1.3 Juros

Empréstimo, na ultima década, foi um dos comércios mais rentáveis, dando aos bancos e às financiadoras, lucros exorbitantes. Acredita-se pelo fato de que "essas lojas de crediário" dispõem de um produto que não é perecível, não tem validade e possui "venda" certa: o dinheiro. Mas como pagar o "produto dinheiro" com o próprio "dinheiro"?

Em operações financeiras, necessariamente, empréstimos, a forma de quitação da dívida é feita por meio de pagamentos acrescidos de *juros*, isto é, o valor de quitação é sempre superior ao valor inicial. Segundo Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006), temos a seguinte

Definição 1.4 *Alguém que dispõe de um capital* C, *empresta-o a outrem por um certo período de tempo, e após esse período, recebe o seu capital* C *de volta, acrescido de uma remuneração* J *pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de* **juro**.

O juro é empregado em situações tais como: o risco da operação financeira, as perspectivas do mercado financeiro, os custos administrativos da situação, etc. Geralmente são relacionados em porcentagem. Nesta seção, estudaremos os *juros simples e compostos.*

Alguns termos são comuns nesse tipo de assunto, como por exemplo:

Capital (C) **= valor monetário da operação;**

Tempo (t) **= período da operação;**

Taxa (i) **= porcentagem referente à operação, definida por:** $i = \dfrac{J}{C}$**;**

Montante (M) **= soma do capital com o juro, isto é,** $M = C + J$**.**

1.3.1 Juros Simples

Definição 1.5 *O juro simples é a modalidade onde o "aluguel" do capital é incidido sobre, apenas, o próprio capital da operação.*

Vejamos a seguir um exemplo adaptado de Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006).

Exemplo 1.6 *Maria fez um empréstimo de* $R\$ \, 200,00$ *para ser pago em três meses. Ao fim do prazo, pagou* $R\$ \, 230,00$*. Os juros pagos por Maria foram de* $R\$ \, 30,00$ *e a taxa foi de* $\dfrac{30}{200} = 0,15 = 15\%$ *ao trimestre. O capital, que foi a dívida inicial de Maria, é igual a* $R\$ \, 200,00$ *e o montante, que é a dívida na época do pagamento, foi de* $R\$ \, 230,00$*.*

Estendendo o raciocínio um pouco mais, pode-se ver ainda que o tempo t da operação foi de três meses (trimestre) e que, nesta abordagem específica, pode-se afirmar, também, que a taxa é de 5% ao mês.

Exemplo 1.7 *Um capital de* $R\$ \, 350,00$ *foi emprestado à taxa de* 8% *ao mês durante seis meses. Neste caso, qual o montante pago findado o prazo?*

Solução. Como 8% de $R\$ \, 350,00 = 0,08 \, . \, 350 = R\$ \, 28,00$, segue que a cada mês este valor de $R\$ \, 28,00$ será somado ao montante anterior. Assim:

- O montante referente ao primeiro mês é $M_1 = R\$ \, 350,00 + R\$ \, 28,00 = R\$ \, 378,00$;
- Chegado o segundo mês, vem: $M_2 = R\$ \, 350,00 + R\$ \, 28,00 + R\$ \, 28,00 = R\$ \, 350,00 + 2 \, . \, R\$ \, 28,00 = R\$ \, 406,00$.

E assim por diante até o fim do prazo preestabelecido que, neste caso, é de seis meses. Logo:

$$M_6 = R\$ \, 350,00 + 6 \, . \, R\$ \, 28,00 = R\$ \, 518,00,$$

que é o resultado desejado.

Usando este exemplo, pode-se deduzir duas fórmulas:

$$\boxed{\text{M} = \text{C(1+ it)}} \tag{1.1}$$

e

$$\boxed{\text{J} = \text{C.i.t}}, \tag{1.2}$$

onde M = montante; C = capital; J = juro; i = taxa e t = tempo.

Segundo Kuhnen (1994), lembramos que a taxa i e o tempo t devem estar sempre na mesma unidade de tempo, ou seja, se a taxa estiver ao mês (a.m), o tempo será, necessariamente, em meses; se o período for apresentado em trimestres (a.t), a taxa será trimestral.

Exemplo 1.8 *Determine o capital que aplicado, a juros simples, à taxa de* 5% *ao ano, rende, ao fim de uma década,* $R\$\,3.600,00$ *de juros.*

Solução. Como $5\% = 0,05$ e uma década corresponde a 10 anos, usando a segunda fórmula acima, $J = C.i.t$, segue que:

$$3.600 = C.0,05.10 = 0,5\,C \Rightarrow C = \frac{3.600}{0,5} = 7.200,00.$$

Ou seja, o capital da operação é $R\$\,7.200,00$.

Exemplo 1.9 *Sabendo que, durante certo período, o valor de* $R\$\,128,00$, *aplicados a juros simples, com taxa de* 6% *ao mês, gera um montante de* $R\$\,181,76$, *determine este período.*

Solução. Sabendo-se que o montante é o capital somado ao juro, é imediato que $J = R\$\,53,76$. Logo, $C.i.t = 53,76$; daí:

$$128.0,06.t = 7,68\,t = 53,76 \Rightarrow t = \frac{53,76}{7,68} = 7.$$

Como a taxa usada foi mensal segue que o tempo de aplicação, deste questionamento, foi de sete meses.

Outra solução. Pensando-se numa forma mais resumida para a solução, usa-se a primeira das fórmulas acima, $M = C(1 + it)$, e então:

$$181,76 = 128(1 + 0,06\,t).$$

Daí:

$$1 + 0,06\,t = \frac{181,76}{128} = 1,42 \Rightarrow 0,06\,t = 0,42 \Rightarrow t = 7.$$

1.3.2 Juros Compostos

Definição 1.6 (Dante (2008)) *Juros Compostos são operações financeiras que ao final de cada período de capitalização o acréscimo obtido é somado ao valor inicial, compondo um novo capital aplicável por sucessivas vezes até atingir o prazo máximo do investimento.*

Existe um jargão popular que define os juros compostos como sendo "juros sobre juros", isso é aceitável, visto que a cada período de capitalização o juro do período anterior é somado ao valor inicial e se torna um novo capital que será sucedido de novo acréscimo.

Vejamos um exemplo adaptado de Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006), que sintetiza essa definição.

Exemplo 1.10 *Leandro emprestou* 500 *reais, a juros de taxa de* 15% *ao mês. Após um mês, o valor acumulado será um montante formado pelo capital mais o juro deste período que é de* $0,15 \times 500$ *reais* $= 75$ *reais, logo,* 575 *reais. Se Leandro e o devedor acordarem em prorrogar a quitação da dívida por mais um mês, conservada a mesma taxa, o empréstimo será liquidado, dois meses após ser contraído, por* $661,25$ *reais, pois os juros referentes à segunda capitalização serão de* $0,15 \times 575$ *reais* $= 86,25$ *reais.*

Percebamos agora que, na abordagem de juros simples, viu-se que 15% ao trimestre corresponderiam a uma taxa de 5% ao mês. Contudo, na capitalização composta isso **não** é válido, pois as taxas não são equivalentes.

Definição 1.7 (Lima et al., 2006) *Taxas equivalentes são taxas de juros que aplicadas a capitalizações diferentes, simples ou composta, geram o mesmo montante.*

Ainda segundo o autor, considerando-se a taxa de juros relativa a um período de tempo igual a i, a taxa de juros relativamente a t períodos de tempo é I tal que

$$1 + I = (1 + i)^t \,. \tag{1.3}$$

Para se chegar a esta fórmula, tornar mais transparente o raciocínio e entender melhor essa equivalência de taxas, necessita-se entender que: considerando um capital C, uma taxa i e um tempo t, as evoluções das operações seguem:

QUADRO 1 - Montante das capitalizações Simples e Composta

JUROS SIMPLES	JUROS COMPOSTOS
$M_1 = C(1+i)$	$M_1 = C(1+i)$
$M_2 = C(1+2i) = C + 2Ci$	$M_2 = C(1+i).(1+i) = C(1+i)^2$
$M_3 = C(1+3i) = C + 3Ci$	$M_3 = C(1+i).(1+i).(1+i) = C(1+i)^3$
$\ldots$	$\ldots$
$M_t = C(1+ti)$	$M_t = C(1+i)^t$

Então, para que o montante na capitalização simples seja igual ao da composta deve-se ter:

$$C(1+ti) = C(1+i)^t,$$

ou seja,

$$1 + ti = (1+i)^t.$$

Logo, para equivalência da taxa em t períodos, tomando-se $I = ti$, obtemos (1.3). Merece destaque a seguinte relação:

$$M_t = C(1+i)^t\,. \tag{1.4}$$

Vejamos um exemplo adaptado de Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006).

Exemplo 1.11 *A taxa anual de juros equivalente a* $9,6\%$ *ao mês é* I *tal que* $1 + I = (1 + 0,096)^{12}$. *Daí,* $I \cong 2,00 = 200\%$ *ao ano.*

Intuitivamente, um cidadão menos esclarecido poderia acreditar que $9,6\%$ ao mês resultaria em $9,6\%\,.\,12$ (meses) $= 115,2\%$ ao ano, o que é absurdamente **falso**.

Vejamos agora dois exemplos próximos da realidade para que fique mais claro o uso desta equivalência e transformação de taxas.

Exemplo 1.12 *Considerando um capital de* $R\$\,250,00$ *aplicados a taxa de* 5% *ao mês durante um semestre, determinar o montante ao final deste prazo.*

Solução. Percebamos que a taxa usada foi mensal, o período está dado em semestre e neste caso fica mais fácil usar a relação: 1 semestre = 6 meses. Daí, usando (1.4), vem:

$$M_6 = 250(1 + 5\%)^6 = 250(1,05)^6 = 335,02 \text{ reais.}$$

Ou seja, o montante será de $335,02$ reais.

Exemplo 1.13 *Considerando um capital de $R\$\,250,00$ aplicados a taxa de 3% ao ano durante cinco meses, determinar o montante ao final deste prazo.*

Solução. Desta vez, deve-se transformar a taxa anual numa taxa mensal. Daí, usando a fórmula da transformação, segue que:

$$1 + 3\% = 1,03 = (1 + i)^{12},$$

de onde resulta:

$$1 + i = \sqrt[12]{1,03} \cong 1,00247,$$

ou seja,

$$i = 0,247\%$$

é a taxa mensal equivalente. Aplicando (1.4), vem:

$$M_5 = 250(1 + 0,247\%)^5 = 250(1,00247)^5 = 253,10.$$

Ou seja, o montante ao final de cinco meses será de $R\$\,253,10$.

Capítulo 2

FINANCIAMENTOS

Os financiamentos são operações de compras e vendas realizadas, onde o bem é pago em parcelas que podem variar conforme o acordo firmado entre credor e devedor; elas podem ser de valores iguais ou diferentes e ainda serem acrescidas de juros ou não. Atualmente, é comum vermos produtos sendo vendidos a prazo com parcelas sem juros. Por outro lado, grande parte dos automóveis e dos imóveis vendidos são pagos através de financiamentos com pagamentos que chegam a 72 meses no caso dos carros, e a 35 anos no caso de casas e apartamentos. Para Mathias e Gomes (2007), os empréstimos são classificados de curto, de médio e de longo prazo. Sendo os de curto e de médio prazos saldados em até três anos.

Entre outros autores, Dante (2008), Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004) e Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006), foram usados para fundamentação desse capítulo, o qual faremos uma abordagem de dois métodos de financiamentos bastante utilizados: PRICE e SAC. Faremos isto com o intuito de aprofundar a matemática financeira trabalhada no ensino médio embasados nos PCNs (1999) que mostram que os alunos de ensino médio já têm condições de compreender e desenvolver consciência mais ampla dos seus direitos e responsabilidades e garantir que a aprendizagem do conteúdo sirva para a comunidade usar com propriedade nas regras e normas de um bom consumidor. Faremos tal aprofundamento e veremos oito exemplos, boa parte dos quais adaptados de Ayres (1971) e Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006), porém, com soluções mais claras e fáceis que a deste autor que exige mais conhecimento para compreensão.

Estes exemplos estão relacionados com o cotidiano para facilitar a compreensão e o desenvolvimento do próximo capítulo onde ensinaremos a construir calculadoras de financiamentos usando o programa Microsoft Excel. Com elas, o estudante consumidor poderá fazer ou auxiliar a família a praticar uma fiscalização dos financiamentos ou compras parceladas que fazem, e descobrir se a taxa e as parcelas estão de acordo com a propaganda, evitando que realizem a operação sem um conhecimento detalhado e seja mais um sujeito das histórias que ouvimos, comumente, de pessoas que caíram na tentação das compras parceladas, se endividaram, e depois ficaram sabendo que as taxas eram abusivas e muito distantes da realidade.

Para Kuhnem (1994), o objetivo da Matemática Financeira é dar respostas a algumas indagações relacionadas a investimentos como, por exemplo, quanto se paga de desconto pela antecipação do pagamento de uma parcela com vencimento posterior ou quanto paga-se mensalmente por um empréstimo.

Para melhor entendimento, algumas definições são explicitadas a seguir.

2.1 Método PRICE

Este método, segundo Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006), recebe este nome por causa do economista inglês *Richard Price*.

> *Richard Price, filósofo, teólogo e especialista em finanças e seguros, nasceu na Inglaterra em Tynton, Glamorgan, em fevereiro de* 1723*. Publicou vários livros e trabalhos, entre eles, sua mais famosa obra da área financeira e atuarial intitulada Observações sobre pagamentos reversíveis. Nessa obra, Price elaborou tabelas para o cálculo de juros compostos, explicou o financiamento por meio da sequência uniforme de pagamentos, o montante gerado por depósitos em sequência uniforme, rendas vitalícias em aposentadorias e cálculo de prêmio de seguros de vida. (Adaptado de Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004))*

Definição 2.1 (Kuhnen (1994)) *Financiamento PRICE é o método de financiamento pelo qual a devolução do capital somado aos juros é feita em prestações de mesmo valor e de mesmo intervalo de tempo entre as prestações.*

Este método é bastante usado, por exemplo, nos financiamentos de automóveis. Obviamente, no mercado financeiro, a quantidade de parcela e o juro acrescido variam conforme as situações, ou seja, quanto maior o número de parcelas, maior será a quantidade de juros pagos.

Modificando a abordagem de Lima et al.(2006), que necessita de um conhecimento maior para compreensão do assunto, e esclarecendo o conteúdo para o ensino médio da rede pública, podemos dizer que este método funciona da seguinte maneira: um capital C é financiado em n parcelas iguais. Cada uma dessas parcelas P é constituída por uma parte do valor financiado e os juros correspondentes ao período. Estes juros são previamente fixados à taxa i, que deve estar na mesma unidade de tempo que as parcelas. Ou seja, no caso de parcelas mensais, a taxa deve ser necessariamente, ao mês.

Então, percebamos que diferentemente de um pagamento único após o período de tempo, o valor financiado, será pago um pouco de cada vez. É importante visualizar que:

(i) o valor da primeira parcela será referente ao primeiro período, em outras palavras, será uma parte de C acrescidos dos juros deste período;

(ii) o valor da segunda parcela será referente ao segundo período, com as mesmas características da primeira (uma parte do capital somada aos juros do período) e assim sucessivamente até a última.

Fazendo um parâmetro entre as fórmulas $M = C(1+i)^t$, de *juros compostos*, e $M = P\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$, de *montante de uma sequência uniforme de depósitos* (ver Apêndice B), segue que:

$$P\frac{(1+i)^n - 1}{i} = C(1+i)^t\,. \tag{2.1}$$

Lembrando que a quantidade de parcelas implica na quantidade de tempo, tem-se que n (número de parcelas) $= t$ (tempo). Logo,

$$P = \frac{i\,C(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\,, \tag{2.2}$$

ou ainda:

$$\boxed{P = \frac{C\,i}{1-(1+i)^{-n}}}, \tag{2.3}$$

onde P representa o valor da prestação de uma compra cujo bem tem valor C, à vista, mas é financiado em n parcelas com taxa i.

Vejamos um exemplo de Lima et al. (2006, p. 52) no qual trazemos uma solução com uma linguagem facilitada para nossa realidade escolar.

Exemplo 2.1 *Um bem, cujo preço à vista é* $R\$\,120,00$, *é vendido em oito prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de* 8% *ao mês, determine o valor das prestações.*

Solução. Para esta solução e melhor compreensão do desenvolvimento da fórmula, proceder-se-á da seguinte maneira: os $R\$\,120,00$ têm a função de um capital emprestado a juros compostos que será pago em oito parcelas mensais. Diante da fórmula dos juros compostos, $M = C(1+i)^t$, segue que $C = \dfrac{M}{(1+i)^t}$. Observemos um esboço da situação de como o pagamento será realizado:

$$120 = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^8},$$

onde P é o valor da parcela, i é a taxa de juro e as oito frações são referentes às oito parcelas, ou seja, o "capital" de $R\$\,120,00$ será dividido e pago em oito prestações. Então:

$$120 = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^8}.$$

Multiplicando os dois membros da equação por $(1+i)^8$ para que sejam eliminados os denominadores, vem:

$$120(1+i)^8 = P\,(1+i)^7 + P\,(1+i)^6 + P\,(1+i)^5 + \cdots + P.$$

Colocando P em evidência no segundo membro da equação, obtemos:

$$120(1+i)^8 = P\,[(1+i)^7 + (1+i)^6 + (1+i)^5 + \cdots + 1].$$

Percebamos que a segunda parte desta igualdade é a soma dos termos de uma progressão geométrica (PG) com oito termos e razão igual a $(1+i)$, daí, usando a fórmula da soma dos termos da PG,

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

segue que:

$$1 + \cdots + (1+i)^5 + (1+i)^6 + (1+i)^7 = \frac{1\,.\,[(1+i)^8 - 1]}{(1+i) - 1} = \frac{[(1+i)^8 - 1]}{i}.$$

Logo, $120(1+i)^8 = P\,\dfrac{[(1+i)^8 - 1]}{i}$, ou seja

$$P = \frac{120i(1+i)^8}{(1+i)^8 - 1}.$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador desta fração por $\dfrac{1}{(1+i)^8}$, segue que:

$$P = \frac{120\,i}{1 - (1+i)^{-8}}.$$

Por fim, tomando-se $i = 8\%$ (dado na questão), vem:

$$P = \frac{120.8\%}{1 - (1+8\%)^{-8}} \cong 20,88,$$

ou seja, cada parcela terá o valor aproximado de $20,88$ reais.

Outra solução. Em busca duma forma mais resumida para a solução, aplicamos a fórmula $P = C\,\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$, onde $C = 120$, $i = 8\%$ e $n = 8$. Isto nos dá:

$$P = 120\frac{8\%}{1 - (1+8\%)^{-8}} = 120\frac{0,08}{1 - (1+0,08)^{-8}} \cong 20,88\,.$$

Neste exemplo, deixamos claro que "pode-se entender o raciocínio da questão" e encontrar a solução de uma forma mais elegante, como também pode-se simplesmente aplicar a fórmula e obter o mesmo resultado.

Com o intuito de mostrar uma aplicabilidade do conteúdo no cotidiano, o próximo exemplo traduz o desejo de vários jovens na idade do nosso público do ensino médio, que é a compra de um carro.

Exemplo 2.2 *Um automóvel usado, que custa R$ 25.000,00, foi negociado com o valor de R$ 5.000,00 de entrada e o restante dividido em 24 parcelas iguais, pagando a primeira trinta dias após a compra. Considerando uma taxa de 1,5% ao mês, determine o valor das parcelas.*

Solução. Considerando o valor do bem em $R\$ 25.000,00$ e a entrada em $R\$ 5.000,00$, é imediato que o financiamento será de $R\$ 20.000,00$. Daí, usando a fórmula para calcular as parcelas, segue que:

$$P = 20000\frac{1,5\%}{1-(1+1,5\%)^{-24}} = 20000\frac{0,015}{1-(1+0,015)^{-24}} = \frac{300}{1-0,699544} = 998,48.$$

Ou seja, cada parcela ficará no valor de $R\$ 988,48$.

Vejamos agora um outro exemplo onde se tem o propósito de chamar a atenção do aluno para que ele associe o conteúdo à situação de realizar um empréstimo.

Exemplo 2.3 *Certa quantia foi emprestada a taxa de* $1,61\%$ *ao mês, pelo prazo de* 48 *meses e com parcelas iguais no valor de* $R\$ 300,71$. *Determine o valor dessa quantia e o valor dos juros pagos na primeira parcela.*

Solução. Aplicando a fórmula acima, segue que:

$$300,71 = C\frac{1,61\%}{1-(1+1,61\%)^{-48}} = \frac{0,0161C}{1-(1,0161)^{-48}} = \frac{0,0161C}{1-0,4646} = \frac{0,0161C}{0,5354}.$$

Logo, $C = \dfrac{300,71\,.\,0,5354}{0,0161} = 10.000,00$. Assim, o valor financiado foi de $R\$ 10.000,00$ e os juros correspondentes a primeira parcela serão de:

$$J = C\,i \Rightarrow J = 10000\,.\,1,61\% = 10000\,.\,0,0161 = 161,00.$$

Portanto, o valor acrescido referente à primeira parcela é de $R\$ 161,00$.

Estendendo um pouco mais a solução do exemplo acima, vejamos o valor do juro da segunda parcela. Tem-se que as parcelas são fixas no valor de $R\$\,300,71$ e que a primeira traz $R\$\,161,00$ de juros, logo $R\$\,139,71$ será a quantia de amortização do valor principal. Daí, o novo valor da dívida será de $R\$\,10.000,00 - R\$\,139,71 = 9.860,29$ reais e os juros contabilizados na segunda parcela srão:

$$J = 9.860,29\,.\,1,61\% = 158,75 \text{ reais.}$$

Diante desta situação, segue-se com o raciocínio até a última parcela e tem-se, desse modo, os juros referentes a cada uma das prestações.

Exemplo 2.4 *Construir uma tabela de evolução/liquidação de uma compra no valor de $R\$\,150,00$, financiados com uma taxa de 2% ao mês com pagamento em 5 parcelas de igual valor.*

Solução. Construiremos uma tabela do tipo

NP	VP	J	A	Saldo Devedor
0				
1				
2				
3				
4				
5				

NP = nº de parcelas, VP = valor da parcela, J = juros e A = amortização

Tabela 2.1: Esboço do financiamento PRICE com 5 prestações.

onde

(i) a coluna NP indica o número de parcelas e a parcela "0" indica o momento da compra;

(ii) a coluna VP indica o valor de cada uma das parcelas, obtidas através da aplicação da fórmula $P = C\,\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$, que neste caso resulta em 31,82 reais cada;

(iii) a coluna J indica o valor do juro pago em cada parcela e é obtido através do produto entre o valor da dívida, no período, pela taxa de juro, como vimos anteriormente. Nesta situação, referente à primeira parcela tem-se $J = 150 \,.\, 2\% = R\$\, 3,00$;

(iv) a coluna A indica o valor que está sendo abatido da dívida e é obtido através da diferença entre o valor da parcela e o valor do juro da referida parcela. Então, $R\$\, 31,82 - R\$\, 3,00 = R\$\, 28,82$ é o valor amortizado no pagamento da primeira parcela;

(v) a coluna "Saldo Devedor" indica o valor da dívida desde o momento da compra ate a quitação. A partir do 1º pagamento, o saldo devedor é obtido através da diferença entre o valor do saldo devedor anterior e o valor amortizado.

Portanto, a solução será:

NP	VP	J	A	Saldo Devedor
0	-	-	-	R$ 150,00
1	R$ 31,82	R$ 3,00	R$ 28,82	R$ 121,18
2	R$ 31,82	R$ 2,42	R$ 29,40	R$ 91,78
3	R$ 31,82	R$ 1,84	R$ 29,99	R$ 61,79
4	R$ 31,82	R$ 1,24	R$ 30,59	R$ 31,20
5	R$ 31,82	R$ 0,62	R$ 31,20	R$ 0,00

NP = nº de parcelas, VP = valor da parcela, J = juros e A = amortização

Tabela 2.2: Esboço do financiamento PRICE com 5 prestações.

2.2 Método SAC

Este método é bastante utilizado pelas empresas credoras nos financiamentos a longos prazos, como por exemplo em financiamentos de imóveis. Segundo Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006):

Definição 2.2 *O Sistema de Amortização Constante (SAC), como o próprio nome sugere, é o sistema de financiamento onde a amortização da dívida é fixa em todas as prestações.*

O valor de cada prestação, semelhante ao do método PRICE, é constituído pela soma do juro com uma parcela de amortização da dívida.

Vejamos um exemplo que traz uma tabela de pagamentos na solução para visualizarmos e entendermos melhor a definição.

Exemplo 2.5 *Uma dívida de* $R\$\,150,00$ *é paga, com juros de* 2% *ao mês, em* 5 *meses, pelo SAC. Faça a planilha de amortização.*

Solução. Considere a Tabela 2.1, usada na solução do exemplo anterior. A preencheremos do seguinte modo:

(i) com $R\$\,150,00$ sendo o saldo devedor inicial:

NP	VP	J	A	Saldo Devedor
0	-	-	-	R$ 150,00
1				
2				
3				
4				
5				

NP = nº de parcelas, VP = valor da parcela, J = juros e A = amortização

Tabela 2.3: Esboço do financiamento SAC com 5 prestações.

(ii) a coluna da amortização terá parcelas no valor fixo de $R\$\,30,00$, pois, sendo a amortização constante, segue que: $R\$\,150,00 \div 5$ parcelas $= R\$\,30,00$. O saldo devedor é obtido através da diferença entre o valor do saldo devedor anterior e o valor amortizado. Neste caso, temos

NP	VP	J	A	$SaldoDevedor$
0	-	-	-	R$ 150,00
1			R$ 30,00	R$ 120,00
2			R$ 30,00	R$ 90,00
3			R$ 30,00	R$ 60,00
4			R$ 30,00	R$ 30,00
5			R$ 30,00	R$ 0,00

NP = nº de parcelas, VP = valor da parcela, J = juros e A = amortização

Tabela 2.4: Esboço do financiamento SAC com 5 prestações.

(iii) a coluna dos juros, para a primeira prestação, terá $J = C\,i = 150\,.\,2\% = R\$\,3,00$. De um modo geral, o juro de cada parcela será determinado pelo produto entre o saldo devedor pela taxa.

NP	VP	J	A	$SaldoDevedor$
0	-	-	-	R$ 150,00
1		R$ 3,00	R$ 30,00	R$ 120,00
2		R$ 2,40	R$ 30,00	R$ 90,00
3		R$ 1,80	R$ 30,00	R$ 60,00
4		R$ 1,20	R$ 30,00	R$ 30,00
5		R$ 0,60	R$ 30,00	R$ 0,00

NP = nº de parcelas, VP = valor da parcela, J = juros e A = amortização

Tabela 2.5: Esboço do financiamento SAC com 5 prestações.

(iv) a coluna do valor da parcela será composto pela soma dos juros com a amortização.

NP	VP	J	A	$SaldoDevedor$
0	-	-	-	R$ 150,00
1	R$ 33,00	R$ 3,00	R$ 30,00	R$ 120,00
2	R$ 32,40	R$ 2,40	R$ 30,00	R$ 90,00
3	R$ 31,80	R$ 1,80	R$ 30,00	R$ 60,00
4	R$ 31,20	R$ 1,20	R$ 30,00	R$ 30,00
5	R$ 30,60	R$ 0,60	R$ 30,00	R$ 0,00

NP = nº de parcelas, VP = valor da parcela, J = juros e A = amortização

Tabela 2.6: Esboço do financiamento SAC com 5 prestações.

Percebamos que os valores das parcelas são diferentes, contudo a amortização é sempre constante e diante desta solução vê-se que o valor dos juros é que faz as prestações terem valores distintos. Isso acontece porque a medida que se faz um pagamento, uma parte do valor inicial da dívida é amortizado e consequentemente diminui o valor que será capitalizado na parcela subsequente. Logo, a medida que o valor deste capital diminui, também diminuirá o valor dos juros.

A seguir, veremos um teorema citado e demonstrado por Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006, p.56).

Teorema 2.1 *No SAC, sendo n o número de parcelas e i a taxa de juros, temos*

$$A_k = \frac{SD_0}{n}, \quad SD_k = \frac{n-k}{n} SD_0, \quad J_k = iSD_{k-1}, \quad VP_k = A_k + J_k,$$

onde A_k, J_k, VP_k e SD_k são, respectivamente, a parcela de amortização, a parcela de juros, a prestação e o estado da dívida (isto é, o valor da dívida após o pagamento da prestação) na época k. Aqui, SD_0 é o valor da divida inicial.

Prova. Se a dívida SD_0 é amortizada em n quotas iguais, cada quota é igual a

$$A_k = \frac{SD_0}{n}.$$

O estado da dívida, após k amortizações, é:

$$SD_k = SD_0 - k\,\frac{SD_0}{n} = \frac{n-k}{n}SD_0.$$

As duas últimas fórmulas são óbvias. ■

Vejamos dois exemplos simples que fazem uso das fórmulas desse teorema para a solução.

Exemplo 2.6 *Uma dívida de R\$ 125,00 será liquidada, pelo método SAC, em cinco parcelas, com juros de 2% ao mês. Determinar o juro referente à segunda parcela.*

Solução. Fazendo uso da fórmula $J_k = i\,SD_{k-1}$ onde $k = 2$ (2ª parcela), vem:

$$J_2 = 2\%\,.\,SD_{2-1} = 0{,}02\,.\,SD_1.$$

Como,

$$SD_1 = \frac{5-1}{5}\,SD_0 = \frac{4}{5}\,.\,125 = 100,$$

segue que

$$J_2 = 0{,}02\,.\,100 = 2.$$

Ou seja, dois reais de juros na segunda parcela.

Exemplo 2.7 *Um imóvel no valor de R\$ 80.000,00 foi negociado, pelo método SAC, com uma entrada de 10% no ato da compra e mais 240 parcelas, sendo a primeira paga 30 dias após a compra. Sabendo que a taxa foi de 0,5% ao mês, determinar o valor da dívida após o pagamento da 108^a parcela.*

Solução. Ficou óbvio que o financiamento da questão foi de 72.000 reais e após o pagamento desta parcela tem-se um novo saldo devedor, que chamaremos de SD_{108} e terá um valor de:

$$SD_{108} = \frac{240 - 108}{240} \,.\, 72000 = 39600,$$

ou seja, o saldo devedor após o pagamento da centésima oitava parcela será de 39.600 reais.

Resolvidos esses dois exemplos que necessitaram, basicamente, da aplicação de fórmulas e foram necessários neste momento para dar um estímulo psicológico ao aluno, resolvamos agora um exemplo que exige um pouco de cautela e de mais raciocínio para a solução, pois será referente à compra de um apartamento com uma entrada de 30% e o restante financiado em 240 prestações. Contudo, para solução, exige-se uma interpretação no momento do pagamento da 91^{a} prestação.

Exemplo 2.8 *Um apartamento foi negociado em* 10 *de junho de* 2012 *por* $R\$\,250.000,00$. *As condições contratuais foram:*

- *Entrada de* 30% *do valor do bem;*
- *Mais* 240 *parcelas, com vencimento da primeira em* 10 *de julho de* 2012*;*
- *Taxa de* $0,5\%$ *ao mês.*

Determinar o valor de amortização em cada parcela e o valor da dívida para quitação, caso o devedor queira paga-lo em 10 *de janeiro de* 2020.

Solução. Observemos que

(i) 30% de entrada, corresponde a $250000 \times 0,3 = 75.000$ reais. Logo o financiamento será de $SD_0 = R\$\,175.000,00$ e a amortização em cada parcela será de:

$$A = \frac{175000}{240} = 729,17 \text{ reais.}$$

(ii) em 10 de janeiro de 2020, ele terá pago: 6 parcelas referentes ao período de julho a dezembro de 2012 somados com as 12 parcelas de cada ano de 2013 a 2019. Isto da um total de 90 parcelas.

Portanto, tomando-se $VP_k = A_k + J_k$, $A_k = \frac{SD}{n}$ e $J_k = i\,SD_{k-1}$ onde k é o número da parcela, segue que:

$$A_{91} = \frac{SD_0}{240} = \frac{175000}{240} = 729,17 \text{ reais}$$

e

$$J_{91} = i\,SD_{91-1} = 0,005 \times \frac{240-90}{240} \times 175000 = 546,87 \text{ reais.}$$

Daí:

$$VP_{91} = A_{91} + J_{91} = 729,17 + 546,87 = 1.276,04 \text{ reais.}$$

Portanto, a 91ª parcela, com vencimento em 10 de janeiro de 2020, terá o valor de $1.276,04$ reais. O saldo devedor neste período será de:

$$SD_{91} = \frac{240-91}{240} \times 175000 = 108.645,83 \text{ reais.}$$

Logo, em 10 de janeiro de 2020, o devedor desembolsará um montante formado pela parcela somada com o restante da dívida o que faz um total de $R\$\,109.921,87$.

Diante das definições e resoluções apresentadas neste capítulo, chamamos a atenção do leitor para perceber que o método SAC é mais viável, deixamos claro e acessível as fórmulas e o raciocínio para as possíveis interpretações. Também fizemos a construção das planilhas/tabelas de pagamentos que foram soluções dos questionamentos levantados, lembrando que o preenchimento de cada coluna era feito de forma "manual". Contudo, veremos no próximo capítulo, que esse preenchimento será feito pelo programa *Microsoft Excel* automaticamente, conforme iremos preparando as calculadoras.

Capítulo 3

CONSTRUÇÃO DE CALCULADORAS

Para Cóser (2008, p. 71) apud Borba e Penteado (2003, p. 87), "no momento em que os computadores, enquanto artefato cultural e enquanto técnica, ficam cada vez mais presentes em todos os domínios da atividade humana, é fundamental que eles também estejam presentes nas atividades escolares". Segundo Samanez (2010), o *Excel*, como simplesmente é chamado, é um software editor de planilhas eletrônicas do pacote da *Microsoft Office* muito conhecido que disponibiliza vários recursos que vão de uma simples soma até funções mais complicadas. Porém, a maioria dos usuários que utilizam essa ferramenta ainda desconhecem a multiplicidade de recursos que ela pode proporcionar.

Pensando nisto, a proposta deste estudo é indicar a criação de duas calculadoras com o objetivo de oferecer contribuições ao ensino da matemática financeira. Desta forma, serão apresentados "protótipos" para construção das mesmas e utilizadas situações problemas para ilustrar o alcance desta proposta.

Nesta seção, apresentaremos a parte substancial deste trabalho, ensinando e oferecendo aos interessados minuciosos detalhes para a construção das calculadoras com a mesma funcionalidade das usadas pelos bancos e agências credoras, porém, mais acessível ao público. Através de quatro exemplos relacionados com o cotidiano, buscamos as soluções contextualizando-as com as orientações para a construção, e damos todos os passos para evitar erros e garantir uma boa interpretação dos dados e custos. O interesse é despertar junto ao estudante e ao professor de matemática, um espírito de curiosidade para investigar operações financeiras e compreenderem o universo financeiro do qual são consumidores.

3.1 Calculadora PRICE

Definição 3.1 *Chamaremos de calculadora PRICE a calculadora que segue as regras do financiamento pelo método PRICE, e por ser construída no programa da Microsoft, o Excel, será estendida a apresentar uma tabela de pagamentos, bem como o montante e a porcentagem de juros ao final dos pagamentos.*

Neste primeiro momento, construiremos o “esqueleto” da calculadora que terá a aparência semelhante a da Figura 3.1, na qual chamamos atenção, apenas nesta figura, para a célula que conterá o valor fixo das parcelas. Deixamos claro que a formatação final fica a critério e gosto de cada usuário.

Figura 3.1: Esboço da calculadora PRICE

Para facilitar a construção e contextualizar, vejamos uma situação:

Exemplo 3.1 *Na aquisição de um refrigerador que custa* $R\$\,1.399,00$, *D. Maria, fez a seguinte opção de compra: deu* $R\$\,250,00$ *de entrada e parcelou o restante em seis parcelas no valor de* $R\$\,208,60$, *com juros de* $2,5\%$ *ao mês, pagando a primeira, trinta dias após a compra. Esboçar uma tabela de pagamento e verificar a veracidade no valor das parcelas com a referida taxa de juros.*

Solução. De posse do computador e com a planilha do Excel aberta, segua os seguintes passos:

(i) na célula A1 digite DADOS DA COMPRA;

(ii) na célula A3 digite VALOR DO PRODUTO;

(iii) na célula A4 digite VALOR DA ENTRADA;

(iv) na célula A5 digite VALOR FINANCIADO;

(v) na célula A6 digite TAXA DO FINANCIAMENTO;

(vi) na célula A7 digite NÚMERO DE PARCELAS;

(vii) na célula A9 digite TABELA PRICE DE PAGAMENTOS;

(viii) na célula A11, digite =“PARCELA FIXA NO VALOR DE:”&TEXTO(B17;“R$ 0,00”) ;

(ix) na célula A13 digite CRONOGRAMA DE PAGAMENTOS;

(x) nas células A15, B15, C15, D15 e E15 digite, respectivamente NP, VP, J, A e SALDO DEVEDOR;

(xi) nas células A16, A17, A18, A19, A20, A21 e A22 digite, respectivamente $0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6;

(xii) nas células A25, A26 e A27 digite, respectivamente TOTAL PAGO, TOTAL DE JUROS e PERCENTUAL DE JUROS TOTAIS.

Para fins de esclarecimento, informamos que “dados da compra” está sendo levado em conta a aquisição de um produto, mas, caso seja a contração de um empréstimo, seria “dados do financiamento”. A mesma linha segue para “valor do produto”. Após esses passos, obtemos a tabela mostrada na Figura 3.2.

Lembramos que a formatação das células da planilha que constitui a calculadora fica a critério de cada leitor. Uma sugestão para aparência seria:

(i) Mesclar e centralizar a linha 1 da coluna A até a coluna E e colocar a fonte em negrito com tamanho 16;

(ii) Mesclar e centralizar a linha 3 da coluna A até a coluna D, fazer o mesmo com as linhas 4, 5, 6 e 7 individualmente;

(iii) Selecionar as células mescladas neste item anterior juntamente com as células E3, E4, E5, E6 e E7 e colocar bordas;

	A	B	C	D	E	F	G
1	dados da compra						
2							
3	valor do produto						
4	valor da entrada						
5	valor do financiamento						
6	taxa do financiamento						
7	número de parcelas						
8							
9	tabela price de pagamentos						
10							
11	PARCELA FIXA NO VALOR DE:R$0,00						
12							
13	cronograma de pagamentos						
14							
15	NP	VP	J	A	SALDO DEVEDOR		
16	0						
17	1						
18	2						
19	3						
20	4						
21	5						
22	6						
23							
24							
25	total pago						
26	total de juros						
27	percentual de juros totais						
28							

Figura 3.2: Construção da calculadora PRICE

(iv) Mesclar e centralizar a linha 9 da coluna A até a coluna E e colocar a fonte em negrito com tamanho 14;

(v) Mesclar e centralizar a linha 11 da coluna A até a coluna E;

(vi) Centralizar as células das linhas $15, 16, \cdots, 22$ das colunas A, B, C, D e E;

(vii) Mesclar e centralizar, uma por uma, as linhas 25, 26 e 27 da coluna A até a coluna D;

(viii) Selecionar estas células juntamente com as células E25, E26 e E27 e colocar bordas ;

(ix) Selecionar as linhas de números 15 até 22 das colunas A, B, C, D e E e colocar bordas;

(x) Ajuste a largura da coluna "E" conforme o texto "SALDO DEVEDOR".

Reiteramos que as células que conterão informações de dinheiro serão apresentadas na forma de moeda com duas casas decimais, e as que conterão taxas, ficarão em porcentagem, também com duas casas decimais. Para estas formatações, seguir os seguintes passos:

(i) selecione as células E3, E4 e E5, clique o botão direito do mouse sobre a seleção. Abrirá uma caixa de texto na qual deve-se clicar em Formatar células. Em seguida, na nova caixa de texto aberta, na aba número, em categoria selecione moeda, e em casas decimais coloque 2, logo após, clique em OK;

(ii) clique com o botão esquerdo do mouse sobre a célula B16, em seguida com a tecla "shift" do teclado pressionada, clique na célula E22. O conjunto de células B16, B17, $\cdots$, B22, C16, C17, $\cdots$, C22, D16, D17, $\cdots$, D22, E16, E17, $\cdots$, E22 ficará selecionado. Clique o botão direito do mouse sobre esta seleção. Abrirá uma caixa de texto na qual deve-se clicar em Formatar células. Em seguida, na nova caixa de texto aberta, na aba número, em categoria selecione moeda, e em casas decimais coloque 2, logo após, clique em OK;

(iii) selecione as células E25 e E26, clique o botão direito do mouse sobre a seleção. Abrirá uma caixa de texto na qual deve-se clicar em Formatar células. Em seguida, na nova caixa de texto aberta, na aba número, em categoria selecione moeda, e em casas decimais coloque 2, logo após, clique em OK;

(iv) selecione a célula E6, clique o botão direito do mouse sobre a seleção. Abrirá uma caixa de texto na qual deve-se clicar em Formatar células. Em seguida, na nova caixa de texto aberta, na aba número, em categoria selecione Porcentagem, e em casas decimais coloque 2, logo após, clique em OK;

(v) selecione a célula E27, clique o botão direito do mouse sobre a seleção. Abrirá uma caixa de texto na qual deve-se clicar em Formatar células. Em seguida, na nova caixa de texto aberta, na aba número, em categoria selecione Porcentagem, e em casas decimais coloque 2, logo após, clique em OK.

Agora, vamos preencher as células com os referidos dados da questão. Para isto, seguir os seguintes passos:

(i) nas células E3 e E4 digitar, respectivamente 1399 e 250 (valor do produto e entrada);

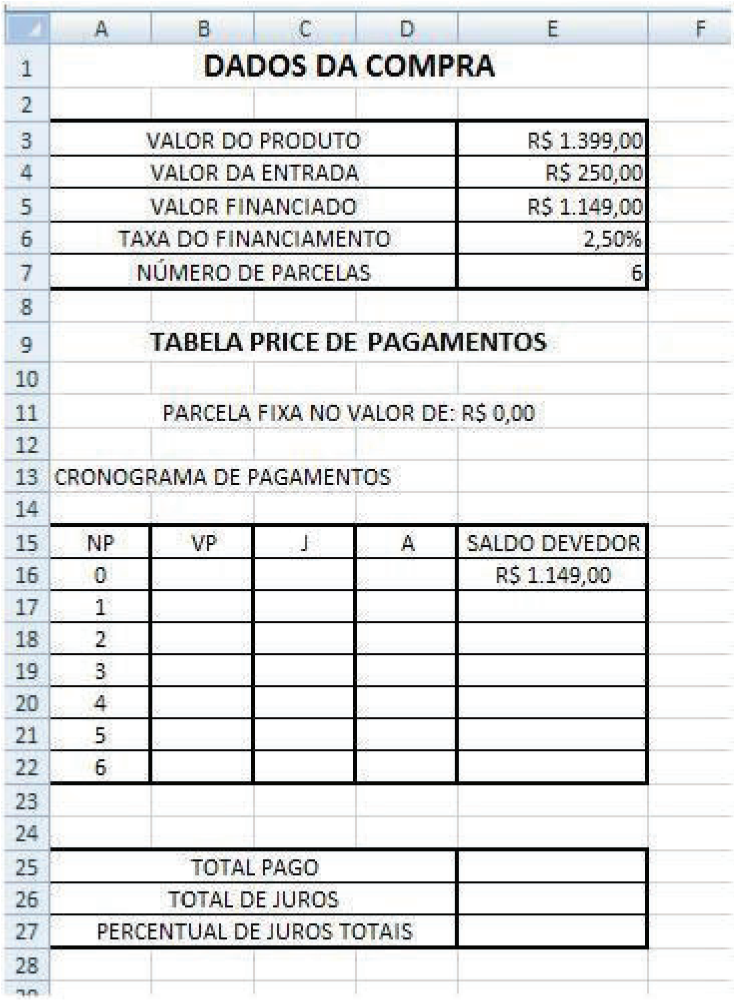
(ii) nas células E5, digitar =E3-E4;

(iii) em E6, digitar a taxa de juros, que no caso é de $2,5\%$;

(iv) em E7, digitar a quantidade de parcelas, que no caso são 6;

(v) em E16, digitar =C5.

Neste momento, teremos a Figura 3.3:



	A	B	C	D	E	F
1	DADOS DA COMPRA					
2						
3	VALOR DO PRODUTO				R$ 1.399,00	
4	VALOR DA ENTRADA				R$ 250,00	
5	VALOR FINANCIADO				R$ 1.149,00	
6	TAXA DO FINANCIAMENTO				2,50%	
7	NÚMERO DE PARCELAS				6	
8						
9	TABELA PRICE DE PAGAMENTOS					
10						
11	PARCELA FIXA NO VALOR DE: R$ 0,00					
12						
13	CRONOGRAMA DE PAGAMENTOS					
14						
15	NP	VP	J	A	SALDO DEVEDOR	
16	0				R$ 1.149,00	
17	1					
18	2					
19	3					
20	4					
21	5					
22	6					
23						
24						
25	TOTAL PAGO					
26	TOTAL DE JUROS					
27	PERCENTUAL DE JUROS TOTAIS					
28						

Figura 3.3: Calculadora PRICE com os dados iniciais da compra

Agora, vamos preparar a calculadora "para funcionar".

(i) na célula B17, digitar a fórmula: `=(E5*E6)/(1-(1+E6)^(-E7))` e pressionar a tecla "enter" do teclado;

(ii) na célula B18, digitar: =$B$17 e pressionar a tecla "enter" do teclado. O símbolo "$" serve pra fixar linha ou coluna de uma fórmula do excel. Para preenchimento das demais células da coluna B, selecionar a célula B18, direcionar o cursor do mouse no canto direito inferior da mesma, clicar com o botão esquerdo do mouse, segurar pressionado e arrastar até a última célula desta coluna;

(iii) na célula C17, digitar: =E16*$E$6 e pressionar a tecla "enter" do teclado. Para preenchimento das demais células da coluna C, selecionar a célula C17, direcionar o cursor do mouse no canto direito inferior da mesma, clicar com o botão esquerdo do mouse, segurar pressionado e arrastar até a última célula desta coluna;

(iv) na célula D17, digitar: =B17-C17 e pressionar a tecla "enter" do teclado. Para preenchimento das demais células da coluna D, selecionar a célula D17, direcionar o cursor do mouse no canto direito inferior da mesma, clicar com o botão esquerdo do mouse, segurar pressionado e arrastar até a última célula desta coluna;

(v) na célula E17, digitar: =E16-D17 e pressionar a tecla "enter" do teclado. Para preenchimento das demais células da coluna E, selecionar a célula E17, direcionar o cursor do mouse no canto direito inferior da mesma, clicar com o botão esquerdo do mouse, segurar pressionado e arrastar até a última célula desta coluna.

Neste momento, teremos a Figura 3.4:

	A	B	C	D	E	F
1		DADOS DA COMPRA				
2						
3		VALOR DO PRODUTO			R$ 1.399,00	
4		VALOR DA ENTRADA			R$ 250,00	
5		VALOR FINANCIADO			R$ 1.149,00	
6		TAXA DO FINANCIAMENTO			2,50%	
7		NÚMERO DE PARCELAS			6	
8						
9		TABELA PRICE DE PAGAMENTOS				
10						
11		PARCELA FIXA NO VALOR DE: R$ 208,60				
12						
13	CRONOGRAMA DE PAGAMENTOS					
14						
15	NP	VP	J	A	SALDO DEVEDOR	
16	0				R$ 1.149,00	
17	1	R$ 208,60	R$ 28,73	R$ 179,88	R$ 969,12	
18	2	R$ 208,60	R$ 24,23	R$ 184,37	R$ 784,75	
19	3	R$ 208,60	R$ 19,62	R$ 188,98	R$ 595,77	
20	4	R$ 208,60	R$ 14,89	R$ 193,71	R$ 402,06	
21	5	R$ 208,60	R$ 10,05	R$ 198,55	R$ 203,51	
22	6	R$ 208,60	R$ 5,09	R$ 203,51	R$ 0,00	
23						
24						
25		TOTAL PAGO				
26		TOTAL DE JUROS				
27		PERCENTUAL DE JUROS TOTAIS				
28						

Figura 3.4: Calculadora PRICE exibindo o cronograma de pagamentos

Vejamos agora a última sequência:

(i) na célula E25 digitar: =SOMA(B17:B22) + E4;

(ii) na célula E26 digitar: =SOMA(C17:C22);

(iii) na célula E27 digitar: =E26/E5, e pressione a tecla "enter".

Após os comandos anteriores, teremos a Figura 3.5:

	A	B	C	D	E	F
1	**DADOS DA COMPRA**					
2						
3	VALOR DO PRODUTO				R$ 1.399,00	
4	VALOR DA ENTRADA				R$ 250,00	
5	VALOR FINANCIADO				R$ 1.149,00	
6	TAXA DO FINANCIAMENTO				2,50%	
7	NÚMERO DE PARCELAS				6	
8						
9	**TABELA PRICE DE PAGAMENTOS**					
10						
11	PARCELA FIXA NO VALOR DE: R$ 208,60					
12						
13	CRONOGRAMA DE PAGAMENTOS					
14						
15	NP	VP	J	A	SALDO DEVEDOR	
16	0				R$ 1.149,00	
17	1	R$ 208,60	R$ 28,73	R$ 179,88	R$ 969,12	
18	2	R$ 208,60	R$ 24,23	R$ 184,37	R$ 784,75	
19	3	R$ 208,60	R$ 19,62	R$ 188,98	R$ 595,77	
20	4	R$ 208,60	R$ 14,89	R$ 193,71	R$ 402,06	
21	5	R$ 208,60	R$ 10,05	R$ 198,55	R$ 203,51	
22	6	R$ 208,60	R$ 5,09	R$ 203,51	R$ 0,00	
23						
24						
25	TOTAL PAGO				R$ 1.501,61	
26	TOTAL DE JUROS				R$ 102,61	
27	PERCENTUAL DE JUROS TOTAIS				8,93%	
28						

Figura 3.5: Calculadora PRICE com a solução completa do exemplo 3.1

Conclusão da questão: a taxa de juros anunciada é verdadeira, pois as parcelas estão coerentes com o valor esperado. Contudo, vale chamar atenção que nesta calculadora teremos ainda o valor total pago, o total de juros e o percentual destes juros sobre a compra.

Neste momento, temos a calculadora PRICE. Aproveitando-a, apreciemos uma nova situação que nos ensina a manipular a calculadora conforme a quantidade de prestações.

Exemplo 3.2 *João contraiu um empréstimo de* $R\$\,4750,00$, *para serem pagos em* 24 *parcelas de* $R\$\,250,65$ *sendo a primeira paga um mês após a operação, com uma taxa que, segundo o gerente de seu banco, seria de* $1,2\%$ *ao mês. Confere o valor das parcelas com a taxa anunciada?*

Solução. Percebamos que a calculadora esta programada para 6 parcelas e a última parcela está situada na linha 22. Logo, necessita-se de mais 18 linhas para comportarem as parcelas de números 7 a 22. Então:

(i) Preencha os espaços reservados para: "valor do produto", "entrada", "taxa de financiamento" e "número de parcelas" com os referidos dados desde exemplo, lembrando que no empréstimo não há valor de entrada;

(ii) Selecione as células mescladas A25, A26, A27, E25, E26 e E27 e arraste-as até que o texto "total pago" fique localizado na célula A43. Note que deve haver este espaço porque o novo cálculo terá 24 parcelas, logo está faltando 18 linhas.

Como foi aproveitado a calculadora do exemplo anterior, teremos a imagem que pode ser vista na Figura 3.6.

DADOS DA COMPRA

VALOR DO PRODUTO	R$ 4.750,00
VALOR DA ENTRADA	R$ 0,00
VALOR FINANCIADO	R$ 4.750,00
TAXA DO FINANCIAMENTO	1,20%
NÚMERO DE PARCELAS	24

TABELA PRICE DE PAGAMENTOS

PARCELA FIXA NO VALOR DE: R$ 228,96

CRONOGRAMA DE PAGAMENTOS

NP	VP	J	A	SALDO DEVEDOR
0				R$ 4.750,00
1	R$ 228,96	R$ 57,00	R$ 171,96	R$ 4.578,04
2	R$ 228,96	R$ 54,94	R$ 174,02	R$ 4.404,02
3	R$ 228,96	R$ 52,85	R$ 176,11	R$ 4.227,91
4	R$ 228,96	R$ 50,73	R$ 178,22	R$ 4.049,68
5	R$ 228,96	R$ 48,60	R$ 180,36	R$ 3.869,32
4	R$ 228,96	R$ 50,73	R$ 178,22	R$ 4.049,68
5	R$ 228,96	R$ 48,60	R$ 180,36	R$ 3.869,32
6	R$ 228,96	R$ 46,43	R$ 182,53	R$ 3.686,79

.
.
.

TOTAL PAGO	R$ 1.373,76
TOTAL DE JUROS	R$ 310,55
PERCENTUAL DE JUROS TOTAIS	6,54%

Figura 3.6: Expandindo o número de parcelas da calculadora PRICE

Observação 3.1 *Para ajustar os novos dados, selecione a célula E43 e troque o texto:* "$= SOMA(B17 : B22) + E4$" *por* "$= SOMA(B17 : B40) + E4$" *pois esta será a última célula da última parcela. Fazer o mesmo com a célula E44, trocando* "$= SOMA(C17 : C22)$" *por* "$= SOMA(C17 : C40)$".

(iii) Para finalizar, selecione a linha 22 da coluna A até a coluna E. Após esta seleção, direcione o mouse para o canto direito e inferior da célula E22, clique, segure e arraste até a célula E40. Percebamos que a medida que a seleção vai descendo, uma caixa de texto abrirá automaticamente, e os números $6, 7, 8, 9, \cdots, 24$ vão aparecendo. Assim que soltarmos o botão do mouse, todas as "lacunas"serão preenchidas automaticamente com valores que seguem os dados do exemplo anterior.

Obteremos a Figura 3.7:

DADOS DA COMPRA

VALOR DO PRODUTO	R$ 4.750,00
VALOR DA ENTRADA	R$ 0,00
VALOR FINANCIADO	R$ 4.750,00
TAXA DO FINANCIAMENTO	1,20%
NÚMERO DE PARCELAS	24

TABELA PRICE DE PAGAMENTOS

PARCELA FIXA NO VALOR DE: R$ 228,96

CRONOGRAMA DE PAGAMENTOS

NP	VP	J	A	SALDO DEVEDOR
0				R$ 4.750,00
1	R$ 228,96	R$ 57,00	R$ 171,96	R$ 4.578,04
2	R$ 228,96	R$ 54,94	R$ 174,02	R$ 4.404,02
3	R$ 228,96	R$ 52,85	R$ 176,11	R$ 4.227,91
4	R$ 228,96	R$ 50,73	R$ 178,22	R$ 4.049,68
5	R$ 228,96	R$ 48,60	R$ 180,36	R$ 3.869,32
6	R$ 228,96	R$ 46,43	R$ 182,53	R$ 3.686,79
7	R$ 228,96	R$ 44,24	R$ 184,72	R$ 3.502,07
8	R$ 228,96	R$ 42,02	R$ 186,93	R$ 3.315,14
9	R$ 228,96	R$ 39,78	R$ 189,18	R$ 3.125,96
10	R$ 228,96	R$ 37,51	R$ 191,45	R$ 2.934,51
11	R$ 228,96	R$ 35,21	R$ 193,75	R$ 2.740,76
12	R$ 228,96	R$ 32,89	R$ 196,07	R$ 2.544,69
13	R$ 228,96	R$ 30,54	R$ 198,42	R$ 2.346,27
14	R$ 228,96	R$ 28,16	R$ 200,80	R$ 2.145,46
15	R$ 228,96	R$ 25,75	R$ 203,21	R$ 1.942,25
16	R$ 228,96	R$ 23,31	R$ 205,65	R$ 1.736,60
17	R$ 228,96	R$ 20,84	R$ 208,12	R$ 1.528,48
18	R$ 228,96	R$ 18,34	R$ 210,62	R$ 1.317,86
19	R$ 228,96	R$ 15,81	R$ 213,15	R$ 1.104,71
20	R$ 228,96	R$ 13,26	R$ 215,70	R$ 889,01
21	R$ 228,96	R$ 10,67	R$ 218,29	R$ 670,72
22	R$ 228,96	R$ 8,05	R$ 220,91	R$ 449,81
23	R$ 228,96	R$ 5,40	R$ 223,56	R$ 226,24
24	R$ 228,96	R$ 2,71	R$ 226,24	R$ 0,00

TOTAL PAGO	R$ 5.495,04
TOTAL DE JUROS	R$ 745,04
PERCENTUAL DE JUROS TOTAIS	15,68%

Figura 3.7: Solução do exemplo com vinte e quatro parcelas

Neste exemplo, podemos perceber que a calculadora primeiramente construída para uma situação com seis prestações foi usada para uma nova com vinte e quatro. Contudo, aparentemente, algo deu errado, pois as parcelas anunciadas pelo gerente seriam de $R\$\,250,65$, mas na nossa "conferência", foram de $R\$\,228,96$. Então, concluímos que a taxa anunciada está errada.

Vale lembrar que, geralmente, os gerentes de banco, ao atenderem clientes, perguntam: de quanto o senhor precisa? Digamos que o cliente tenha dito $R\$\,4.750,00$, como foi o caso deste exemplo. Caso exista uma movimentação na conta de "João" capaz de gerar uma margem suficiente para este valor, o gerente atenderá seu pedido e liberará o capital. Porém, na assinatura do contrato, o cliente quase nunca percebe que na realidade o valor registrado será muito maior que o recebido. Isso acontece porque em operações desse tipo existem algumas taxas cobradas que são adicionadas ao financiamento. Essas taxas podem ser impostos "legais"como o IOF (Imposto sobre Operações Financeiras) ou ainda podem ser a PROIBIDA TAC (Taxa de Abertura de Crédito), mas, que algumas instituições insistem em cobrar. Provavelmente, "João" deve ter assinado um contrato de $R\$\,5.200,00$.

Vejamos agora um exemplo que traz uma propaganda para vender carros que aparentemente seria uma excelente opção para aquisição de um carro zero km, principalmente pela facilidade de pagamento.

Exemplo 3.3 *Certa época, uma montadora de automóveis fez a seguinte propaganda: "compre seu carro zero pagando apenas* $R\$\,1,00$ *de entrada e a primeira parcela só depois do carnaval!". Considerando-se que esta propaganda veiculou três meses antes da data do pagamento da primeira parcela, que este automóvel custava* $R\$\,49.999,00$, *à vista, mas, neste anuncio era financiado com taxa* $2,3\%$ *ao mês e* 60 *meses para pagar, comente a opção por essa compra.*

Solução. Para comentarmos de forma eficiente essa situação, usemos nossa calculadora para apreciar os dados detalhados.

1º) Considerando o preço ($R\$\,49.999,00$), a vista, subtraído a entrada ($R\$\,1,00$) resta $R\$\,49.998,00$ para financiamento.

2º) Contudo, a primeira parcela será paga três meses após a compra, logo o montante da dívida na ocasião será de: $M_3 = 49998(1 + 0,023)^3 = R\$53.527,82$. Portanto, este será o valor real do financiamento.

Para melhor esclarecimento, na aquisição do carro, o valor que era para ser financiado, ficou gerando apenas juros, pois no período não havia pagamento de parcela, logo não havia amortização.

3º) Usando a calculadora PRICE, vê-se que:

- A parcela ficará no valor de: $R\$\,1.653,74$;
- O total pago será de: $R\$\,1,00$ (entrada) $+R\$\,99.224,37$ (parcelas) $=$ $R\$\,99.225,37$;
- O total de juros será de: $R\$\,3.529,82$ (referente ao período de carência) $+R\$\,45.696,55$ (referente aos 60 meses de pagamentos) $= R\$\,49.226,37$.

Daí, comparando com o valor do carro à vista, o preço do bem financiado, custará 198%, o que equivaleria comprar um carro e pagar, praticamente, dois.

Definitivamente, esta não é uma boa opção de compra.

Mostramos aqui uma excelente ferramenta que criamos e deixamos acessível para que seja evitado um possível endividamento de um cliente que estaria numa situação desfavorável comparada com a montadora. Ela, ao fazer o anúncio já sabia o final da situação, entretanto ele não tinha algo que fosse mais transparente e claro do que era aquela compra e o quanto estaria pagando.

Para finalizar a construção da nossa nova ferramenta, cliquemos em "salvar" e nomeemos a pasta com "calculadora PRICE" e assim tê-la-emos para usar em outras oportunidades.

3.2 Calculadora SAC

Definição 3.2 *Calculadora SAC será a calculadora que seguirá as regras do financiamento pelo método SAC; também será construída no Excel, apresentará uma* *tabela de pagamentos, bem como o montante e a porcentagem de juros ao final dos pagamentos.*

Com o *Microsoft Excel* aberto numa nova guia, os passos para construção desta nova ferramenta serão os seguintes:

(i) na célula A1 digite: DADOS DA COMPRA;

(ii) na célula A3 digite: VALOR DO PRODUTO;

(iii) na célula A4 digite: VALOR DA ENTRADA;

(iv) na célula A5 digite: VALOR FINANCIADO;

(v) na célula A6 digite: TAXA DO FINANCIAMENTO;

(vi) na célula A7 digite: NÚMERO DE PARCELAS;

(vii) na célula A9 digite: TABELA SAC DE PAGAMENTOS;

(viii) na célula A11, digitar: = "AMORTIZAÇÃO FIXA NO VALOR DE: "&TEXTO(D17;"$R\$0,00$");

(ix) na célula A13 digite: CRONOGRAMA DE PAGAMENTOS;

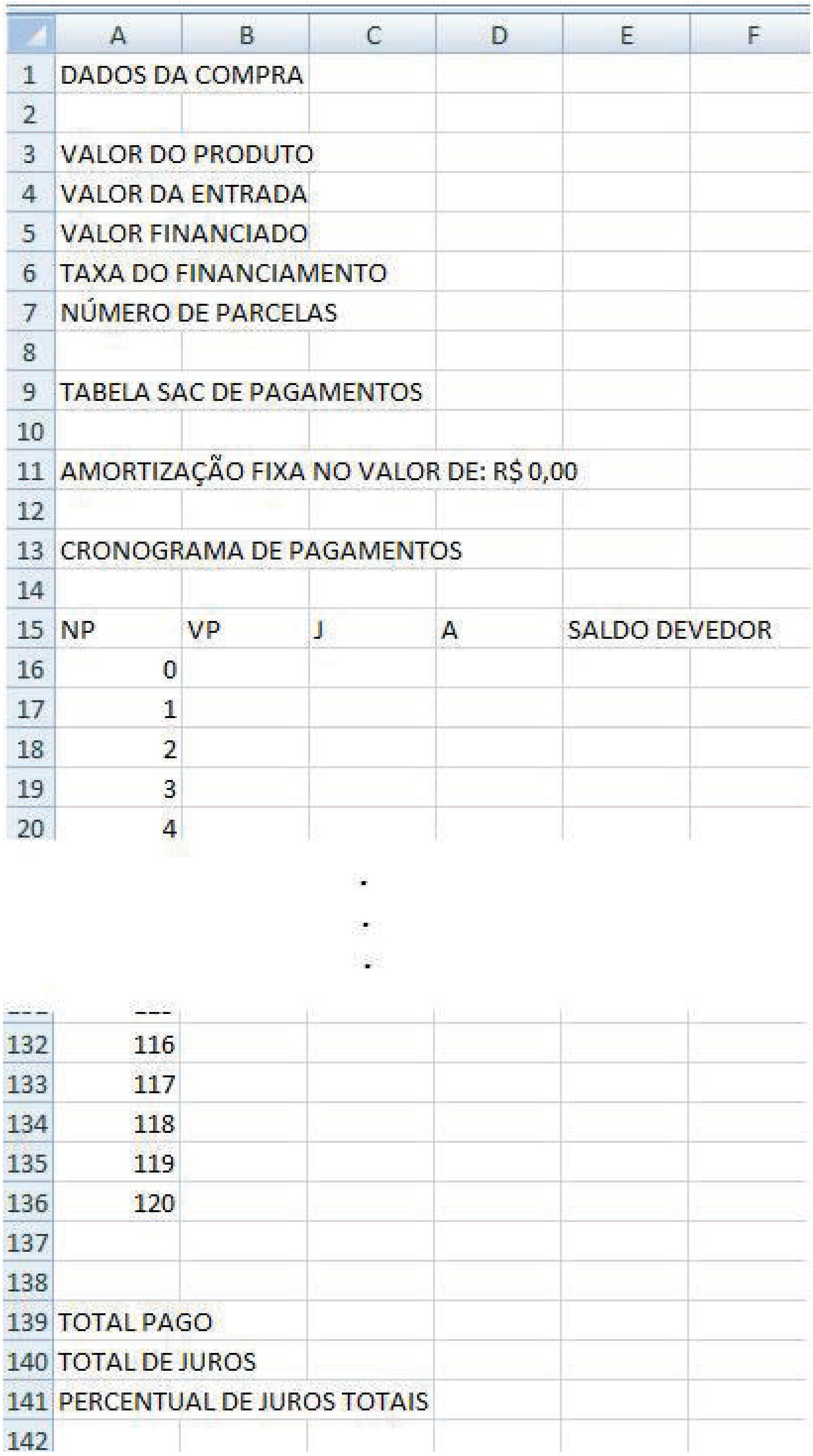
(x) nas células A15, B15, C15, D15 e E15 digite, respectivamente: NP, VP, J, A e SALDO DEVEDOR.

Considerando que o financiamento pelo SAC é usado geralmente para financiamentos de imóveis e que são parcelados em até 35 anos, essa calculadora partirá do principio que a compra será paga em 120 parcelas, porém, segue o raciocínio de estender ou contrair este número.

(xi) nas células A16, A17, A18, $\cdots$, A135 e A136 digite, respectivamente: 0, 1,2, $\cdots$, 119 e 120. Para facilitar, digite o zero em A16, direcione o mouse para o canto inferior direito da célula, concomitantemente, clique e mantenha pressionado com o botão esquerdo, aperte e mantenha pressionada a tecla "ctrl" do teclado e arraste até a célula A136. Solte primeiro o botão do mouse e em seguida a tecla pressionada.

(xii) nas células A139, A140 e A141 digite, respectivamente: TOTAL PAGO, TOTAL DE JUROS e PERCENTUAL DE JUROS TOTAIS.

Neste momento, tem-se o esboço:



	A	B	C	D	E	F
1	DADOS DA COMPRA					
2						
3	VALOR DO PRODUTO					
4	VALOR DA ENTRADA					
5	VALOR FINANCIADO					
6	TAXA DO FINANCIAMENTO					
7	NÚMERO DE PARCELAS					
8						
9	TABELA SAC DE PAGAMENTOS					
10						
11	AMORTIZAÇÃO FIXA NO VALOR DE: R$ 0,00					
12						
13	CRONOGRAMA DE PAGAMENTOS					
14						
15	NP	VP	J	A	SALDO DEVEDOR	
16	0					
17	1					
18	2					
19	3					
20	4					

.
.
.

132	116					
133	117					
134	118					
135	119					
136	120					
137						
138						
139	TOTAL PAGO					
140	TOTAL DE JUROS					
141	PERCENTUAL DE JUROS TOTAIS					
142						

Figura 3.8: Esboço da calculadora SAC

O esboço deverá ser formatado e ajustado a critério de cada "fabricante".

Seguindo agora com a programação da calculadora, vem:

(xiii) na célula E5, digitar a fórmula: =E3-E4 e pressionar a tecla "enter" do teclado;

(xiv) na célula E16, digitar: =E5 e pressionar a tecla "enter" do teclado;

(xv) na célula D17, digitar: =$E$16/$E$7

Para preenchimento das demais células da coluna D, selecionar a célula D17, direcionar o cursor do mouse no canto direito inferior da mesma, clicar com o botão esquerdo do mouse, segurar pressionado e arrastar até a célula D136;

(xvi) na célula C17, digitar: =E16*$E$6 e pressionar a tecla "enter" do teclado. Para preenchimento das demais células da coluna C: Selecionar a célula C17, direcionar o cursor do mouse no canto direito inferior da mesma, clicar com o botão esquerdo do mouse, segurar pressionado e arrastar até a linha 136 desta coluna;

(xvii) na célula B17, digitar: =D17+C17 e pressionar a tecla "enter" do teclado. Para preenchimento das demais células da coluna B: selecionar a célula B17, direcionar o cursor do mouse no canto direito inferior da mesma, clicar com o botão esquerdo do mouse, segurar pressionado e arrastar até a linha 136 desta coluna.

(xviii) na célula E17 digitar: =E16-D17 e pressionar a tecla "enter" do teclado. Para preenchimento das demais células da coluna E: selecionar a célula E17, direcionar o cursor do mouse no canto direito inferior da mesma, clicar com o botão esquerdo do mouse, segurar pressionado e arrastar até a linha 136 desta coluna.

(xix) na célula E139 digitar: =SOMA(B17:B136) + E4;

(xx) na célula E140 digitar: =SOMA(C17:C136);

(xxi) na célula E141 digitar: =E140/E5.

Neste momento, tem-se a seguinte imagem:

	A	B	C	D	E	F
1	DADOS DA COMPRA					
2						
3	VALOR DO PRODUTO					
4	VALOR DA ENTRADA					
5	VALOR FINANCIADO				0	
6	TAXA DO FINANCIAMENTO					
7	NÚMERO DE PARCELAS					
8						
9	TABELA SAC DE PAGAMENTOS					
10						
11	#DIV/0!					
12						
13	CRONOGRAMA DE PAGAMENTOS					
14						
15	NP	VP	J	A	SALDO DEVEDOR	
16	0				0	
17	1	#DIV/0!	0	#DIV/0!	#DIV/0!	
18	2	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
19	3	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
20	4	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
			⋮			
133	117	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
134	118	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
135	119	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
136	120	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
137						
138						
139	TOTAL PAGO				#DIV/0!	
140	TOTAL DE JUROS				#DIV/0!	
141	PERCENTUAL DE JUROS TOTAIS				#DIV/0!	
142						

Figura 3.9: Calculadora SAC pronta para o uso.

Pronto. A calculadora SAC já pode ser usada. Porém, uma sugestão para aparência seria:

(i) Mesclar e centralizar a linha 1 da coluna A até a coluna E e colocar a fonte em negrito com tamanho 16;

(ii) Mesclar e centralizar as linhas 3, 4, 5, 6 e 7 da coluna A até a coluna D;

(iii) Selecionar estas células juntamente com as células E3, E4, E5, E6 e E7 e colocar bordas;

(iv) Mesclar e centralizar a linha 9 da coluna A até a coluna E e colocar a fonte em negrito com tamanho 14;

(v) Mesclar e centralizar a linha 11 da coluna A até a coluna E e fazer um preenchimento com amarelo;

(vi) Centralizar as células das linhas 15, 16, $\cdots$, 135 e 136 das colunas A, B, C, D e E;

(vii) Mesclar e centralizar as linhas 139, 140 e 141 da coluna A até a coluna D;

(viii) Selecionar estas células juntamente com as células E139, E140 e E141 e colocar bordas;

(ix) Selecionar as linhas de números 15 até 136 das colunas A, B, C, D e E e colocar bordas;

(x) Ajuste a largura da coluna "E" conforme o texto "SALDO DEVEDOR".

Estes dois próximos itens devem ser executados para funcionalidade perfeita da calculadora.

(xi) Selecionar as células E3, E4 e E5 e colocá-las na formatação para moedas com duas casas decimais. Fazer isto com as demais células que alocarão valores monetários;

(xii) Selecionar as células E6 e E141 e colocá-las na formatação de porcentagem, também com duas casas decimais.

Então teremos a seguinte "calculadora":

	A	B	C	D	E	F
1	DADOS DA COMPRA					
2						
3	VALOR DO PRODUTO					
4	VALOR DA ENTRADA					
5	VALOR FINANCIADO				R$ 0,00	
6	TAXA DO FINANCIAMENTO					
7	NÚMERO DE PARCELAS					
8						
9	TABELA SAC DE PAGAMENTOS					
10						
11	#DIV/0!					
12						
13	CRONOGRAMA DE PAGAMENTOS					
14						
15	NP	VP	J	A	SALDO DEVEDOR	
16	0				R$ 0,00	
17	1	#DIV/0!	R$ 0,00	#DIV/0!	#DIV/0!	
18	2	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
19	3	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
20	4	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
21	5	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
⋮						
131	115	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
132	116	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
133	117	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
134	118	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
135	119	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
136	120	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
137						
138						
139	TOTAL PAGO				#DIV/0!	
140	TOTAL DE JUROS				#DIV/0!	
141	PERCENTUAL DE JUROS TOTAIS				#DIV/0!	

Figura 3.10: Calculadora SAC formatada

A seguir, resolveremos um exemplo que contextualiza a compra de uma casa financiada em 120 prestações, e que necessita do uso da fórmula de transformação de taxas equivalente e servirá para testar nossa nova ferramenta.

Exemplo 3.4 *Uma casa de* $R\$\,50.000,00$, *é financiada, sem entrada, com taxa de* 8% *ao ano e em* 120 *parcelas mensais, sendo a primeira paga trinta dias após a compra. Fazer uma planilha detalhada das parcelas.*

Solução. Vamos à análise das informações fornecidas na questão.

1º) Valor do produto: $R\$\,50.000,00$;

2º) Valor de entrada: $R\$\,0,00$;

3º) Número de parcelas: 120 meses;

4º) Taxa de 8% ao ano.

Note que precisamos transformar a taxa dada numa taxa mensal. Lembre-se que pagamentos mensais implicam numa taxa mensal. Daí, usando a fórmula de taxas equivalentes, $1 + I = (1 + i)^t$, vem:

$$1 + 8\% = 1,08 = (1 + i)^{12}.$$

Logo,

$$i = \sqrt[12]{1,08} - 1 \cong 0,0064.$$

Ou seja, 0,64% ao mês.

Como a calculadora está pronta, façamos uso da mesma. Fazendo as digitações:

(i) 50000 e 0 nas células E3 e E4, respectivamente;

(ii) 0,64 e 120 nas células E5 e E6, respectivamente,

teremos a seguinte solução:

DADOS DA COMPRA

VALOR DO PRODUTO	R$ 50.000,00
VALOR DA ENTRADA	R$ 0,00
VALOR FINANCIADO	R$ 50.000,00
TAXA DO FINANCIAMENTO	0,64%
NÚMERO DE PARCELAS	120

TABELA SAC DE PAGAMENTOS

AMORTIZAÇÃO FIXA NO VALOR DE: R$ 416,67

CRONOGRAMA DE PAGAMENTOS

NP	VP	J	A	SALDO DEVEDOR
0				R$ 50.000,00
1	R$ 736,67	R$ 320,00	R$ 416,67	R$ 49.583,33
2	R$ 734,00	R$ 317,33	R$ 416,67	R$ 49.166,67
3	R$ 731,33	R$ 314,67	R$ 416,67	R$ 48.750,00
4	R$ 728,67	R$ 312,00	R$ 416,67	R$ 48.333,33
5	R$ 726,00	R$ 309,33	R$ 416,67	R$ 47.916,67
6	R$ 723,33	R$ 306,67	R$ 416,67	R$ 47.500,00
7	R$ 720,67	R$ 304,00	R$ 416,67	R$ 47.083,33
8	R$ 718,00	R$ 301,33	R$ 416,67	R$ 46.666,67
9	R$ 715,33	R$ 298,67	R$ 416,67	R$ 46.250,00
10	R$ 712,67	R$ 296,00	R$ 416,67	R$ 45.833,33
11	R$ 710,00	R$ 293,33	R$ 416,67	R$ 45.416,67
12	R$ 707,33	R$ 290,67	R$ 416,67	R$ 45.000,00
13	R$ 704,67	R$ 288,00	R$ 416,67	R$ 44.583,33
14	R$ 702,00	R$ 285,33	R$ 416,67	R$ 44.166,67
15	R$ 699,33	R$ 282,67	R$ 416,67	R$ 43.750,00
16	R$ 696,67	R$ 280,00	R$ 416,67	R$ 43.333,33
17	R$ 694,00	R$ 277,33	R$ 416,67	R$ 42.916,67
18	R$ 691,33	R$ 274,67	R$ 416,67	R$ 42.500,00
19	R$ 688,67	R$ 272,00	R$ 416,67	R$ 42.083,33
20	R$ 686,00	R$ 269,33	R$ 416,67	R$ 41.666,67
21	R$ 683,33	R$ 266,67	R$ 416,67	R$ 41.250,00
22	R$ 680,67	R$ 264,00	R$ 416,67	R$ 40.833,33
23	R$ 678,00	R$ 261,33	R$ 416,67	R$ 40.416,67
24	R$ 675,33	R$ 258,67	R$ 416,67	R$ 40.000,00
25	R$ 672,67	R$ 256,00	R$ 416,67	R$ 39.583,33
26	R$ 670,00	R$ 253,33	R$ 416,67	R$ 39.166,67
27	R$ 667,33	R$ 250,67	R$ 416,67	R$ 38.750,00
28	R$ 664,67	R$ 248,00	R$ 416,67	R$ 38.333,33
29	R$ 662,00	R$ 245,33	R$ 416,67	R$ 37.916,67
30	R$ 659,33	R$ 242,67	R$ 416,67	R$ 37.500,00
31	R$ 656,67	R$ 240,00	R$ 416,67	R$ 37.083,33
32	R$ 654,00	R$ 237,33	R$ 416,67	R$ 36.666,67
33	R$ 651,33	R$ 234,67	R$ 416,67	R$ 36.250,00
34	R$ 648,67	R$ 232,00	R$ 416,67	R$ 35.833,33

Figura 3.11: 1^a imagem da solução

51	35	R$ 646,00	R$ 229,33	R$ 416,67	R$ 35.416,67
52	36	R$ 643,33	R$ 226,67	R$ 416,67	R$ 35.000,00
53	37	R$ 640,67	R$ 224,00	R$ 416,67	R$ 34.583,33
54	38	R$ 638,00	R$ 221,33	R$ 416,67	R$ 34.166,67
55	39	R$ 635,33	R$ 218,67	R$ 416,67	R$ 33.750,00
56	40	R$ 632,67	R$ 216,00	R$ 416,67	R$ 33.333,33
57	41	R$ 630,00	R$ 213,33	R$ 416,67	R$ 32.916,67
58	42	R$ 627,33	R$ 210,67	R$ 416,67	R$ 32.500,00
59	43	R$ 624,67	R$ 208,00	R$ 416,67	R$ 32.083,33
60	44	R$ 622,00	R$ 205,33	R$ 416,67	R$ 31.666,67
61	45	R$ 619,33	R$ 202,67	R$ 416,67	R$ 31.250,00
62	46	R$ 616,67	R$ 200,00	R$ 416,67	R$ 30.833,33
63	47	R$ 614,00	R$ 197,33	R$ 416,67	R$ 30.416,67
64	48	R$ 611,33	R$ 194,67	R$ 416,67	R$ 30.000,00
65	49	R$ 608,67	R$ 192,00	R$ 416,67	R$ 29.583,33
66	50	R$ 606,00	R$ 189,33	R$ 416,67	R$ 29.166,67
67	51	R$ 603,33	R$ 186,67	R$ 416,67	R$ 28.750,00
68	52	R$ 600,67	R$ 184,00	R$ 416,67	R$ 28.333,33
69	53	R$ 598,00	R$ 181,33	R$ 416,67	R$ 27.916,67
70	54	R$ 595,33	R$ 178,67	R$ 416,67	R$ 27.500,00
71	55	R$ 592,67	R$ 176,00	R$ 416,67	R$ 27.083,33
72	56	R$ 590,00	R$ 173,33	R$ 416,67	R$ 26.666,67
73	57	R$ 587,33	R$ 170,67	R$ 416,67	R$ 26.250,00
74	58	R$ 584,67	R$ 168,00	R$ 416,67	R$ 25.833,33
75	59	R$ 582,00	R$ 165,33	R$ 416,67	R$ 25.416,67
76	60	R$ 579,33	R$ 162,67	R$ 416,67	R$ 25.000,00
77	61	R$ 576,67	R$ 160,00	R$ 416,67	R$ 24.583,33
78	62	R$ 574,00	R$ 157,33	R$ 416,67	R$ 24.166,67
79	63	R$ 571,33	R$ 154,67	R$ 416,67	R$ 23.750,00
80	64	R$ 568,67	R$ 152,00	R$ 416,67	R$ 23.333,33
81	65	R$ 566,00	R$ 149,33	R$ 416,67	R$ 22.916,67
82	66	R$ 563,33	R$ 146,67	R$ 416,67	R$ 22.500,00
83	67	R$ 560,67	R$ 144,00	R$ 416,67	R$ 22.083,33
84	68	R$ 558,00	R$ 141,33	R$ 416,67	R$ 21.666,67
85	69	R$ 555,33	R$ 138,67	R$ 416,67	R$ 21.250,00
86	70	R$ 552,67	R$ 136,00	R$ 416,67	R$ 20.833,33
87	71	R$ 550,00	R$ 133,33	R$ 416,67	R$ 20.416,67
88	72	R$ 547,33	R$ 130,67	R$ 416,67	R$ 20.000,00
89	73	R$ 544,67	R$ 128,00	R$ 416,67	R$ 19.583,33
90	74	R$ 542,00	R$ 125,33	R$ 416,67	R$ 19.166,67
91	75	R$ 539,33	R$ 122,67	R$ 416,67	R$ 18.750,00
92	76	R$ 536,67	R$ 120,00	R$ 416,67	R$ 18.333,33
93	77	R$ 534,00	R$ 117,33	R$ 416,67	R$ 17.916,67
94	78	R$ 531,33	R$ 114,67	R$ 416,67	R$ 17.500,00
95	79	R$ 528,67	R$ 112,00	R$ 416,67	R$ 17.083,33
96	80	R$ 526,00	R$ 109,33	R$ 416,67	R$ 16.666,67
97	81	R$ 523,33	R$ 106,67	R$ 416,67	R$ 16.250,00
98	82	R$ 520,67	R$ 104,00	R$ 416,67	R$ 15.833,33
99	83	R$ 518,00	R$ 101,33	R$ 416,67	R$ 15.416,67
100	84	R$ 515,33	R$ 98,67	R$ 416,67	R$ 15.000,00
101	85	R$ 512,67	R$ 96,00	R$ 416,67	R$ 14.583,33

Figura 3.12: 2^a imagem da solução

102	86	R$ 510,00	R$ 93,33	R$ 416,67	R$ 14.166,67
103	87	R$ 507,33	R$ 90,67	R$ 416,67	R$ 13.750,00
104	88	R$ 504,67	R$ 88,00	R$ 416,67	R$ 13.333,33
105	89	R$ 502,00	R$ 85,33	R$ 416,67	R$ 12.916,67
106	90	R$ 499,33	R$ 82,67	R$ 416,67	R$ 12.500,00
107	91	R$ 496,67	R$ 80,00	R$ 416,67	R$ 12.083,33
108	92	R$ 494,00	R$ 77,33	R$ 416,67	R$ 11.666,67
109	93	R$ 491,33	R$ 74,67	R$ 416,67	R$ 11.250,00
110	94	R$ 488,67	R$ 72,00	R$ 416,67	R$ 10.833,33
111	95	R$ 486,00	R$ 69,33	R$ 416,67	R$ 10.416,67
112	96	R$ 483,33	R$ 66,67	R$ 416,67	R$ 10.000,00
113	97	R$ 480,67	R$ 64,00	R$ 416,67	R$ 9.583,33
114	98	R$ 478,00	R$ 61,33	R$ 416,67	R$ 9.166,67
115	99	R$ 475,33	R$ 58,67	R$ 416,67	R$ 8.750,00
116	100	R$ 472,67	R$ 56,00	R$ 416,67	R$ 8.333,33
117	101	R$ 470,00	R$ 53,33	R$ 416,67	R$ 7.916,67
118	102	R$ 467,33	R$ 50,67	R$ 416,67	R$ 7.500,00
119	103	R$ 464,67	R$ 48,00	R$ 416,67	R$ 7.083,33
120	104	R$ 462,00	R$ 45,33	R$ 416,67	R$ 6.666,67
121	105	R$ 459,33	R$ 42,67	R$ 416,67	R$ 6.250,00
122	106	R$ 456,67	R$ 40,00	R$ 415,57	R$ 5.833,33
123	107	R$ 454,00	R$ 37,33	R$ 415,57	R$ 5.416,67
124	108	R$ 451,33	R$ 34,67	R$ 415,57	R$ 5.000,00
125	109	R$ 448,67	R$ 32,00	R$ 415,57	R$ 4.583,33
126	110	R$ 446,00	R$ 29,33	R$ 415,57	R$ 4.166,67
127	111	R$ 443,33	R$ 26,67	R$ 415,57	R$ 3.750,00
128	112	R$ 440,67	R$ 24,00	R$ 415,57	R$ 3.333,33
129	113	R$ 438,00	R$ 21,33	R$ 415,57	R$ 2.916,67
130	114	R$ 435,33	R$ 18,67	R$ 415,57	R$ 2.500,00
131	115	R$ 432,67	R$ 16,00	R$ 415,57	R$ 2.083,33
132	116	R$ 430,00	R$ 13,33	R$ 415,57	R$ 1.666,67
133	117	R$ 427,33	R$ 10,67	R$ 415,57	R$ 1.250,00
134	118	R$ 424,67	R$ 8,00	R$ 415,57	R$ 833,33
135	119	R$ 422,00	R$ 5,33	R$ 415,57	R$ 416,67
136	120	R$ 419,33	R$ 2,67	R$ 415,57	R$ 0,00
137					
138					
139			TOTALPAGO		R$ 69.360,00
140			TOTAL DE JUROS		R$ 19.360,00
141			PERCENTUAL DE JUROS TOTAIS		38,72%
142					
143					

Figura 3.13: 3^a imagem da solução

Então, percebamos que o valor de amortização da dívida foi constate e no valor de $R\$\,416,67$, o valor dos juros de cada prestação é sempre decrescente, bem como existe uma grande diferença do valor da primeira parcela de $R\$\,736,67$ e da última de $R\$\,419,33$. Vale lembrar que encontramos todos esses valores sem a necessidade de irmos calculando de um a um, a nossa "calculadora" se responsabilizou por isso, e ainda nos beneficiou com o valor total pago, o total de juros e o percentual desses juros bem claros.

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

É cediça a importância da compreensão a respeito da responsabilidade do professor, pois o bom resultado da interação entre sala de aula e vida cotidiana depende essencialmente da sua metodologia. Acreditar em propostas inovadoras requer conhecer seu objetivo, para que não haja confusão, de modo algum, com outras intenções conhecidas como a "enrolação", por exemplo. Pensando nisso, o presente trabalho, que expõe todo o conteúdo de matemática financeira do ensino médio, aprofundado com os financiamentos, que é restrito a alguns cursos de nível superior, e a criação das calculadoras que é um projeto inovador e diferenciado, revela o trajeto pedagógico desenvolvido para resolução das dificuldades inicialmente visualizadas, principalmente, no que diz respeito à aprendizagem do conteúdo com propriedade para ser usado no cotidiano.

Ou seja, acreditando na influência mútua da vida econômica com a matemática financeira escolar, "equipamos" os professores com esta proposta de ensino para apresentarem aos alunos da educação básica um conhecimento que teoricamente só seria visto na universidade. E para que esta apresentação ocorra da melhor forma possível, fizemos uma explanação do conteúdo de forma bem didática no primeiro capítulo, o que seria normal, pois matemática financeira está presente nesse período escolar. Contudo, no segundo capítulo, apresentamos o conteúdo "financiamentos" com uma linguagem bem apropriada à comunidade, mas sem perder o foco de mostrar as fórmulas e o desenvolvimento para se chegar a elas. No terceiro capítulo, vem todos os passos para a construção das calculadoras, similares às que são usadas pelos bancos. Contudo, a construção deste projeto não visa apenas o caráter conclusivo dos trabalhos acadêmicos. Ele origina uma reflexão acerca do processo de ensino e aprendizagem desenvolvido por professores em boa parte das instituições de ensino, bem como indica um mecanismo auxiliador/solucionador de uma problemática, cujo reflexo traduz na economia da região e, consequentemente, do país. Como sugere os PCNs (1999, p. 252):

> *Cabe a matemática do ensino médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida.*

Bibliografia

[1] AYRES, Frank Jr. *Matemática Financeira: resumo da teoria, 500 problemas resolvidos.* / Frank Ayres Jr, tradução de Gastão Quartin Pinto de Moura. – São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1971.

[2] BRASIL *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino médio.*Brasília, 1999.

[3] CHIANG, Alpha C. *Matemática para economistas.* / Alpha C. Chiang; Tradutor Roberto Camps Moraes, Revisor técnico Luiz Salvador Lopes. – São Paulo: McGraw-Hill do Brasil: Ed. da Universidade de São Paulo, 1982.

[4] CÓSER FILHO, MARCELO S. *Aprendizagem de matemática financeira no ensino médio: uma proposta de trabalho a partir de planilhas eletrônicas.* 152f. Dissertação: (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em:

<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/14828/000668627.pdf?sequence=1 >.
Acesso em 19 de Maio de 2013

[5] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática, volume único: livro do professor.* São Paulo: Ática, 2008.

[6] IEZZI, G., HAZZAN, S. e DEGENSZAJN, D.M., *Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 11.*, 1ª ed. Atual Editora, 2004.

[7] GITMAN, Lawrence Jeffrey *Princípios de Administração Financeira*, / Lawrence Jeffrey Gitman; tradução técnica: Antônio Zoratto Sanvicente. 10. ed. – São Paulo: Addison Wesley, 2004.

[8] KUHNEM, Osmar Leonardo. *Matemática financeira aplicada e análise de investimento*, Udibert Reinaldo Bauer – São Paulo: Atlas, 1994.

[9] LIMA, E.L., CARVALHO, P.C.P., WAGNER, E. e MORGADO, A.C., *A Matemática do Ensino Médio – volume 2*, 6. ed – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[10] MATHIAS, W. F. e GOMES, J. M., *Matemática Financeira*. 4. ed. – 3ª reimpr. – São Paulo: Atlas, 2007.

[11] SAMANEZ, Carlos Patrício. *Matemática Financeira*. 5. ed. – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

[12] ZENTGRAF, Walter. *Matemática Financeira: Com emprego de funções e planilhas, modelo Excel.*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

SITE:

Ajuda do Microsoft Oficce Excel, Função TEXTO. Disponível em:
<http://office.microsoft.com/pt-br/excel-help/funcao-texto-HP010062580.aspx>.
Acesso em: 10 fev. 2013.

Apêndice A

Richard Price e a sequência uniforme de Capitais

Há [1] dois tipos de problemas bastante frequentes em operações financeiras. O primeiro diz respeito ao cálculo da prestação de um financiamento em prestações iguais no regime de juros compostos, dados o valor financiado, a taxa de juros e o número de prestações. O segundo refere-se ao montante auferido por uma sucessão de depósitos iguais a juros compostos, dados o valor de cada depósito, a taxa de juros e o número de depósitos.

Essa sucessão de valores iguais (pagamentos e depósitos) é chamada de *sequência uniforme de capitais ou de depósitos*.

Um dos pioneiros na utilização desses problemas no cálculo de aposentadorias e pensões foi o filósofo, teólogo e especialista em finanças e seguros Richard Price.

Nascido na Inglaterra em Tynton, Glamorgan, em fevereiro de 1723, foi educado em sua cidade natal até a morte de seu pai, depois se mudou para Londres em 1740. Nessa cidade, recebeu sólidos conhecimentos de matemática, e foi discípulo de John Eames.

Permaneceu estudando até 1748, ano em que se tornou ministro presbiteriano. Em 1758, publicou o livro Revisão das questões principais em moral, que causou grande

[1] Extraído de Iezzi (2004, p. 76)

impacto na conservadora sociedade britânica pela proposta de revisão das questões morais da época. Em 1766, publicou a Importância do cristianismo, obra na qual está presente a rejeição às idéias tradicionais cristãs como pecado original, castigo eterno e purgatório.

Três anos depois, a pedido da seguradora inglesa Sociedade Equitativa, Price publicou um trabalho na área de Estatística e Atuária chamado Tabelas de mortalidade de Northampton, que serviu para o cálculo das probabilidades de morte e sobrevivência de um indivíduo em função da idade. Essas tabelas serviram de base para o cálculo de seguros e aposentadorias.

Em 1771, publicou sua mais famosa obra da área financeira e atuarial intitulada *Observações sobre pagamentos reversíveis*. Nessa obra, Price elaborou tabelas para o cálculo de juros compostos, explicou o financiamento por meio da sequência uniforme de pagamentos, o montante gerado por depósitos em sequência uniforme, rendas vitalícias em aposentadorias e cálculo de prêmio de seguros de vida.

Em 1776, publicou Observações sobre a natureza da liberdade civil, os princípios do governo, e a justiça e a política da guerra com a América, um sucesso de vendas na América e na Inglaterra (cerca de 60 000 exemplares em poucos meses). Graças a essa obra e suas idéias, foi convidado pelo Congresso dos Estados Unidos da América para exercer a função de conselheiro na área financeira.

Nos últimos anos de sua vida, em 1789, fez um de seus últimos discursos em defesa da Revolução Francesa, Discurso sobre o amor pelo nosso país, que provocou fortes reações na sociedade britânica conservadora. Price foi chamado de ateu pelo rei George III. Seus adversários ideológicos combateram suas idéias por meio de panfletos, chegando até a ser caricaturado como insano e ateu por James Gillray, famoso caricaturista da época.

Price faleceu em Hackney, próximo de Londres, em abril de 1791, aos 68 anos de idade.

Apêndice B

Montante de uma Sequência Uniforme de Depósitos

Suponhamos[1] a situação de um assalariado que, por uma questão de boa educação financeira, fez investimentos mensais e ininterruptos durante um período de n meses, de um valor P, na caderneta de poupança que teve rendimento mensal de taxa i. Ao realizar o depósito de ordem n, resolveu calcular o valor total de seus investimentos, contabilizando todos os depósitos somados com os juros totais. Então, procedeu da seguinte maneira, fez a soma do montante produzido por cada depósito e por último, somou todos esses montantes. De forma que:

1. O montante referente ao primeiro depósito M_1 na data n foi

$$M_1 = P\,(1+i)^{n-1}.$$

2. O montante referente ao segundo depósito M_2 na data n foi:

$$M_2 = P\,(1+i)^{n-2}.$$

[1] Adaptado de Iezzi (2004, p. 72)

3. O montante referente ao terceiro depósito M_3 na data n foi:

$$M_3 = P\,(1+i)^{n-3}.$$

Logo, o montante referente ao n-ésimo depósito M_n na data n foi:

$$M_n = P\,(1+i)^{n-n} = P\,(1+i)^0 = P.$$

Assim $M = P\,(1+i)^{n-1} + P\,(1+i)^{n-2} + P\,(1+i)^{n-3} + \cdots + P$, onde o segundo membro dessa igualdade é uma Progressão Geométrica (PG) cuja razão vale $q = \dfrac{1}{1+i}$ e cujo primeiro termo é $a_1 = P\,(1+i)^{n-1}$. Ao aplicar a fórmula da soma dos termos da PG finita, tem-se:

$$\begin{aligned}
M &= \frac{P(1+i)^{n-1}\left[\dfrac{1}{(1+i)^n} - 1\right]}{\dfrac{1}{1+i} - 1} \\
M &= P\frac{\dfrac{1}{1+i} - (1+i)^{n-1}}{\dfrac{-i}{1+i}} \\
M &= P\frac{\dfrac{1-(1+i)^n}{1+i}}{\dfrac{-i}{1+i}} \\
M &= P\frac{1-(1+i)^n}{-i}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\boxed{M = P\frac{(1+i)^n - 1}{i}}\;.$$