UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARCÍLIO MIRANDA DE CARVALHO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OLIMPIADAS USANDO TRIGONOMÉTRIA

JUAZEIRO-BA
2013

MARCILIO MIRANDA DE CARVALHO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OLIMPIADAS USANDO TRIGONOMÉTRIA

Dissertação apresentada à coordenação do mestrado profissional em matemática em rede nacional como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre em matemática.
Orientador: Severino Cirino de Lima.

JUAZEIRO - BA

2013

	Miranda, Marcilio.
M672r	Resolução de problemas de olimpíadas usando trigonometria / Marcilio Miranda de Carvalho. -- Juazeiro, 2013
	vii; 53f.: il. 29 cm
	Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro-BA, 2013.
	Orientador (a): Prof.(a) Dr.Severino Cirino de Lima Neto.
	1. Trigonometria - resolução de problemas. 3. Olimpíadas de Matemática. I. Título. II. Lima Neto, Severino Cirino de. III Universidade Federal do Vale do São Francisco.
	CDD 516.24

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FOLHA DE APROVAÇÃO

Marcilio Miranda de Carvalho

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OLIMPIADAS USANDO TRIGONOMÉTRIA

Dissertação apresentada à coordenação do mestrado profissional em matemática em rede nacional como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre em matemática.

Dissertação aprovada em vinte cinco

Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans
Examinaror Externo- USP

Prof. Dr. Wilson Hugo Cavalcante Freire
Examinador Externo- URCA

Prof. Dr. Flávio França Cruz
Examinaror Externo- URCA

Prof. Dr. Severino Cirino de Lima Neto
Orientador- UNIVASF

Juazeiro, de 2013

AGRADECIMENTOS

À agência de fomento à pesquisa Capes, pelo apoio financeiro.

À SBM pela brilhante ideia de criar o PROFMAT

Ao meu orientador Severino Cirino de Lima Neto;

Ao professor Marcílio Rangel do Instituto Dom Barreto, um grande incentivador da educação no estado do Piauí;

Ao professor João Xavier da Cruz Neto, que foi meu orientador na graduação da UFPI; Ao professor João Benicio de Melo Neto, uma grande contribuição na minha educação;

Ao professor Jurandir de Oliveira Lopes Xavier, que foi meu orientador na especialização da UFPI.

Resumo da Dissertação apresentada à PROFMAT/UNIVASF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OLIMPIADAS USANDO TRIGONOMÉTRIA

MARCILIO MIRANDA DE CARVALHO

Juazeiro-Ba, Julho, 2013.

RESUMO

O trabalho consiste em mostrar uma técnica para transformar uma equação trigonométrica em um polinômio e vice-versa, assim como a utilização da solução de um dado problema como ferramenta para encontrar a solução de outro problema. A metodologia faz uso das relações de Girard, foi feita aplicação desta técnica em problemas de olimpíadas de matemática de vários países, a mesma, caracteriza-se por reduzir a quantidade de cálculos em muitos problemas, foi usada também para provar a irracionalidade de um numero, encontrar funções trigonométricas de ângulos não notáveis e também mostra uma relação interessante entre polinômios e trigonometria.

Palavras – chave: Olimpíadas, trigonometria, Polinômios.

Abstract da dissertação apresentada à PROFMAT/UNIVASF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OLIMPIADAS USANDO TRIGONOMÉTRIA
MARCILIO MIRANDA DE CARVALHO
Juazeiro-Ba, Julho, 2013

ABSTRACT

The work consists in show a technique for transform na trigonometric equation in polynomial and vice versa, as well as the utilization of the solution of a given problem as tool for find the solution of another problem. The methodology does use of the relations oh Girard, was made application of this technique in mathematics Olympiads of several countries, to same, caracterizes-itself by reduce the quantity in many problems, was used also for to prove the irrationality of a number, find trigonometric funcions of not notable angless and also shows na interesting relation between polynomials and trigonometry.
Keywords: Olympiads, trigonometry, polynomials.

ÍNDICE DE FIGURAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

1 INTRODUÇÃO

A ideia de trabalhar com o tema da Resolução de Problemas surgiu a partir da atuação, em sala de aula, do ensino médio, lecionando disciplinas de Matemática. Desde 2001 até hoje, como professor tenho visto a grande dificuldade dos alunos em resolver problemas de Matemática.

Durante os 12 anos, em sala de aula percebi que a maioria dos alunos simplesmente decoram os problemas e apenas reproduzem a ideia na prova. Quando, nas avaliações, colocamos o mesmo problema com pequenas variações, a grande maioria dos alunos não consegue resolver.

Resolver problemas sempre foi um desafio para alunos e professores, na maioria das vezes com métodos que enfatizam a repetição e a mecanização da resolução de problemas. Embora as reformas de ensino propostas, no século XX: o ensino de matemática por repetição, o ensino de matemática com compreensão, a Matemática Moderna e a Resolução de Problemas tenham proposto novos rumos de trabalho mais produtivos, o Professor nunca foi chamado a participar delas mostrando-se, na hora da aplicação, não preparado para empregá-las.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics — NCTM —, dos Estados Unidos, apresentou recomendações para o ensino de Matemática no documento “Agenda para Ação”. Nele destacava-se a Resolução de Problemas como foco do ensino da Matemática nos anos 80 (1997, p.20).

Ainda de acordo, Idem, Ibidem:

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das

> conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos (1997, p.19).

Nota-se, em sala de aula, que a grande maioria de nossos alunos não sabe nem como começar a resolução de um problema, até porque muitos de nossos professores não dão ênfase ao ensino do método de Resolução dos Problemas. Assim,

> Parte dos problemas referentes ao ensino de Matemática estão relacionados ao processo de formação do magistério, tanto em relação à formação inicial como à formação continuada. Decorrentes dos problemas da formação de professores, as práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos, que, infelizmente, são muitas vezes de qualidade insatisfatória. A implantação de propostas inovadoras, por sua vez, esbarra na falta de uma formação profissional qualificada, na existência de concepções pedagógicas inadequadas e, ainda, nas restrições ligadas às condições de trabalho (Idem, Ibidem, 1997, p.22).

Um dos principais deveres do professor é o de auxiliar seus alunos na resolução de problemas. Deve-se ensinar problemas - chave que, se bem compreendidos, podem servir na resolução de outros problemas.

O professor também não pode fazer tudo pelo aluno, pois assim este se tornará totalmente dependente do professor. É mais apropriado dar a base para que o aluno caminhe sozinho, tentando este usar as ideias dos problemas que conhece para resolver outros problemas.

O bom aluno cria o seu próprio banco de questões e procedimentos metodológicos para cada assunto que julga importante e quando vir o problema em tal assunto, usa o método de resolução que ele viu em outro problema ou faz pequenas variações desse método.

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado (Idem, Ibidem, 1997, p.29).

Os PCN não tratam diretamente sobre o assunto polinômios, mas fala implicitamente sobre isso quando trata de conceitos e procedimentos:

> Construção de procedimentos para calcular o valor numérico e efetuar operações com expressões algébricas, utilizando aspectos conhecidos.
> Obtenção de expressões equivalentes a uma expressão algébrica por meio de fatorações e simplificações (Idem, Ibidem, 1997, p.88).

Pretende-se, com este trabalho, mostrar vários problemas de olimpíadas, onde se usa exatamente esta técnica, isto é, fazer simplificações e fatorações a fim de obter expressões semelhantes, usando técnicas já conhecidas.

Durante o período de 12 anos no magistério, notei que alunos e até mesmo professores de Matemática do Ensino Médio tratam os assuntos de matemática desse nível de ensino de forma isolada.

De acordo, Idem, Ibidem:

> O estabelecimento de relações é tão importante quanto a exploração dos conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, os conteúdos podem acabar representando muito pouco para a formação do aluno, particularmente para a formação da cidadania (1997,p.29).

Neste trabalho, mostra-se como relacionar dois assuntos de Matemática do Ensino Médio Polinômios e Trigonometria, de uma forma que, raramente, é abordada nos livros-textos e apresentam-se técnicas interessantes de resolução de problemas.

Encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN´s) um destaque para o estudo da Trigonometria, no qual é enfatizado o potencial desta no que tange ao desenvolvimento de habilidades e competências.

Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações [...] (Idem, Ibidem, 2000).

Encontramos ainda nos PCN´s recomendações de que o estudo das funções trigonométricas deve ser ligado, de alguma forma, ao estudo das funções.

Nas olimpíadas de Matemática são muito comuns problemas que abordam vários assuntos de forma interligada, e por isso, justifica-se a escolha de problemas de olimpíadas de Matemática para fazer o nosso trabalho.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) organizou, em 1979, a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática e, de lá para cá, as olimpíadas se espalharam por vários estados brasileiros e, hoje em dia, temos muitas olimpíadas estaduais e regionais.

A olimpíada de Matemática tem como principais objetivos:

- Estimular o estudo da Matemática pelos alunos;
- Desenvolver e aperfeiçoar a capacitação dos professores;
- Influenciar na melhoria do ensino;
- Descobrir novos talentos.

Nos últimos anos, com a criação da Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas publicas, temos visto, a cada dia, mais alunos de olimpíadas de Matemática que são destaque nas universidades nacionais e internacionais, mostrando que a nossa Olimpíada de fato, revela talentos para nossas universidades.

Na minha experiência como professor, tenho visto que os alunos, quando premiados em olimpíadas, passam a se tornar mais dedicados, sentindo-se estimulados a estudar, e seus próprios colegas de classe passam a querer também ser premiados porque os amigos destes foram, e isso acaba criando um clima muito bom na escola.

Um projeto de olimpíada, quando bem executado, pode mudar a realidade de uma escola e até mesmo de uma cidade. No Piauí, na cidade de Cocal dos Alves, temos um exemplo: Lá, nova realidade começou com olimpíadas de Matemática e, hoje, a escola tem medalhas em olimpíadas de física e até foi campeã do quadro Soletrando, do caldeirão do Hulk, da Rede Globo. Neste caso, temos exemplo de que a olimpíada de matemática pode gerar frutos mesmo em outras matérias.

A ideia da resolução de todos os problemas aqui apresentados surgiu da resolução do Problema Resolvido 3.1. A partir daí, passou-se a usar a ideia do Problema Resolvido 3.1 na resolução dos demais problemas.

A ideia principal da resolução dos problemas aqui apresentados é transformar equações trigonométricas em um polinômios, e vice-versa.

Há 6 tipos de problemas para resolver:

No primeiro tipo parte-se da Equação Trigonométrica e chega-se a um polinômio e, a partir daí, usam-se as relações de Girard para calcular o valor de expressões trigonométricas.

No segundo tipo parte-se de um polinômio ou equação irracional e chega-se a uma equação Trigonométrica, encontrando soluções em função de Funções Trigonométricas.

O terceiro tipo são problemas onde se deseja calcular o valor de expressões Trigonométricas. Neste caso, precisa-se partir destas para gerar um polinômio e usando-se as relações de Girard para calcular o valor dessas expressões.

No quarto tipo, temos problemas em que se pede o valor de expressões algébricas, onde a ideia da resolução é gerar um polinômio com a raízes desejadas e, a partir daí, usar as relações de Girard para calcular o valor dessas expressões.

No quinto tipo, temos problemas onde se pede para provar que um determinado número e irracional. Nesses problemas, gera-se um polinômio cuja raiz é este número e usa-se o teste da raiz racional para provar que este número é irracional.

No sexto tipo, calcula-se o valor de funções trigonométricas de $18^0, 36^0, 54^0, 72^0$. Para calcular isso, parte-se de uma equação trigonométrica e gera-se um polinômio cuja raiz é o valor a ser calculado,resolvendo-se o polinômio para calcular o valor desejado.

CAPÍTULO II

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capitulo, limitar-nos-emos ao estudo das funções seno, cosseno e tangentes. Inicialmente, serão apresentadas as definições dessas funções. Depois, usando o ciclo trigonométrico, chega-se a algumas identidades importantes, as quais serão usadas, ainda neste capítulo, na solução de vários exercícios que servirão de suportes para encontrar as soluções dos exercícios de várias olimpíadas presentes no capitulo 3.

Parte 1 - Trigonometria

2.1 A FUNÇÃO COSSENO

DEFINIÇÃO : Dado um número real x, seja P a sua imagem no ciclo trigonométrico. Denominamos cosseno de x (e indicamos por cos(x) a abscissa OP_2 do ponto P em relação ao eixo uOv. Denominamos função cosseno a função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ que associa a cada numero real x o real $OP_2 = \cos x$, isto é, $f(x) = \cos x$

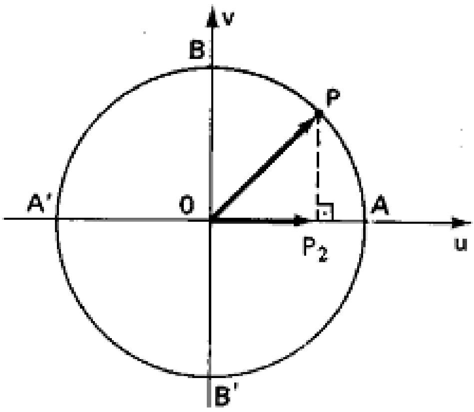

Figura 2.1: Representação da função cosseno no ciclo trigonométrico

Propriedades:

- A imagem da função, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ é o intervalo [-1,1]
- A função $f:[0,\pi]\to$ [-1,1] , $f(x)=\cos x$,é bijetora
- A função, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ é periódica e seu período é 2π
- Gráfico

Fazendo um diagrama com x nas abscissas e cos x em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado cossenoide, que nos indica como varia a função $f(x)=\cos x$.

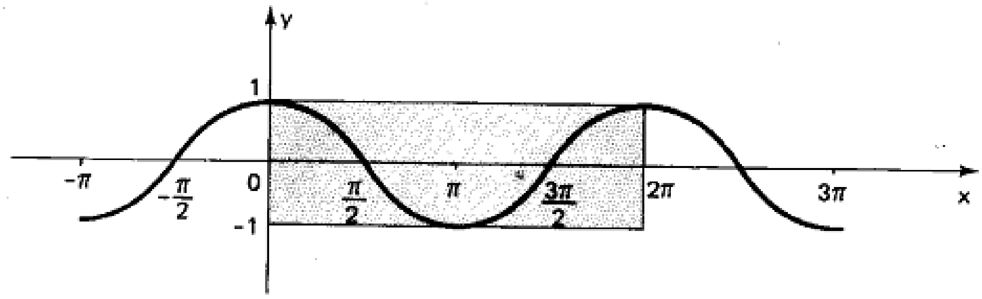

Figura 2.2: Gráfico da função cosseno

2.2. A FUNÇÃO SENO

DEFINIÇÃO: Dado um número real x, seja P a sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x (e indicamos por cos x a abscissa OP_1 do ponto P em relação ao eixo uOv. Denominamos função seno a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que associa a cada numero real x o real $OP_1 = senx$, isto é, $f(x)=senx$.

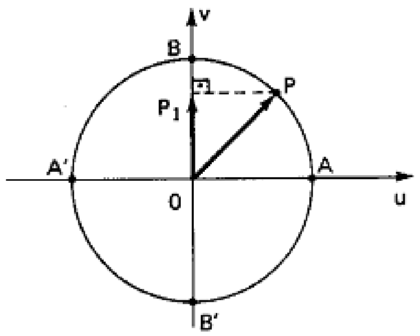

Figura 2.3: Representação da função seno no ciclo trigonométrico

Propriedades:

- A imagem da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=senx$, é o intervalo [-1,1];
- A função $f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to$ [-1,1], $f(x)=senx$, é bijetora;
- A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=senx$ é periódica e seu período é 2π;
- Gráfico

Fazendo um diagrama com x nas abscissas e sen x em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado senoide, que nos indica como varia a função $f(x)=senx$.

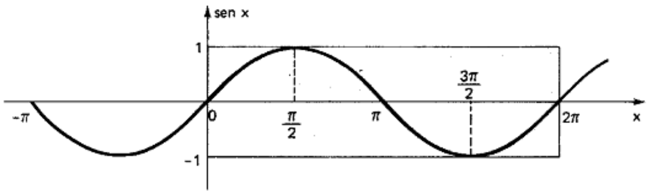

Figura 2.4: Gráfico da função seno

2.3 A FUNÇÃO TANGENTE

Definição: Dado um numero real x, x $\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ seja P a sua imagem no ciclo.

Consideremos a reta OP e seja T a sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de x e indicamos por tg(x) a medida algébrica do segmento AT.

Denominamos função tangente a função $f:\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ que associa a cada número real x o real o real $AT=tgx$, isto é , $f(x)=tgx$.

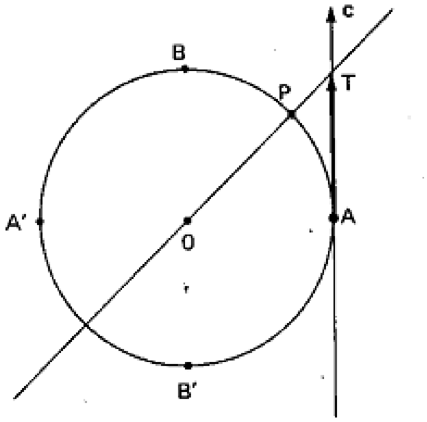

Figura 2.5: Representação da função tangente no ciclo trigonométrico

Propriedades:

- A imagem da função, $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = tgx$ é $\mathbb{R}$
- A função $f : [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = tgx$. é bijetora
- A função, $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = tgx$ é periódica e seu período é π
- Gráfico

Fazendo um diagrama com x nas abscissas e tg x em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, que nos indica como varia a função $f(x) = tgx$.

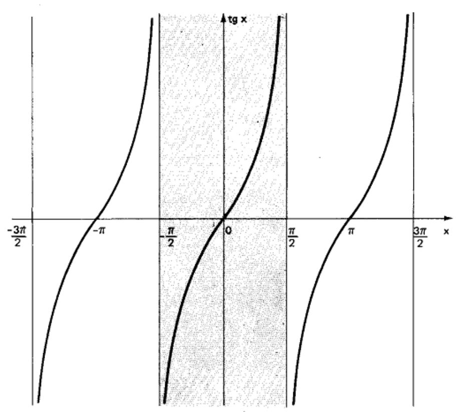

Figura 2 6:Gráfico da função tangente

2.4 PRINCIPAIS RESULTADOS A SEREM UTILIZADOS NA RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

Um resultado que vamos usar com bastante frequência no próximo capítulo, na resolução de problemas de olimpíadas, é a solução de equações trigonométricas como seno, cosseno e tangente.

As soluções das equações envolvendo senos são sen (α) = sen (β) implica em:

$$\alpha = \beta + 2k\pi \text{ ou } \alpha = (\pi - \beta) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

As soluções das equações envolvendo cosseno são cos (α) = cos (β) implica em:

$$\alpha = \beta + 2k\pi \text{ ou } \alpha = (2\pi - \beta) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

As soluções das equações envolvendo tangente são tg (α) = tg (β) implica em:

$$\alpha = \beta + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

Outros resultados que serão usados são as identidades a seguir:

$$sen(a+b) = sena.\cos b + senb.\cos a \tag{2.4}$$

$$sen(a-b) = sena.\cos b - senb.\cos a \tag{2.5}$$

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - sena.senb \tag{2.6}$$

$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + sena.senb \tag{2.7}$$

$$\cos^2 x + sen^2 x = 1 \tag{2.8}$$

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga.tgb} \tag{2.9}$$

$$senp + senq = 2.sen(\frac{p+q}{2}).\cos(\frac{p-q}{2}) \tag{2.10}$$

$$senp - senq = 2.sen(\frac{p-q}{2}).\cos(\frac{p+q}{2}) \tag{2.11}$$

$$\cos p + \cos q = 2.\cos(\frac{p+q}{2}).\cos(\frac{p-q}{2}) \tag{2.12}$$

$$\cos p - \cos q = -2.sen(\frac{p+q}{2}).sen(\frac{p-q}{2}) \tag{2.13}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \tag{2.14}$$

$$sen\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad (2.15)$$

$$tg\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \qquad (2.16)$$

A partir destas 16 fórmulas, podemos deduzir várias outras fórmulas em Trigonometria.

Exercício Resolvido 2.1: Deduza a fórmula de cos 2x em função de cos x.

Solução:

Usando 2.6 temos que $\cos 2x=\cos(x+x)=\cos x.\cos x-senx.senx$.

Portanto $\cos 2x=\cos^2 x-sen^2 x$.

Usando a fórmula 2.8 temos que $\cos 2x=2\cos^2 x-1$.

Exercício Resolvido 2.2: Prove que $\cos(2x)=1-2sen^2(x)$.

Solução:

Usando a fórmula 2.6 temos que:

$\cos 2x=\cos(x+x)=\cos x.\cos x-senx.senx$.

Portanto $\cos 2x=\cos^2 x-sen^2 x$.

Usando a fórmula 2.8 temos que $\cos 2x=1-2sen^2 x$.

Exercício Resolvido 2.3: Usando a fórmula 2.6 escreva cos 3x em função do cos x.

Solução:

Usando a fórmula 2.6 temos que:

$\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x.\cos x-sen2x.senx$

Pela fórmula 2.8 temos que

$\cos 2x.\cos x-sen2x.senx=(2\cos^2 x-1).\cos x.(2.senx.\cos x).senx$

Portanto:

$\cos 3x=2\cos^3 x-\cos x-2sen^2x.\cos x=2\cos^3 x-\cos x-2(1-\cos^2 x).\cos x=4\cos^3 x-3\cos x$

Exercício Resolvido 2.4: Use Exercício Resolvido 2.1 para encontrar a fórmula do cos 4x em função do cos x

Solução:

Usando o Exercício Resolvido 2.1 temos que:

$\cos 4x = \cos(2.2x) = 2(cos2x)^2 - 1 = 2.(2\cos^2 x - 1)^2 - 1$

Portanto $\cos 4x = 2.(4\cos^4 x - 4\cos^2 + 1) - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 + 1$

Exercício Resolvido 2.5: Usando a fórmula de Moivre deduza a fórmula do cos nx em função do cos x, para qualquer n $\in \mathbb{N}$

Solução:

Pela fórmula de Moivre sabemos que $(\cos\alpha + i.sen\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i.sen(n\alpha)$, por outro lado, temos que:

$(\cos\alpha + i.sen\alpha)^n = (\cos^n \alpha - C_{n,2}.\cos^{n-2}\alpha.sen^2\alpha + C_{n,4}.\cos^{n-4}\alpha.sen^4\alpha + ... + C_{n,n-2}.\cos^2\alpha.sen^{n-2}\alpha - C_{n,n}.sen^n\alpha)$

$+i.(C_{n,1}.\cos^{n-1}\alpha.sen\alpha - C_{n,3}.\cos^{n-3}\alpha.sen^3\alpha + ... - C_{n,3}.\cos^3\alpha.sen^{n-3}\alpha + C_{n,1}\cos\alpha.sen^{n-1}\alpha)$

Igualando as partes reais temos:

$\cos(n\alpha) = (\cos^n \alpha - C_{n,2}.\cos^{n-2}\alpha.sen^2\alpha + C_{n,4}.\cos^{n-4}\alpha.sen^4\alpha + ... + C_{n,n-2}.\cos^2\alpha.sen^{n-2}\alpha - C_{n,n}.sen^n\alpha)$.

Exercício Resolvido 2.6: Deduza a fórmula de sen 2x em função de cos x e sen x

Solução: Usando a fórmula 2.4 temos que:

$sen2x = sen(x + x) = senx.\cos x + senx.\cos x = 2.senx.\cos x$

Exercício Resolvido 2.7: Deduza a fórmula de sen 3x em função de sen x

Solução: Usando a fórmula 2.4 temos que:

$sen3x = sen(2x + x) = sen2x.\cos x + senx.\cos 2x$

Usando os exercícios resolvidos 2.1 e 2.6 temos que:

$sen2x.\cos x + senx.\cos 2x = (2senx.\cos x) + (2\cos^2 x - 1).senx = 2senx.\cos^2 x$

$+2\cos^2 x.senx - senx$

Usando a fórmula 2.8 temos que:

$2senx.\cos^2 x + 2\cos^2 x.senx - senx = (2senx).(1 - sen^2 x) + 2.(1 - sen^2 x).(senx) - senx$

$= -4sen^3 x + 3senx$

Exercício Resolvido 2.8: Deduza a fórmula de sen 5x em função de sen x

Solução:

Usando a fórmula 2.4 temos que:

$sen5x = sen(3x + 2x) = sen3x.\cos 2x + sen2x.\cos 3x$

Usando os Exercícios Resolvidos 2.7, 2.6, 2.2 e 2.3.

$$sen5x = sen(3x+2x) = sen3x.\cos 2x + sen2x.\cos 3x$$
$$(-4sen^3x+3senx).(1-2sen^2x)+(2senx.\cos x).(4\cos^3 x-3\cos x)$$
$$= (-4sen^3x+3senx).(1-2sen^2x)+(8senx.\cos^4 x-6senx.\cos^2 x)$$
$$= (-4sen^3x+3senx).(1-2sen^2x)+(8senx.(1-sen^2x)^2-6senx.(1-sen^2x)$$
$$= 5senx - 20sen^3x + 16sen^5x$$

Exercício Resolvido 2.9: Deduza a fórmula de tg 2x em função de tg x

Solução:

Pela fórmula 2.9 temos que:

$$\text{tg}2x = \text{tg}(x+x) = \frac{\text{tg}x+\text{tg}x}{1-\text{tg}x.\text{tg}x} = \frac{2\,\text{tg}x}{1-\text{tg}^2x}$$

Exercício Resolvido 2.10: Deduza a fórmula de tg 3x em função de tg x

Solução:

Pela fórmula 2.9 e pelo exercício resolvida 2.9 temos que:

Solução:

$$\text{tg}3x = \text{tg}(2x+x) = \frac{\text{tg}2x+\text{tg}x}{1-\text{tg}2x.\text{tg}x} = \frac{\frac{2\,\text{tg}x}{1-\text{tg}^2x}+\text{tg}x}{1-(\frac{2\,\text{tg}x}{1-\text{tg}^2x}).\text{tg}x} = \frac{3\,\text{tg}x-\text{tg}^3x}{1-3\,\text{tg}^2x}$$

Exercício Resolvido 2.11: Deduza a fórmula de tg 4x em função de tg x

Solução:

Pelas fórmula 2.9 e exercício resolvido 2.9 temos que:

$$\text{tg}4x = \text{tg}(2x+2x) = \frac{2.\text{tg}2x}{1-\text{tg}^2 2x} = \frac{4\,\text{tg}x-4\text{tg}^3x}{\text{tg}^4x-6\,\text{tg}^2x+1}$$

Exercício Resolvido 2.12: Deduza a fórmula de tg 5x em função de tg x

Solução:

Pelas fórmula 2.9 e exercício resolvido 2.11 temos que:

$$\text{tg}5x = \text{tg}(4x+x) = \frac{\text{tg}4x+\text{tg}x}{1-\text{tg}4x.\text{tg}x} = \frac{\frac{4\,\text{tg}x-4\text{tg}^3x}{\text{tg}^4x-6\,\text{tg}^2x+1}+\text{tg}x}{1-(\frac{4\,\text{tg}x-4\text{tg}^3x}{\text{tg}^4x-6\,\text{tg}^2x+1}).\text{tg}x} = \frac{\text{tg}^5x-10\,\text{tg}^3x+5\,\text{tg}x}{5\,\text{tg}^4x-10\,\text{tg}^2x+1}$$

Parte 2 – Polinômios.

Definição: Um polinômio (ou função polinomial) de grau n é uma função da forma:

P(x) = $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ onde os coeficientes $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais e $a_n \neq 0$.

Definição: Seja f(x) = $b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$ um polinômio não nulo. Chama-se grau de f, e representa-se por gr f, o número real p tal que b_p tal que $b_p \neq 0$ e $b_i = 0$ para todo i > p. Assim, o grau de um polinômio f é o índice do "ultimo" termo não – nulo de f.

Exemplos:

- $1 + x + 3x^2$ é um polinômio de grau 2
- $3 + 4x^2 + 6x^4$ é um polinômio de grau 4

Teorema 1: Seja g(x) um polinômio de grau n, então este polinômio possui exatamente n raízes, onde n é um numero inteiro positivo qualquer.

Teorema 2 (Relações de Girard): Seja h(x) = $c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n$ um polinômio de grau n e sejam $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ as n raízes de h(x) então vale que:

$$i) r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n = -\frac{c_{n-1}}{c_n}$$

$$ii) r_1.r_2 + r_1.r_3 + r_1.r_n + ... + r_{n-1}.r_n = \frac{c_{n-2}}{c_n}$$

$$iii) r_1.r_2.r_3 + r_1.r_2.r_4 + ... + r_{n-2}.r_{n-1}.r_n = -\frac{c_{n-3}}{c_n}$$

De modo geral o produto dos $C_{n.h}$ produtos de h raízes da equação é

$$(-1)^h . \frac{c_{n-h}}{c_n}$$

CAPÍTULO III

3 EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E POLINÔMIOS

Serão apresentadas 06 classe de problemas, a maioria de olimpíadas, cuja metodologia utilizada para encontrar a solução de cada um desses problemas consiste em transformar uma equação trigonométrica em um polinômio, ou um polinômio em uma equação trigonométrica.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.1: (Olimpíada de Matemática da Bélgica, 2006)

a) Encontre todos os números reais α, tais que $\cos(4\alpha) = \cos(3\alpha)$.

b) Determine inteiros a, b, c, d tais que $\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}$ são soluções da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Solução:

Etapa 1: Compreender o problema

Na letra a, pede-se para resolver uma equação trigonométrica e na letra b, pede-se gerar um polinômio de grau 3 com raízes trigonométricas.

Etapa 2: Estabelecer o plano

Será que podemos estabelecer uma relação entre as letras a e b?

Sabemos que $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$ e $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Se igualarmos as duas equações, teremos uma equação do quarto grau, mas queremos uma equação de terceiro grau; então temos que eliminar uma solução e aí chegarmos a uma equação de terceiro grau.

Etapa 3: execução do plano

Pela fórmula 2.2 temos que:

$$\cos(4\alpha) = \cos(3\alpha) \Leftrightarrow 4\alpha = 3\alpha + 2k\pi \text{ ou } 4\alpha = (2\pi - 3\alpha) + 2k\pi$$

Portanto, $\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $\alpha = \frac{2\pi + 2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$

Logo, as únicas soluções no intervalo $\alpha \in (0, 2\pi)$ são:

$$\alpha = 0,\ \frac{2\pi}{7},\ \frac{4\pi}{7} \text{ e } \frac{6\pi}{7}.$$

Assim, 1, $\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}$ são as raízes dessa equação.

Pelos exercícios resolvidos 2.3 e 2.4, temos que:

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1 \text{ e } \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha .$$

Daí, fazendo cosα = t, temos:

$$\cos 4\alpha = \cos 3\alpha \iff 8t^4 - 4t^3 - 8t^2 + 3t + 1 = 0 = (t-1).(8t^3 + 4t^2 - 4t - 1)$$

Portanto, o polinômio $8t^3 + 4t^2 - 4t - 1 = 0$ tem como raízes

$$\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}.$$

Logo a solução do item b é a = 8 , b = 4 , c = - 4 e d = - 1.

Etapa 4: Retrospecto

Como resolvemos este problema?

Basicamente, partiu-se de uma equação trigonométrica cos 3x = cos 4x e chegou-se a um polinômio de grau de 3 : $8t^3 + 4t^2 - 4t - 1$ que tem 3 soluções trigonométricas $\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}$.

Que lições pode-se tirar deste problema?

Pode-se, partir de uma equação trigonométrica, gerar um polinômio que tem soluções trigonométricas.

A partir deste problema, buscamos usar esta ideia para resolver outros problemas.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.2: (Olimpíada de Matemática do Vietnã 1982)

Ache a, b, c inteiros tais que as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são $\cos 72^0$ e $\cos 144^0$.

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível usar a ideia do problema anterior nesse problema?

Observe que, no problema anterior, foi conveniente gerar uma equação do terceiro grau com soluções trigonométricas. E agora seria possível gerar uma equação do segundo grau que tem soluções trigonométricas?

Então, já conhecemos um problema correlato. Pode-se, então, usar a ideia dele nesse problema?

Solução:

Observe que cos $\cos 72^0$ e $\cos 144^0$ satisfazem a equação $\cos 2x + \cos x = -\frac{1}{2}$, pois $2\cos^2 x - 1 + \cos x = -\frac{1}{2}$. Fazendo t = cos x temos que $4t^2 + 2t - 1 = 0$. Logo, a equação polinomial $4t^2 + 2t - 1 = 0$ temo como soluções $\cos 72^0$ e $\cos 144^0$ portanto a = 4,b = 2 e c = -1 .

Agora vamos resolver três problemas que são o inverso da nossa técnica, onde temos o polinômio e, a partir dele, achamos a equação trigonométrica.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.3:

Resolva o sistema abaixo: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4x^3 - 3x = 2x^2 - 1 \end{cases}$.

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível usar a ideia do problema 3.1 nesse problema?

Como $x^2 + y^2 = 1$ garante que x e y estão no intervalo [-1,1] então x e y podem ser transformados em cossenos.

Lembre-se que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ e $\cos 2x = 2x^2 - 1$

Então, pode-se chegar a uma equação do tipo cos 3x = cos 2x; agora é possível usar o exercício 3.1?

Solução

Como $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |x| \leq 1$, logo podemos fazer x = cos α .

Daí temos que $4x^3 - 3x = 2x^2 - 1 \Rightarrow \cos 3\alpha = \cos 2\alpha \Rightarrow \cos 3\alpha - \cos 2\alpha = 0$

Usando a fórmula 2.13 temos que:

$$\cos 3\alpha - \cos 2\alpha = -2sen(\frac{5\alpha}{2}).sen(\frac{\alpha}{2})$$

Portanto $\text{sen}\left(\frac{5\alpha}{2}\right) = 0$ ou $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$.

Parte 1: Resolver a equação $\text{sen}\left(\frac{5\alpha}{2}\right) = 0$

$$\frac{5\alpha}{2} = k\pi = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

Parte 2: Resolver a equação $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$

$$\frac{\alpha}{2} = k\pi \Rightarrow \alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo as soluções são:

(1, 0), (–1, 0), $\left(\cos\frac{2\pi}{5}, \text{sen}\frac{2\pi}{5}\right)$, $\left(\cos\frac{4\pi}{5}, \text{sen}\frac{4\pi}{5}\right)$, $\left(\cos\frac{6\pi}{5}, \text{sen}\frac{6\pi}{5}\right)$, $\left(\cos\frac{8\pi}{5}, \text{sen}\frac{8\pi}{5}\right)$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.4: Resolva a equação $8x^3 – 6x – 1 = 0$.

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível usar a ideia do problema 3.1 nesse problema?

Lembre-se que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

Então, pode - se usar a ideia do exercício 3.1?

Solução

$$8x^3 - 6x - 1 = 0 \Rightarrow 2.(4x^3 - 3x) = 1 \Rightarrow 4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$$

Vamos achar as soluções tais que $|x| \le 1$. Faça x = cos α. Teremos então:

$$\cos 3\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow 3\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3\alpha = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou}$$

$$\alpha = \frac{11\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}.$$

Como o polinômio é de terceiro grau, este tem apenas 3 raízes. Logo, não há soluções tais que $|x| > 1$

Logo, há apenas 3 soluções: $\cos\frac{\pi}{18}, \cos\frac{13\pi}{18}, \cos\frac{25\pi}{18}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.5: Resolva a equação no conjunto dos números reais: $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$.

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível usar a ideia do problema 3.1 nesse problema?

Pode-se chegar a uma equação do tipo cos mx = cos nx?

Solução

É claro que $x \geq -2$. Agora vamos analisar 2 casos:

Caso 1: $-2 \leq x \leq 2$

Daí, podemos fazer $x = 2\cos\alpha$, onde $\alpha \in (0, \pi)$. Assim, substituindo na equação original temos que:

$$8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha = \sqrt{2\cos\alpha + 2}.$$

Pela fórmula 2.14 temos que:

$$\sqrt{2\cos\alpha + 2} = \sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

Portanto, temos que:

$$8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha = \sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2\cos\frac{\alpha}{2}$$

Sendo assim, temos que:

$$2\cos 3\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos 3\alpha = \cos\frac{\alpha}{2}$$

Logo, pela fórmula 2.2, temos que:

$$3\alpha + \frac{\alpha}{2} = 2k\alpha, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 3\alpha - \frac{\alpha}{2} = 2k\alpha, k \in \mathbb{Z}.$$

Como $\alpha \in (0, \pi)$, temos que x = $2\cos 0^0$ ou $2\cos\frac{4\pi}{5}$ ou $2\cos\frac{4\pi}{7}$.

Caso 2: x > 2

Neste caso, temos que $x^3 - 3x > x^3 - 4x = x.(x^2 - 4) > 0$.

Por outro lado, temos que:

$$x^2 - x - 2 = (x-2).(x=1) > 0 \Rightarrow x > \sqrt{x+2} \Rightarrow \Rightarrow x^3 - 3x > x > \sqrt{x+2},$$

logo, não há solução nesse caso.

Agora vamos resolver dois problemas de olimpíadas, usando a técnica acima:

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.6: (Olimpíada de Matemática da Moldávia) Encontre todas as soluções reais da equação: $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível poder usar a ideia do problema 3.1 nesse problema?

Como temos $\sqrt{1-x^2}$, então podemos concluir que -1 < x < 1 podemos transformar x em cosseno

Pode-se chegar a uma equação do tipo sen α = sen β ?

Solução

$$1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Podemos então fazer x = cos α, em que $\alpha \in (0,\pi)$. Assim, temos que:

i) $\sqrt{1-x} = \sqrt{1-\cos\alpha} = \sqrt{2\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2}\cdot\text{sen}\frac{\alpha}{2}$ (como $\alpha \in (0,\pi)$ temos que $\sqrt{\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = \text{sen}\frac{\alpha}{2}$).

ii) $2x^2 - 1 = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$.

iii) $2x\sqrt{1-x^2} = 2.\text{sen}\alpha.\cos\alpha = \text{sen}2\alpha$ (como $\alpha \in (0,\pi)$, temos que $\sqrt{\text{sen}^2\alpha}$ = sen α).

Daí temos que:

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x.\sqrt{1-x^2} \;\Rightarrow\; \sqrt{2}\,\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \cos 2\alpha + \text{sen}2\alpha \;\Rightarrow$$

$$\sqrt{2}\,\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \text{sen}\frac{\alpha}{2} = \text{sen}\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

Portanto, pela fórmula 2.1 temos que: $2\alpha + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\alpha}{2} + 2k\pi$ ou $2\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi$

Temos dois casos a analisar:

Caso 1: $2\alpha + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\alpha}{2} + 2k\pi$.

$2\alpha + \frac{\pi}{4} = \left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) + 2k\pi \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{3\pi + 8k\pi}{10}$ e como $\alpha \in (0,\pi)$, temos que $\alpha = \frac{3\pi}{10}$ é a única solução.

Caso 2**:** $2\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi$

$2\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{-\pi + 8k\pi}{6}$ e como $\alpha \in (0,\pi)$, temos que não há solução.

Logo, a única solução é $x = \cos\frac{3\pi}{10}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.7: (Olimpíada Brasileira de Matemática 2002)

Determine todas as soluções reais da equação $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}$

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível usar a ideia do problema 3.1 nesse problema?

Pode-se chegar a uma equação do tipo cos α = cos β?

SOLUÇÃO DE MÁRCIO AFONSO ASSAD COHEN (RIO DE JANEIRO - RJ)

Seja $x = 2\cos\alpha$ com $\alpha \in (0, \frac{\pi}{3})$ (pois sabe-se que $1 < \sqrt{2} \le x \le \sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$).

Portanto, pela fórmula 2.14 temos que:

$$2 + x = 2.(1+\cos\alpha) = 4\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

Portanto, temos que:

$\sqrt{2+x} = 2\cos\frac{\alpha}{2}$ (pois $\frac{\alpha}{2} \in (0, \frac{\pi}{6})$,logo $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$)

Note que:

$$\sqrt{2+x} = 2\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow 2 - \sqrt{2+x} = 2 - 2\cos\frac{\alpha}{2} = 2.(1-\cos\frac{\alpha}{2})$$

Agora, usando a formula 2.15, temos que :

$$2.(1-\cos\frac{\alpha}{2}) = 2.2sen^2\frac{\alpha}{4}$$

Portanto, temos que:

$\sqrt{2-\sqrt{2+x}} = 2sen\frac{\alpha}{4} = 2sen\frac{\alpha}{4}$ (pois $sen\frac{\alpha}{4} > 0$)

Logo

$$x = \sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}} \Rightarrow \quad x = \sqrt{2+2sen\frac{\alpha}{4}} = \sqrt{2+2\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4})} = \sqrt{2.(2.\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{8}))} =$$

$$2\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{8}) \Rightarrow 2\cos\alpha = 2\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{8}) \Rightarrow \cos\alpha = \cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{8})$$

Usando a formula 2.2. temos que:

$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{8} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $\alpha = 2\pi - (\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{8})$, $k \in \mathbb{Z}$

Como $\alpha \in (0, \frac{\pi}{3})$ temos que $\alpha = \frac{2\pi}{9}$ é a única solução.

Portanto $x = 2\cos\frac{2\pi}{9}$ é a única solução da equação

Ao usar esta técnica, vamos gerar um polinômio com raízes trigonométricas podendo também calcular somas e produtos entre funções trigonométricas.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.8: (Olimpíada Internacional de Matemática) Prove que $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível usar a ideia do problema 3.1 nesse problema?

Pode-se chegar a uma equação do tipo cos mx = cos nx?

Solução:

Note que $3\frac{\pi}{7}+4\frac{\pi}{7}=\pi$, $3\frac{3\pi}{7}+4\frac{3\pi}{7}=3\pi$ e $3\frac{5\pi}{7}+4\frac{5\pi}{7}=5\pi$, logo $\frac{\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{5\pi}{7}$ são soluções da equação $\cos 4x=-\cos 3x \Rightarrow \cos 4x+\cos 3x=0$

Usando a fórmula 2.12 temos que:

$\cos 4x+\cos 3x=2.\cos\frac{7x}{2}.\cos\frac{x}{2}=0 \Rightarrow \cos\frac{7x}{2}=0$ ou $\cos\frac{x}{2}=0$

Parte 1: Resolver a equação $\cos\frac{7x}{2}=0$.

$\frac{7x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{7}+\frac{2k\pi}{7} \Rightarrow x=\frac{\pi}{7},\frac{3\pi}{7},\frac{5\pi}{7},\pi,\frac{9\pi}{7},\frac{11\pi}{7},\frac{13\pi}{7};$

mas $\cos\frac{\pi}{7}=\cos\frac{13\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}=\cos\frac{11\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}=\cos\frac{9\pi}{7}$.

Logo há 4 soluções distintas $\frac{\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{5\pi}{7}$, π.

Parte 2: Resolver a equação $\cos\frac{x}{2}=0$.

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow x=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$, logo x = π é a única solução.

Por outro lado, temos que:

$\cos 4x=-\cos 3x \Rightarrow 8\cos^4 x+4\cos^3 x-8\cos^2 x-3\cos x+1=0 \Rightarrow \quad 8t^4+4t^3-8t^2-3t+1=0$, onde $t=\cos x$. Claramente –1 é raiz desse polinômio. Temos então $8t^4+4t^3-8t^2-3t+1=(t+1).(8t^3-4t^2-4t+1)$, e o polinômio $8t^3-4t^2-4t+1$ tem como raízes $\cos\frac{\pi}{7},\cos\frac{3\pi}{7},\cos\frac{5\pi}{7}$.

Pelas relações de Girard, temos:

$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.9: (Mathematical Olimpiad Correspondence Program) Prove que $\sec 40^0 + \sec 80^0 + \sec 160^0 = 6$.

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível usar a ideia do problema 3.8 nesse problema?

Pode-se chegar a uma equação do tipo cos mx = k, onde k é uma constante e daí usar as relações de Girard para calcular a soma?

Solução

Note que $40^0, 80^0$ e 160^0 satisfazem a equação $\cos 3\alpha = -\frac{1}{2}$

Usando o exercício resolvido 2.3, temos que: $\cos 3\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow 8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha + 1 = 0$,

logo $\cos 40^0, \cos 80^0$ e $\cos 160^0$ são as raízes do polinômio $8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha + 1 = 0$.

Assim, temos que:

$$\cos 40^0.\cos 80^0 + \cos 160^0.\cos 80^0 + \cos 40^0.\cos 160^0 = -\frac{6}{8}$$

$$\cos 40^0.\cos 80^0.\cos 160^0 = -\frac{1}{8}$$

$$\sec 40^0 + \sec 80^0 + \sec 160^0 = \frac{1}{\cos 40^o} + \frac{1}{\cos 80^o} + \frac{1}{\cos 160^o} =$$

$$= \frac{\cos 40^o \cos 80^o + \cos 160^o \cos 40^o + \cos 160^o \cos 80^o}{\cos 160^o \cos 80^o \cos 40^o} = 6.$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.10: Prove que $tg9^0 + tg81^0 - tg63^0 - tg27^0 = 4$.

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível usar a ideia do problema 3.8 nesse problema?

Pode-se chegar a uma equação do tipo tg mx = k onde k é uma constante e daí usar as relações de Girard para calcular a soma?

Solução:

Note que as raízes da equação $tg5x = 1$, são $tg9^0, tg45^0, tg81^0, tg117^0, tg153^0$.

Pelo exercício resolvido 2.12 temos que:

$$\text{tg}5x = \frac{\text{tg}^5 x - 10\,\text{tg}^3 x + 5\,\text{tg}\,x}{5\,\text{tg}^4 x - 10\,\text{tg}^2 x + 1},$$

Logo $tg5x=1 \Rightarrow \dfrac{tg^5x-10\,tg^3x+5\,tg\,x}{5\,tg^4x-10\,tg^2x+1}=1 \Rightarrow tg^5x-5tg^4x-10tg^3x-5tgx-1=0$.

Usando as relações de Girard, temos que:

$$tg9^0+tg45^0+tg81^0+tg117^0+tg153^0=5$$

$tg9^0+tg81^0-tg63^0-tg27^0=4$, pois $tg(180^0-x)=-tgx$ e $tg45^0=1$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.11: Prove que $\text{tg}\,\frac{\pi}{7}\cdot\text{tg}\,\frac{2\pi}{7}\cdot\text{tg}\,\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$.

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível a ideia do problema 3.8 nesse problema?

Pode-se chegar a uma equação do tipo tg mx = tg nx e daí usar as relações de Girard para calcular esse produto?

Solução

Note que $\text{tg}\,\frac{\pi}{7}$, $\text{tg}\,\frac{2\pi}{7}$, $\text{tg}\,\frac{3\pi}{7}$, $\text{tg}\frac{4\pi}{7}$, $\text{tg}\frac{5\pi}{7}$, $\text{tg}\frac{6\pi}{7}$, $\text{tg}\pi$, são raízes da equação

$-tg4x=tg3x,$.

Pelos exercícios resolvidos 2.10 e 2.11 temos que:

$\text{tg}3x=\dfrac{3\,\text{tg}\,x-\text{tg}^3x}{1-3\,\text{tg}^2x}$ e $\text{tg}4x=\dfrac{4\,\text{tg}\,x-4\text{tg}^3x}{\text{tg}^4x-6\,\text{tg}^2x+1}$.

Logo: $-tg4x=tg3x\Rightarrow$ tg 3x $\Rightarrow \dfrac{3\,\text{tg}\,x-\text{tg}^3x}{1-3\,\text{tg}^2x}=-\dfrac{4\,\text{tg}\,x-4\text{tg}^3x}{\text{tg}^4x-6\,\text{tg}^2x+1}$.

Fazendo tg x = y e resolvendo a equação acima temos que:

$y^7-21y^5+35y^3-7y=0\Rightarrow y.(y^6-21y^4+35y^2-7)=0$.

Assim as raízes da equação $y^6-21y^4+35y^2-7=0$ são $\text{tg}\frac{\pi}{7},\text{tg}\frac{2\pi}{7},\text{tg}\frac{3\pi}{7},\text{tg}\frac{4\pi}{7},\text{tg}\frac{5\pi}{7},\text{tg}\frac{6\pi}{7},$,

logo temos Pelas relações de Girard que:

$$\text{tg}\frac{\pi}{7}.\text{tg}\frac{2\pi}{7}.\text{tg}\frac{3\pi}{7}.\text{tg}\frac{4\pi}{7}.\text{tg}\frac{5\pi}{7}.\text{tg}\frac{6\pi}{7}=7.$$

Como $\text{tg}\frac{6\pi}{7}=-\text{tg}\frac{\pi}{7},\text{tg}\frac{5\pi}{7}=-\text{tg}\frac{2\pi}{7},\text{tg}\frac{4\pi}{7}=-\text{tg}\frac{3\pi}{7}$, temos que

$$\left(\text{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\text{tg}\frac{2\pi}{7}\cdot\text{tg}\frac{3\pi}{7}\right)^2=7 \quad\Rightarrow\quad \text{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\text{tg}\frac{2\pi}{7}\cdot\text{tg}\frac{3\pi}{7}=\pm\sqrt{7}\,.$$

Como $\frac{\pi}{7}<\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{7}<\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{7}<\frac{\pi}{2}$ temos que : $\text{tg}\frac{\pi}{7}>0$, $\text{tg}\frac{2\pi}{7}>0$ e $\text{tg}\frac{3\pi}{7}>0$

Logo $\text{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\text{tg}\frac{2\pi}{7}\cdot\text{tg}\frac{3\pi}{7}>0$ portanto $\text{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\text{tg}\frac{2\pi}{7}\cdot\text{tg}\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.12:

Prove que $tg^2 1^0+tg^2 3^0+...+tg^2 87^0+tg^2 89^0=4005$.

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível a ideia do problema 3.8 nesse problema?

Pode-se chegar a uma equação do tipo tg mx = k, onde k é uma constante e daí usar as relações de Girard para calcular a soma?

Solução:

Note que a equação $\cos 90\alpha=0$, tem como raízes $\cos 1^0,\cos 3^0,...,\cos 189^0$.

Pelo exercício resolvido 2.5 temos que:

$$\cos(90\alpha)=(\cos^{90}\alpha-C_{90,2}.\cos^{88}\alpha.sen^2\alpha+C_{90,4}.\cos^{86}\alpha.sen^4\alpha+...+C_{90,88}.\cos^2\alpha.sen^{88}\alpha-C_{90,90}.sen^{90}\alpha)$$

Dividindo tudo por $\cos^{90}\alpha$ e fazendo $\text{tg}\,\alpha=\text{u}$, temos que:

$$1-C_{90,2}.\text{u}^2+C_{90,4}.\text{u}^4+...+C_{90,88}.\text{u}^{88}-u^{90}.$$

Fazendo $\text{u}^2=t$, temos:

$$1-C_{90,2}.\text{t}+C_{90,4}.\text{t}^2+...+C_{90,88}.\text{t}^{44}-t^{45}.$$

Note que

$$\cos 91^0=-\cos 89^0,\cos 93^0=-\cos 87^0,...,\cos 177^0=-\cos 3^0,\cos 179^0=-\cos 1^0$$

portanto as raízes da equação

$$1-C_{90,2}.\text{t}+C_{90,4}.\text{t}^2+...+C_{90,88}.\text{t}^{44}-t^{45}=0$$

são $tg^2 1^0,tg^2 3^0,...,tg^2 87^0,tg^2 89^0$.

Usando as relações de Girard, temos que

$$\text{tg}^2 1^0+\text{tg}^2 3^0+...+\text{tg}^2 87^0+\text{tg}^2 89^0=\frac{C_{90,88}}{1}=4005\,.$$

EXRECÍCIO RESOLVIDO 3.13: Calcule o valor da expressão $tg20^0.tg40^0.tg60^0.tg80^0$

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível a ideia do problema 3.8 nesse problema?

Pode-se chegar a uma equação do tipo (tg mx)^2 =k onde k é uma constante e daí usar as relações de Girard para calcular esse produto?

Solução:

Observe a equação trigonométrica $(tg3x)^2 = 3 \Rightarrow tg3x = \pm\sqrt{3}$.

Note que as raízes desta equação são $x = 20^0, 40^0, 80^0, 100^0, 140^0, 160^0$.

Pelo exercício resolvido 2.10 temos que:

$$\frac{3tgx - tg^3x}{1+3.tg^2x} = tg3x.$$

Fazendo y = tg x e substituindo na equação

$$(tg3x)^2 = 3 \Rightarrow \left(\frac{3y-y^3}{1+3.y^2}\right)^2 = 3 \Rightarrow \frac{y^6-6y^4+9y^2}{1+6y^2+9y^4} = 3 \Rightarrow y^6 - 33y^4 - 9y^2 - 3 = 0$$

Daí temos pelas relações de Girard que o produto das raízes desta equação é – 3.

Assim temos que $tg20^0.tg40^0.tg80^0.tg100^0.tg140^0.tg160^0 = -3$

Observe que

$tg20^0 = -tg160^0, tg40^0 = -tg140^0, tg80^0 = -tg100^0$, pois $tg(180^0 - x) = -tgx$.

Daí concluímos que: $tg20^0.tg40^0.tg80^0 = \sqrt{3} \Rightarrow tg20^0.tg40^0.tg60^0.tg80^0 = 3$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.14: Prove que: $sen20^0.\text{sen}\,40^0.\text{sen}\,60^0.\text{sen}\,80^0 = \frac{3}{16}$

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível a ideia do problema 3.8 nesse problema?

Pode-se chegar a uma equação do tipo (sen mx)^2 = k onde k é uma constante e daí usar as relações de Girard para calcular esse produto?

Solução:

Observe a equação trigonométrica $(sen3x)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow sen3x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Note que as raízes desta equação são $x = 20^0, 40^0, 80^0, 100^0, 140^0, 160^0$.

Pelo exercício resolvido 2.7, temos que:

$sen3x = -4sen^3x + 3senx$.

Fazendo y = sen x e substituindo na equação $(sen3x)^2 = \frac{3}{4}$ temos que

$$(-4y^3+3y)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow 16y^6 - 24y^4 + 9y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow 64y^6 - 96y^4 + 36y^2 - 3 = 0$$

Daí, temos pelas relações de Girard que o produto das raízes desta equação é $\frac{3}{64}$

Assim, temos que $sen20^0.sen40^0.sen80^0.sen100^0.sen140^0.sen160^0 = \frac{3}{64}$.

Observe que $sen20^0 = sen160^0, \text{sen}\,40^0 = sen140^0, \text{sen}\,80^0 = sen100^0$,

pois $\text{sen}(180^0 - x) = senx$.

Daí concluímos que:

$$sen20^0.\text{sen}\,40^0.\text{sen}\,80^0 = \frac{\sqrt{3}}{8} \Rightarrow sen20^0.\text{sen}\,40^0.\text{sen}\,60^0.\text{sen}\,80^0 = \frac{3}{16}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.15: (Olimpíada de Matemática dos Estados Unidos)

Prove que $sen\frac{\pi}{7}.sen\frac{2\pi}{7}.sen\frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}$

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível a ideia do problema 3.8 nesse problema?

Pode-se chegar a uma equação do tipo sen mx = k onde k é uma constante e daí usar as relações de Girard para calcular esse produto?

Solução:

Lema:

$$\text{sen}\,7\alpha = C_{7,1}.\cos^6\alpha.sen\alpha - C_{7,3}.\cos^4\alpha.sen^3\alpha + C_{7,5}.\cos^2\alpha.sen^5\alpha - C_{7,7}.sen^7\alpha$$

Prova :

Sabemos que $(\cos\alpha + i.sen\alpha)^n = \cos(\text{n}\,\alpha) + i.sen(n\alpha)$.

Por outro lado temos que :

$$(\cos\alpha + i.sen\alpha)^7 = \cos^7\alpha - C_{7,2}.\cos^5\alpha.sen^2\alpha + C_{7,4}.\cos^3\alpha.sen^4\alpha - C_{7,6}.\cos\alpha$$
$$+i.(\text{sen}\,7\alpha = C_{7,1}.\cos^6\alpha.sen\alpha - C_{7,3}.\cos^4\alpha.sen^3\alpha + C_{7,5}.\cos^2\alpha.sen^5\alpha - C_{7,7}.sen^7\alpha)$$

Daí, igualando as partes imaginarias, temos:

$$\text{sen}\,7\alpha = C_{7,1}.\cos^6\alpha.sen\alpha - C_{7,3}.\cos^4\alpha.sen^3\alpha + C_{7,5}.\cos^2\alpha.sen^5\alpha - C_{7,7}.sen^7\alpha\,,$$

com isso provamos o lema.

Agora vamos ao nosso problema:

Note que a equação $\text{sen}\,7\alpha = 0$, tem como raízes

$$\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{5\pi}{7},\frac{6\pi}{7},\frac{7\pi}{7}.$$

Pela formula do lema, temos que:

$$\text{sen}\,7\alpha = C_{7,1}.\cos^6\alpha.sen\alpha - C_{7,3}.\cos^4\alpha.sen^3\alpha + C_{7,5}.\cos^2\alpha.sen^5\alpha - C_{7,7}.sen^7\alpha$$

Fazendo $t = sen\alpha$, temos que:

$$7.(1-t^2)^3.t - 35.(1-t^2)^2.t^3 + 21.(1-t^2).t^5 - t^7 =$$
$$-64t^7 + 112t^5 + 56t^3 + 7t = 0 \Rightarrow t.(-64t^6 + 112t^4 + 56t^2 + 7) = 0$$

Portanto, as raízes de $-64t^6 + 112t^4 + 56t^2 + 7$ são $\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{5\pi}{7},\frac{6\pi}{7}$.

Logo $sen\frac{\pi}{7}.sen\frac{2\pi}{7}.sen\frac{3\pi}{7}.sen\frac{4\pi}{7}.sen\frac{5\pi}{7}.sen\frac{6\pi}{7} = \frac{-7}{64}$.

Como $sen\frac{\pi}{7} = -sen\frac{6\pi}{7}, sen\frac{2\pi}{7} = -sen\frac{5\pi}{7}, sen\frac{3\pi}{7} = -sen\frac{4\pi}{7}$ temos que:

$$-(sen\frac{\pi}{7}.sen\frac{2\pi}{7}.sen\frac{3\pi}{7})^2 = \frac{-7}{64} \Rightarrow sen\frac{\pi}{7}.sen\frac{2\pi}{7}.sen\frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}\quad.$$

Um outro problema que segue um raciocínio semelhante e que ajuda a resolver outros problemas é o seguinte:

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.16:

Sejam a, b, c números reais, tais que $a+b+c=0$. Prove que:

a) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \frac{a^7+b^7+c^7}{7}$

Solução

Seja $x^3 + mx^2 + px + q = 0$ um polinômio de terceiro, tal que suas raízes são a, b, c. Usando as relações de Girard, temos que:

$$a + b + c = -m, ab + ac + bc = p, abc = -q.$$

Assim, temos que:

$$(\mathrm{a+b+c})^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2.(ab + ac + bc) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2p$$

Por outro lado, temos:

$$\mathrm{a}^3 + pa + q = 0 \Rightarrow \mathrm{a}^3 = -pa - q$$
$$b^3 + pb + q = 0 \Rightarrow b^3 = -pb - q$$
$$c^3 + pc + q = 0 \Rightarrow c^3 = -pc - q$$

Somando as três igualdades acima, temos que:

$$a^3 + b^3 + c^3 = p.(a + b + c) - 3q = -3q.$$

Da mesma forma, temos:

$$\mathrm{a}^4 + pa^2 + qa = 0 \Rightarrow \mathrm{a}^4 = -pa^2 - qa$$
$$b^4 + pb^2 + qb = 0 \Rightarrow b^4 = -pb^2 - qb$$
$$c^4 + pc^2 + qc = 0 \Rightarrow c^4 = -pc^2 - qc$$

Somando as três igualdades acima, temos que:

$$a^4 + b^4 + c^4 = -p.(a^2 + b^2 + c^2) - q.(a + b + c) = 2p^2$$

Da mesma forma, temos que:

$$\mathrm{a}^5 + pa^3 + qa^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{a}^5 = -pa^3 - qa^2$$
$$b^5 + pb^3 + qb^3 = 0 \Rightarrow b^5 = -pb^3 - qb^2$$
$$c^5 + pc^3 + qc^2 = 0 \Rightarrow c^5 = -pc^3 - qc^2$$

Somando as três igualdades acima, temos que:

$$a^5 + b^5 + c^5 = -p.(a^3 + b^3 + c^3) - q.(a^2 + b^2 + c^2) = 5pq$$

Da mesma forma, temos que:

$$\mathrm{a}^7 + pa^5 + qa^4 = 0 \Rightarrow \mathrm{a}^7 = -pa^5 - qa^4$$
$$b^7 + pb^5 + qb^4 = 0 \Rightarrow b^7 = -pb^5 - qb^4$$
$$c^7 + pc^5 + qc^4 = 0 \Rightarrow c^7 = -pc^5 - qc^4$$

Somando as três igualdades acima, temos que:

$$a^7+b^7+c^7=-p.(a^5+b^5+c^5)-q.(a^4+b^4+c^4)=-7p^2q$$

Com isso, saem trivialmente os resultados das letras a e b.

A partir deste problema, tentamos usar esta ideia para resolver outros problemas.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.17: (Olimpíada de Matemática Croácia 2001)

Se $a+b+c=0$, calcule o valor da expressão $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{abc\cdot(a^4+b^4+c^4)}$.

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível usar a ideia do problema 3.16 nesse problema?

Pode-se chegar a uma equação do tipo cujas raízes são a, b e c e a partir daí usar a relações de Girard para calcular essas somas?

Solução

Seja $x^3+mx^2+px+q=0$, um polinômio de terceiro tal que suas raízes são a, b, c. Daí temos que $a+b+c=-m, ab+ac+bc=p, abc=-q$. Assim, temos que:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2.(ab+ac+bc)\Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2p$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} a^3+pa+q=0&\Rightarrow a^3=-pa-q\\ b^3+pb+q=0&\Rightarrow b^3=-pb-q\\ c^3+pc+q=0&\Rightarrow c^3=-pc-q \end{aligned}$$

Somando as três igualdades acima, temos que:

$$a^3+b^3+c^3=p.(a+b+c)-3q=-3q$$

Da mesma forma, temos que:

$$\begin{aligned} a^4+pa^2+qa=0&\Rightarrow a^4=-pa^2-qa\\ b^4+pb^2+qb=0&\Rightarrow b^4=-pb^2-qb\\ c^4+pc^2+qc=0&\Rightarrow c^4=-pc^2-qc \end{aligned}$$

Somando as três igualdades acima, temos que:

$$a^4+b^4+c^4=-p.(a^2+b^2+c^2)-q.(a+b+c)=2p^2$$

Da mesma forma, temos que:

$$a^5 + pa^3 + qa^2 = 0 \Rightarrow a^5 = -pa^3 - qa^2$$
$$b^5 + pb^3 + qb^3 = 0 \Rightarrow b^5 = -pb^3 - qb^2$$
$$c^5 + pc^3 + qc^2 = 0 \Rightarrow c^5 = -pc^3 - qc^2$$

Somando as três igualdades acima, temos que:

$$a^5 + b^5 + c^5 = -p.(a^3 + b^3 + c^3) - q.(a^2 + b^2 + c^2) = 5pq$$

Da mesma forma temos que:

$$a^7 + pa^5 + qa^4 = 0 \Rightarrow a^7 = -pa^5 - qa^4$$
$$b^7 + pb^5 + qb^4 = 0 \Rightarrow b^7 = -pb^5 - qb^4$$
$$c^7 + pc^5 + qc^4 = 0 \Rightarrow c^7 = -pc^5 - qc^4$$

Somando as três igualdades acima, temos que:

$$a^7 + b^7 + c^7 = -p.(a^5 + b^5 + c^5) - q.(a^4 + b^4 + c^4) = -7p^2q$$

Com isso, temos que $\frac{a^7 + b^7 + c^7}{abc(a^4 + b^4 + c^4)} = \frac{-7p^2q}{q(2p^2)} = \frac{7}{2}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.18: (Olimpíada Brasileira de Matemática 2003)

Sejam a, b, c números reais não nulos tais que $a+b+c=0$. Calcule os possíveis valores de $\frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2 \cdot (a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2}$.

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível usar a ideia do problema 3.16 nesse problema?

Pode-se chegar a uma equação do tipo cujas raízes são a, b e c e, a partir daí, usar a relações de Girard para calcular essas somas?

Solução

Seja $x^3 + mx^2 + px + q = 0$, um polinômio de terceiro tal que suas raízes são a, b, c. Daí temos que $a+b+c=-m, ab+ac+bc=p, abc=-q$. Assim, temos que:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2.(ab+ac+bc) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2p$$

Por outro lado, temos que:

$$a^3 + pa + q = 0 \Rightarrow a^3 = -pa - q$$
$$b^3 + pb + q = 0 \Rightarrow b^3 = -pb - q$$
$$c^3 + pc + q = 0 \Rightarrow c^3 = -pc - q$$

Somando as três igualdades acima, temos que:

$$a^3 + b^3 + c^3 = p.(a + b + c) - 3q = -3q$$

Da mesma forma, temos que:

$$a^4 + pa^2 + qa = 0 \Rightarrow a^4 = -pa^2 - qa$$
$$b^4 + pb^2 + qb = 0 \Rightarrow b^4 = -pb^2 - qb$$
$$c^4 + pc^2 + qc = 0 \Rightarrow c^4 = -pc^2 - qc$$

Somando as três igualdades acima, temos que:

$$a^4 + b^4 + c^4 = -p.(a^2 + b^2 + c^2) - q.(a + b + c) = 2p^2$$

Da mesma forma, temos que:

$$a^5 + pa^3 + qa^2 = 0 \Rightarrow a^5 = -pa^3 - qa^2$$
$$b^5 + pb^3 + qb^3 = 0 \Rightarrow b^5 = -pb^3 - qb^2$$
$$c^5 + pc^3 + qc^2 = 0 \Rightarrow c^5 = -pc^3 - qc^2$$

Somando as três igualdades acima, temos que:

$$a^5 + b^5 + c^5 = -p.(a^3 + b^3 + c^3) - q.(a^2 + b^2 + c^2) = 5pq$$

Daí temos que $\dfrac{(a^3 + b^3 + c^3)^2 \cdot (a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2} = \dfrac{(9q^2 \cdot 2p^2)}{(5pq)^2} = \dfrac{18}{25}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.19: (Olimpíada de Matemática dos Estados Unidos)

Encontre todas as soluções (reais ou complexas) do sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 3 \end{cases}$$

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível usar a ideia do problema 3.16 nesse problema?

Pode-se chegar a uma equação do tipo cujas raízes são a, b e c e, a partir daí, usar a relações de Girard para calcular essas somas?

Solução

Seja $h(x) = x^3 + mx^2 + px + q$, um polinômio de terceiro tal que suas raízes são a, b, c. Daí, temos que $a+b+c=-m, ab+ac+bc=p, abc=-q$

Adicionalmente, vem:

$$(\mathrm{a+b+c})^2 = a^2+b^2+c^2+2.(ab+ac+bc)$$
$$\Rightarrow 9 = 3+2.(ab+ac+bc) \Rightarrow ab+ac+bc = 3 \Rightarrow p = 3$$

Por outro lado, temos que:

$$\mathrm{a}^3 + ma^2 + pa + q = 0 \Rightarrow \mathrm{a}^3 = -ma^2 - pa - q$$
$$b^3 + mb^2 + pb + q = 0 \Rightarrow b^3 = -mb^2 - pb - q$$
$$c^3 + mc^2 + pc + q = 0 \Rightarrow c^3 = -mc^2 - pc - q$$

Somando as três igualdades acima, temos que:

$$a^3+b^3+c^3 = -m.(a^2+b^2+c^2) - p.(a+b+c) - 3q = -3q$$
$$\Rightarrow 3 = -9+9-3q \Rightarrow q = -1$$

Assim, concluímos que $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$, portanto, a única solução do sistema é $a = b = c = 1$.

EXERECÍCIO RESOLVIDO 3.20: (Olimpíada de Matemática do Pará 2008)

Suponha que x, y e z são números reais tais que $a+b+c = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 0$.

Mostre que $\frac{a^6+b^6+c^6}{a^3+b^3+c^3} = abc$.

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível usar a ideia do problema 3.16 nesse problema?

Pode-se chegar a uma equação do tipo cujas raízes são a, b e c e, a partir daí, usar a relações de Girard para calcular essas somas?

Solução

Seja $x^3 + mx^2 + px + q = 0$, um polinômio de terceiro tal que suas raízes são a, b, c. Daí temos que $a+b+c=-m, ab+ac+bc=p, abc=-q$. Assim, temos que:

$$(\mathrm{a+b+c})^2 = a^2+b^2+c^2+2.(ab+ac+bc) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = -2p$$

Por outro lado, temos que:

$$\mathrm{a}^3 + pa + q = 0 \Rightarrow \mathrm{a}^3 = -pa - q$$
$$b^3 + pb + q = 0 \Rightarrow b^3 = -pb - q$$
$$c^3 + pc + q = 0 \Rightarrow c^3 = -pc - q$$

Somando as três igualdades acima, temos que

$$a^3 + b^3 + c^3 = p.(a + b + c) - 3q = -3q$$

Da mesma forma, temos que:

$$\mathrm{a}^4 + pa^2 + qa = 0 \Rightarrow \mathrm{a}^4 = -pa^2 - qa$$
$$b^4 + pb^2 + qb = 0 \Rightarrow b^4 = -pb^2 - qb$$
$$c^4 + pc^2 + qc = 0 \Rightarrow c^4 = -pc^2 - qc$$

Somando as três igualdades acima, temos que:

$$a^4 + b^4 + c^4 = -p.(a^2 + b^2 + c^2) - q.(a + b + c) = 2p^2$$

Da mesma forma, temos que:

$$\mathrm{a}^5 + pa^3 + qa^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{a}^5 = -pa^3 - qa^2$$
$$b^5 + pb^3 + qb^3 = 0 \Rightarrow b^5 = -pb^3 - qb^2$$
$$c^5 + pc^3 + qc^2 = 0 \Rightarrow c^5 = -pc^3 - qc^2$$

Somando as três igualdades acima, temos que:

$$a^5 + b^5 + c^5 = -p.(a^3 + b^3 + c^3) - q.(a^2 + b^2 + c^2) = 5pq$$

Da mesma forma, temos que:

$$\mathrm{a}^6 + pa^4 + qa^3 = 0 \Rightarrow \mathrm{a}^6 = -pa^4 - qa^3$$
$$b^6 + pb^4 + qb^3 = 0 \Rightarrow b^6 = -pb^4 - qb^3$$
$$c^6 + pc^4 + qc^3 = 0 \Rightarrow c^6 = -pc^4 - qc^3$$

Somando as três igualdades acima, temos que:

$$a^6 + b^6 + c^6 = -p.(a^4 + b^4 + c^4) - q.(a^3 + b^3 + c^3) = -p.(2p^2) - q(-3q) = -2\mathrm{p}^3 + 3q^2$$

Como $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow ab + ac + bc = 0 \Rightarrow p = 0$.

Assim temos que $a^6 + b^6 + c^6 = 3q^2$.

Daí temos que:

$$\frac{a^6+b^6+c^6}{a^3+b^3+c^3}=\frac{3q^2}{-3q}=-q=abc$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.21: (Olimpíada de Matemática da Moldávia 2000)

Os números inteiros a, b, c satisfazem à relação $a+b+c=0$. Mostre que o número $2.(a^4+b^4+c^4)$ é um quadrado perfeito.

Já vimos um problema semelhante a esse? É possível usar a ideia do problema 3.16 nesse problema?

Pode-se chegar a uma equação do tipo cujas raízes são a, b e c e, a partir daí, usar a relações de Girard para calcular essas somas?

Solução 1:

$$\begin{aligned}
&a+b+c=0\Rightarrow a+b=-c\Rightarrow a^2+b^2=c^2-2ab\\
&a+b+c=0\Rightarrow a+c=-b\Rightarrow a^2+c^2=b^2-2ac\\
&a+b+c=0\Rightarrow b+c=-a\Rightarrow b^2+c^2=a^2-2bc\\
&(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2.(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=\\
&a^4+b^4+c^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+\\
&=a^4+b^4+c^4+a^2.(b^2+c^2)+b^2.(\mathrm{a}^2+c^2)+c^2.(\mathrm{a}^2+b^2)\\
&=a^4+b^4+c^4+a^2.(\mathrm{a}^2-2\,\mathrm{bc})+b^2.(\mathrm{b}^2-2\,\mathrm{ac})+c^2.(\mathrm{c}^2-2\,\mathrm{ab})\\
&=2.(a^4+b^4+c^4)-2abc.(a+b+c)=2.(a^4+b^4+c^4)
\end{aligned}$$

Logo, o número $2.(a^4+b^4+c^4)$ é um quadrado perfeito.

Solução 2:

Seja $x^3+mx^2+px+q=0$, um polinômio de terceiro tal que suas raízes são a, b, c. Daí temos que $a+b+c=-m, ab+ac+bc=p, abc=-q$. Assim, temos que:

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})^2=a^2+b^2+c^2+2.(ab+ac+bc)\Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2p$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{a}^3+pa+q=0\Rightarrow \mathrm{a}^3=-pa-q\\
&b^3+pb+q=0\Rightarrow b^3=-pb-q\\
&c^3+pc+q=0\Rightarrow c^3=-pc-q
\end{aligned}$$

Somando as três igualdades acima, temos que

$$a^3+b^3+c^3 = p.(a+b+c)-3q = -3q$$

Da mesma forma, temos que:

$$\mathrm{a}^4 + pa^2+qa=0 \Rightarrow \mathrm{a}^4 = -pa^2-qa$$
$$b^4 + pb^2+qb=0 \Rightarrow b^4 = -pb^2-qb$$
$$c^4 + pc^2+qc=0 \Rightarrow c^4 = -pc^2-qc$$

Somando as três igualdades acima, temos que:

$$a^4+b^4+c^4 = -p.(a^2+b^2+c^2)-q.(a+b+c) = 2p^2$$

Logo, temos que $2.(a^4+b^4+c^4) = 2.2\mathrm{p}^2 = (2p)^2$

A técnica do problema resolvido 3.1 pode também ser usada para provar que uma determinada função trigonométrica é irracional. Para provar isso vamos precisar do seguinte teorema:

Teorema (Teste da raiz Racional): Se o número $\dfrac{p}{q}$,onde mdc (p,q) = 1,é uma raiz do polinômio com coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$,então p é um divisor de a_0 e q é um divisor a_n .

Prova:

Como $\dfrac{p}{q}$ é raiz do polinômio temos que:

$$a_n.\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}.\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + a_1.\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$\Rightarrow\ a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}.q + ... + a_1 p.q^{n-1} + a_0.q^n = 0$, logo temos que p é um divisor de a_0 e q é um divisor a_n .

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.22: (Olimpíada de Matemática da Bulgária 1978) Prove que o numero $\cos\dfrac{5\pi}{7}$ é :

a) raiz da equação $8x^3-4x^2-4x+1=0$

b) é um numero irracional

Solução:

a) Como já vimos no exercício resolvido 5 o polinômio $8x^3-4x^2-4x+1=0$ tem como raízes $\cos\frac{\pi}{7},\cos\frac{3\pi}{7},\cos\frac{5\pi}{7}$

b) Se $\cos\frac{5\pi}{7}$ fosse racional, então pelo teste da raiz racional, teríamos que $\cos\frac{5\pi}{7}$ = $\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{8}$, mas calculando o valor numérico destes números no polinômio, é fácil ver que nenhum dá zero; logo, as raízes deste polinômio são todas irracionais.

Analogamente, podemos concluir que $\cos\frac{\pi}{7}$ e $\cos\frac{3\pi}{7}$ são irracionais.

Agora vamos usar a técnica do exercício resolvido 3.1 para calcular senos e cossenos de ângulos não notáveis

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3.23:

Calcule $\cos 18^0,\cos 36^0,\cos 54^0,\cos 72^0,\mathrm{sen}\,18^0,\mathrm{sen}\,36^0,\mathrm{sen}\,54^0,\mathrm{sen}\,72^0$.

Parte 1: Calcular $\cos 72^0$.

Solução 1:

Note que $\cos(2.72^0)=\cos(3.72^0)$

Logo, $\cos 72^0$ é uma solução da equação $\cos 2x=\cos 3x$

Daí, temos que:

$$4\cos^3 x-3\cos x=2\cos^2 x-1\Rightarrow 4\cos^3 x-3\cos x-2\cos^2 x+1=0\ .$$

Faça $t=\cos x$. Daí temos que

$$4t^3-2t^2-3t+1=0\Rightarrow(t-1).(4t^2+2t-1)=0\Rightarrow t=1 \text{ ou } t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

Como $\cos 72^0>0$ e $\cos 72^0\neq 1$ temos que $\cos 72^0=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Solução 2

$$\cos 72^0=2\cos^2 36^2-1=2\cos^2 144^2-1=2.(2\cos^2 72^2-1)=8\cos^4 72^0-8\cos^2 72^0+1$$

Faça $y=\cos 72^0\Rightarrow 8y^4-8y^2-y+1=0\Rightarrow(y-1).(2y+1).(4y^2+2y-1)=0$.

Logo $y=1$ ou $y=\frac{-1}{2}$ ou $y=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ ou $y=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Como $\cos 72^0 \neq 1$ e $\cos 72^0 > 0$, temos que $\cos 72^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Parte 2: Calcular sen18º.

Solução:

Note que $sen18^0$ é raiz da equação $sen5x = 1$. Como $sen5x = 5senx - 20sen^3x + 16sen^5x$.

Fazendo $sen18^0 = t$, temos que:

$$5t - 20t^3 + 16t^5 \Rightarrow (t-1).(16t^4 + 16t^3 - 4t^2 - 4t + 1) = 0 \Rightarrow \text{t = 1 ou}$$

$$16t^4 + 16t^3 - 4t^2 - 4t + 1 \Rightarrow (4t^2 + 2t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Como $sen18^0 > 0$ e $sen18^0 \neq 1$, temos que $sen18^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Solução 2:

Pela parte 1, temos que: $\cos 72^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow sen18^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Parte 3: Calcular $sen72^0$.

Solução:

Como $sen^2 72^0 + \cos^2 72^0 = 1 \Rightarrow sen72^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Parte 4: Calcular cos 18º.

Solução 1:

$$sen72^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \Rightarrow \cos 18^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Solução 2:

Como $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$ e como $\cos 90^0 = 0$, temos que $\cos 18^0$ é raiz da equação $16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x = 0$. Faça $t = \cos 18^0$.

Daí, temos que $16t^5 - 20t^3 + 5t = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}}$.

Como $\cos 18^0 > \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 18^0 = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Parte 5: Calcular sen 36º.

Solução 1:

$$sen36^0 = 2.sen18^0.\cos 18^0 = 2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Solução 2:

$$sen5x = 16sen^5x - 20sen^3x + 5senx\,.$$

Fazendo $t = sen36^0$, temos que $16t^5 - 20t^3 + 5t = 0 \Rightarrow t.(16t^4 - 20t^2 + 5) = 0 \quad \Rightarrow t = 0$ ou $16t^4 - 20t^2 + 5 = 0$.

Fazendo $y = t^2$, temos que $16t^4 - 20t^2 + 5 = 0 \Rightarrow 16y^2 - 20y + 5 = 0 \Rightarrow$ $y = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$

ou $y = -\frac{5-\sqrt{5}}{8} \Rightarrow t = 0$ ou $t = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ ou $t = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $t = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $t = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Como $\text{sen}36^0 > 0$, temos que $\text{sen}36^0 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ ou $\text{sen}36^0 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Note que $\frac{5+\sqrt{5}}{8} > \frac{1}{2}$, logo $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen}36^0 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Parte 6: Calcular cos 36º.

Solução:

Como $sen^2 36^0 + \cos^2 36^0 = 1 \Rightarrow \cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Parte 7: Calcular sen 54º.

Solução:

$\text{sen}54^0 = \cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Parte 8: Calcular cos 54º.

Solução:

$\cos 54^0 = \cos 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

CONCLUSÃO

O presente estudo desenvolvido procurou mostrar a importância da Resolução de Problemas no ensino de Matemática, discutindo as diversas etapas do método de Resolução de Problemas e sua importância no papel da aprendizagem significativa do aluno. Ao fazer um problema, o mesmo deve ser discutido em sala de aula de forma exaustiva, de forma a dar ao aluno ferramentas para que ele resolva outros problemas semelhantes; caso contrário, o aprendizado não será significativo para o aluno.

Outro ponto abordado foi a ligação entre os polinômios e trigonometria, mostrando problemas que envolvem os dois assuntos. O trabalho foi desenvolvido com base na solução de um problema da olimpíada de Matemática da Bélgica onde se faz uma interligação entre polinômios e trigonometria, partindo-se de uma equação trigonométrica e chegando a um polinômio. A partir deste problema, procurou-se usar a mesma ideia em outros problemas. Isso foi importante para mostrar que mais importante do que fazer um problema é saber tirar lições dele, de modo a fazer outros problemas, usando a mesma ideia.

É de fundamental importância que nossos livros didáticos apresentem estratégias de resolução de problemas que são recursos importantes no ensino–aprendizagem de Matemática. Atualmente dos livros de Matemática do Ensino Médio que conheço, nenhum traz as etapas da resolução de problemas; e a grande maioria de nossos professores não discute isso em sala de aula.

Pode-se sugerir que as escolas passem a ter uma matéria voltada só para resolução de problemas de Matemática, Física e Química, fazendo uma interação entre as três matérias e mostrando metodologias de resolução de problemas nestas 3 matérias. Muitos problemas nas áreas de Física e Química podem ser resolvidos, usando as técnicas de resolução de problemas da Matemática.

Pode-se também, a partir deste trabalho, fazer outros trabalhos, estabelecendo fazendo uma interligação entre outros assuntos de Matemática do Ensino Médio como, por exemplo, polinômios e números complexos, conjuntos e funções, etc, e permitindo-se fazer isso também em programas como o PAPMEM e o PROFMAT.

REFERÊNCIAS

ANDREESCU, Titu; FENG, Zuming. **103 Trigonometry Problems from the Training of the USA IMO Team**. Boston: Birkhauser, 2004.

ANDREESCU, Titu; GELCA, Razvan. **Putnam and Beyond**. New York: Springer-Verlag, 2006.

ANTAR, Aref; SAMPAIO, Jose Luís *et al*. **Trigonometria: Noções de Matemática.** São Paulo: Editora Moderna, 1979.

BRASIL. Ministério da Educação. **PCNEM – Parâmetros curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 1997.

B______. Ministério da Educação. PCNEM – **Parâmetros curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2000.

B______. Secretária de Educação Fundamental. **PCN – Parâmetros curriculares Nacionais.** Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

DOMINGUES, Hygino. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Atual Editora, 1991.

DOOB, Michael., **The Canadian Mathematical Olympiad 1969 – 1993.** Ottawa ON: University of Toronto Press, 1993.

DURELL, C. V; ROBSON, A. **Advanced Trigonometry**. Londres: Gbell and Sons, 1979.

LIDSKI, V. B. y otros. **Problemas de matemáticas Elementales**. Moscou: Editora Mir Moscow, 1987.

LITIVINENKO, V; MORDIKOVICH, A. **Solving Problems in Algebra an Trigonometry.** Moscou: Editora Mir Moscow, 1987.

LOZANSKY, Edward; ROUSSEAU, Cecil. **Winning Solutions**: New York: Springer-Verlag, 1996.

OBM. **Olimpíada Brasileira de Matemática**. Disponível em:< <www.obm.org.br> Acesso em: 20 Jun. 2013.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um enfoque do método matemático.** Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

REVISTA EUREKA, Edição n^{0}16, Rio de Janeiro, SBM, 2003.

SHKLARSKY, D. O; CHENTZOV N.N *et al*. **The USSR Olympiad Problem Book: elected Problems and Theorems of Elementary Mathematics.**, New York: Dover Publications, 1993.