UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT/UNIVASF

Márcio Miranda de Carvalho

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS OLÍMPICOS: UMA ABORDAGEM ARITIMÉTICA MODULAR

Juazeiro

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT/UNIVASF

Márcio Miranda de Carvalho

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS OLÍMPICOS: UMA ABORDAGEM ARITIMÉTICA MODULAR

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal do Vale do São Francisco, como exigência parcial a obtenção do título de Mestre Profissional em Ensino de Matemática, sob orientação do professor Doutor Severino Cirino de Lima.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Juazeiro

2013

	Carvalho, Márcio Miranda de.
C331r	Resolução de problemas matemáticos olímpicos : uma abordagem aritmética / Márcio Miranda de Carvalho. ï ï Juazeiro, 2013.
	viii, 62 f. : il. ; 29 cm.
	Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado profissional em rede nacional em matemática - Profmat) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro-BA, 2013.
	Orientador: Dr. Severino Cirino de Lima Neto.
	1. Aritmética modular. 2. Teoria dos números. I. Título. II. Lima Neto, Severino Cirino. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.
CDD 513	

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT/UNIVASF

Análise de Problemas de Olimpiadas de Matemática: Via Aritmética Modular

Por

Márcio Miranda de Carvalho

Dissertação aprovada em 12 de agosto de 2013

Prof. Dr. Alan Christie da Silva Dantas
Examinaror Externo- UNIVASF

Prof. Dr. Wilson Hugo Cavalcante Freire
Examinador Externo- URCA

Aníbal Livramento da Silva Netto
Prof. Dr. Aníbal Livramento da Silva Netto
Examinaror Interno- UNIVASF

Severino Cirino de Lima Neto
Prof. Dr. Severino Cirino de Lima Neto
Orientador- UNIVASF

Juazeiro 2013

A Maria do Socorro, minha mãe, maior incentivadora dos meus estudos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, inicialmente, a Deus pela sua proteção divina e por fortalece-me com a coragem necessária para prosseguir com meus estudos profissionais; a minha família, especialmente, minha querida mãe, Maria do Socorro, por ser a maior incentivadora dos meus estudos; ao meu irmão, Marcilio Miranda; ao colega, Diêgo Veloso Uchôa pelas salutares e enriquecedoras discussões matemáticas; ao colega Cassio Anderson pela ajuda com o látex.

Aos professores de matemática da UFPI, Joao Xavier da Cruz Neto, João Benicio de Melo Neto e Jurandir Oliveira Lopes pelos conselhos e grandes conhecimentos prestados; Ao professor Dr. Severino Cirino de Lima Neto pela atenção, orientação e motivação.

As instituições de fomento à pesquisa pela oportunidade da formação profissional continuada e, por fim, pela generosa contribuição da banca examinadora composta dos professores, Wison Hugo Cavalcante Freire, Alan Christie da Silva Dantas e Aníbal Livramento da Silva Netto.

ñA resolução de problemas é a perspectiva metodológica [...] e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualqu situação ou fato que possa ser questionado (BRASIL, 2002, p. 129).

RESUMO

A importância da aritmética modular na teoria dos números e na álgebra pode ser vista em problemas do cotidiano, tais como sistemas de identificação, quer seja de livros, artigos, animais, criptografia e transações comerciais. O objetivo desse trabalho é compreender a abordagem da aritmética modular na relação de congruência no conjunto dos inteiros para a resolução de problemas olímpicos. Contudo, apresentamos diversas soluções de problemas presentes em provas de olimpíadas de matemática de diversos países, cuja solução tem por base a aritmética modular e que envolvem os conceito de quadrado perfeito, números primos, o conceito de paridade e divisibilidade. A coleta desses problemas foi feita através em site e livros destinados a olimpíadas de matemática.

Palavras-chave: Teoria dos Números, Aritmética Modular, Olimpíadas.

ABSTRACT

The importance of modular arithmetic in number theory and algebra can be seen in everyday problems, such as identification systems, whether of books, articles, animals, Cryptography and commercial transactions. The aim of this study is to understand the approach of modular arithmetic congruence relation on the set of integers to solve problems Olympians. However, we present several solutions present problems in tests of mathematical Olympiads in various countries, whose solution is based on modular arithmetic and involving the concept of perfect square, prime numbers, the concept of parity and divisibility. Collecting these problems was made by site and in books for math olympics.

Keywords: Theory of Numbers, Modular Arithmetic, Olympics.

LISTA DE ABREVIATURA E SIGLAS

Cadastro de Pessoa Física (CPF)

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)

International Standard Book Number (ISBN)

Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)

Olimpíada Internacional de Matemática (IMO)

Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)

Preparação Especial para Competições Internacionais (PECI)

Programa de Iniciação Científica de Mestrado (PICME)

Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)

Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)

SUMÁRIO

1 Introdução

Os torneios olímpicos de matemática favorecem à aprendizagem das habilidades de pensamento lógico-matemático na resolução de problemas que vão além de seu caráter instrumental da disciplina escolar, mas também criam inter-relações com outras áreas do saber. Dessa forma, ña resolução de problemas é peça central para o ensino da Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafiosò (BRASIL, 2002, p. 112).

Nesse sentido, olimpíadas de matemáticas são espaços de aprendizagem que socializam a cultura do saber matemático ampliando e aprofundando os conhecimentos da disciplina matemática, ou seja, a prática de ñresolução de problemas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da soluçãoò (BRASIL, 2002, 113).

Segundo Maciel (2009), as Olimpíadas Matemáticas originaram na Itália, no período do Renascimento, através das ñdisputasò feitas por matemáticos. No final do século XIX, essas ñcompetiçõesò tinham uma estrutura semelhante à utilizada na atualidade, tendo como principal objetivo divulgar os conhecimentos Matemáticos. Em meados do século XX, houve um grande processo de expansão passando a assumir um caráter mundial, principalmente, entre os países da Europa Oriental, refletindo o acirramento das relações políticas entre os Estados Unidos e a União Soviética. Atualmente, tornou-se uma poderosa ferramenta de divulgação da Matemática promovendo a integração entre milhares de professores e estudantes.

Em 2008, noventa e sete países participaram da 49ª edição da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). No Brasil, nesse mesmo ano, a organização da 4ª edição da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), contou com a participação de mais de dezoito milhões de alunos da Educação Básica, consolidando um trabalho que tem, como um dos principais objetivos, contribuir com a qualificação do Ensino de Matemática no país.

Atualmente, o Brasil realiza dois tipos de competição nos moldes de olimpíadas: a OBMEP destinada a alunos das escolas públicas que estejam cursando entre o 6º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio.

Segundo Zeitz (2007), a OBMEP oferece aos estudantes da Educação Básica, vencedores nas diversas categorias além de medalhas à oportunidade de participarem do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), período de um ano, com bolsa fomentada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), outra possibilidade dos vencedores ampliam sua preparação para os torneios nacionais e internacionais é participarem do Programa de Iniciação Científica de Mestrado (PICME), para medalhistas que estejam cursando graduação com bolsas do CNPq e CAPES, em nível de Mestrado. Por fim, os competidores podem participar também pelo programa de Preparação Especial para Competições Internacional, cujo objetivo é treinar estudantes para competições internacionais nos Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI). Nesse último caso somente para estudantes já premiados com medalhas em outros torneios.

A Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) é uma competição organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) que tem como objetivo melhorar a qualidade do ensino de Matemática no país e descobrir novos talentos em Matemática.

Segundo Maciel e Basso (2009, p. 10), a OBMEP tem a finalidade não só de aumentar os espaços de sociabilidade do saber matemático consolidado, mas ñ[...] agregar à qualificação do Ensino de Matemática no país seja a possibilidade de oferecer uma formação na qual o aluno, ao concluir sua escolarização básica, esteja alfabetizado quantitativamenteò(MACIEL; BASSO, 2009, p. 10).

Entre os conteúdos abordados nas olimpíadas de matemática, estão varias técnicas de resolução de problemas como técnica da coloração, congruências, método de redução ao absurdo, dentre outros. Para esse trabalho foi analisada congruências nas questões das provas da OBMEP. Nesse sentido, o objetivo desse trabalho é compreender a abordagem da aritmética modular na relação de congruência no conjunto dos inteiros para a resolução de problemas olímpicos.

Para seleção dos problemas olímpicos, consideramos apenas problemas que poderiam ser desenvolvidos para estudantes da Educação Básica. Como consequência desta escolha abordamos a definição de congruência módulo a e suas propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva. Estas três propriedades garante que a congruência módulo é uma relação de equivalência; que juntamente com as propriedades de a adição, subtração e a multiplicação de classes podem ser estudados no ensino básico. O que já permite que o estudante da Educação Básica tenha condição para entender a demonstração dos critérios de divisibilidade, compreender a regra para montar um numeral do Cadastro de Pessoa Física (CPF) e o numeral do *International Standard Book Number* (ISBN) de um livro.

A seleção dos problemas que foram organizados nessa dissertação de mestrado profissional é apenas uma decisão de caráter pedagógico, tendo em vista que a proposta é de articular aritmética modular nas competências almejadas para os desafios da resolução de problemas olímpicos.

> Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM privilegia o tratamento de situações-problema, preferencialmente tomadas em contexto real. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado. A seleção das atividades a serem propostas deve garantir espaço para a diversidade de opiniões, de ritmos de aprendizagem e outras diferenças pessoais. O aspecto desafiador das atividades deve estar presente todo o tempo, permitindo o engajamento e a continuidade desses alunos no processo de aprender. Nesse sentido, a postura do professor de problematizar e permitir que os alunos pensem por si mesmos, errando e persistindo, é determinante para o desenvolvimento das competências juntamente com a aprendizagem dos conteúdos específicos. (BRASIL, 2002, p. 129).

No que diz respeito ao professor da Educação Básica é importante que este domine o conteúdo de ideais em e anéis . Para que possa ser capaz de elaborar atividades didáticas que motivem os estudantes a aprender o conceito de congruência, e consequentemente realizar a aplicação, dos mesmos, na resolução de problemas.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

Na introdução, faz-se um breve histórico sobre as olimpíadas de matemática ao longo da história, especialmente, das experiências olímpicas nos torneios brasileiros. Além disso, discorre sobre a aritmética modular, especificamente de congruência, e alguns exercícios contidos nas provas da OBMEP ao longo de suas edições, que foram resolvidos e comentados; Na fundamentação teórica, apresentam-se os principais teoremas para resolução dos problemas; na seleção dos problemas olímpicos, encontra-se a resolução desses problemas. Por fim, nas considerações finais fazemos uma análise da aplicação da aritmética modular na solução dessas situações-problemas.

2 Fundamentação Teórica

Uma aplicação importante das congruências é a utilização dessas com os números primos de uma maneira diferente, apresentando o teorema de Fermat; além disso, a noção de congruência pode ser ensinadas aos alunos, dando ideia de ciclos ao se calcular intuitivamente restos nas divisões por um número fixo envolvendo curiosidades como saber que dia da semana será daqui a 365 dias, ou seja, que dia da semana será a data de hoje, só que, no próximo ano, e daqui a dois ou 3 anos. Para coisas mais complexas, como calcular o resto da divisão de uma grande potência por um número fixo, ou ainda como calcular o digito verificador de um código de barras , CPF , CNPJ , ISBN , ISSN.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais também fazem referência a aplicação do conhecimento matemático:

> ‶Duas forças indissociáveis estão sempre a impulsionar o trabalho em Matemática. De um lado, o permanente apelo das aplicações às mais variadas atividades humanas, das simples na vida cotidiana, às mais complexas elaborações de outras ciências. De outro lado, a especulação pura, a busca de respostas a questões geradas no próprio edifício da matemática. A indissociabilidade desses dois aspectos fica evidenciada pelos inúmeros exemplos de belas construções abstratas originadas em problemas aplicados e, por outro lado, de surpreendentes aplicações encontradas para as mais puras especulações, (BRASIL, 2006, p.25)

No caso dos códigos de barra, um dos mais usados no mundo é o EAN-13, composto por 13 algarismos sendo que o último é o dígito de controle. Nesse caso é usada a congruência módulo 10 e os fatores que compõe a base de multiplicação são os dígitos 1 e 3 , que vão se repetindo da esquerda para a direita .

Se é a sequência formada pelos 12 primeiros dígitos, devemos multiplicá-los, nessa ordem, pela base e somar os produtos obtidos. Se chamarmos de S a soma obtida, o digito que está faltando, que vamos representar por x deve ser tal que ao ser somado com S, deve gerar um múltiplo de 10, isto é, o número deve ser múltiplo de 10 ou seja congruente a 0 módulo 10, vejamos um exemplo numa embalagem na qual encontramos o seguinte código de barras

Então, ficamos assim:

=

logo

Um dos exemplos mais antigos é o sistema International Standard Book Number (ISBN) de catalogação de livros, CD-ROMs e publicações em braile, que foi criado em 1969. A necessidade que as editoras têm de catalogar os seus livros e informatizar o sistema de encomendas serviu de motivação na geração desse código.

A vantagem é que, por ser um código numérico, ultrapassa as dificuldades geradas pelos diversos idiomas do mundo, bem como a grande diversidade de alfabetos existentes. Dessa forma, poderíamos, por exemplo, identificar através do ISBN um livro japonês.

Em tal sistema, as publicações são identificadas através de 10 algarismos, sendo que o último (dígito de controle) é calculado através da aritmética modular envolvendo operações matemáticas com os outros nove dígitos. Esses nove primeiros dígitos são sempre subdivididos em 3 partes, de tamanho variável, separadas por hífen, que transmitem informações sobre o país, editora e sobre o livro em questão.

Por exemplo, a língua inglesa é identificada somente pelo algarismo 0 e a editora McGraw-Hill tem um código de 2 algarismos que a identifica, dessa forma, restam ainda 6 algarismos para a identificação de suas publicações, havendo pois a possibilidade de = de títulos.

Vejamos como se processa o cálculo do dígito final do ISBN (controle).

Representando por a sequência formada pelos 9 primeiros dígitos, devemos multiplica-los, nessa ordem, pela base e somar os produtos obtidos. O dígito que está faltando, que vamos representar por Y deve ser o menor valor possível, tal que ao ser acrescentado à soma obtida, deve gerar um múltiplo de 11, isto é, se a soma obtida é S, o número deve ser múltiplo de 11, ou seja, Vejamos um exemplo:

Na contra capa do livro Problemas selecionados de matemática: IME/ITA ï olimpíadas do autor Marcilio Miranda de Carvalho encontramos o código ISBN 856065309.

Aplicando o método para cálculo devemos multiplicar o código pelos números e soma-los, assim obtemos:

=e como pois, então temos o digito verificador igual a 0.

Quanto ao CPF, o procedimento calcula os dois últimos dígitos e sendo o CPF composto por 9 números mais 2 dígitos verificadores da seguinte forma, coloca-se o CPF em ordem e multiplica cada número pelos números .Por exemplo se tivermos o CPF para calcularmos o X faremos o seguinte procedimento:

assim temos .

Para o cálculo de Y, faremos o produto de forma análoga para agora os 10 primeiros dígitos do CPF ou seja incluindo o X e multiplicando os pelos números ou seja procedemos da seguinte forma:

=

ou seja assim temos que se a pessoa possuir o CPF então ela terá dígitos verificadores

A aritmética modular é um assunto muito importante na resolução de problemas de álgebra e da teoria dos números. É notavel a sua aplicação no nosso cotidiano. Como exemplos tem-se a utilização na identificação de um artigo, livro e código de barras.

A seguir serão apresentadas definições, teorema e proposições necessárias sobre o conteúdo de congruências que servirão de base na resolução do problemas coletados em olímpiadas de matemática.

Os teoremas, proposições apresentados neste capitulo baseiam-se nos trabalhos s [9], [10], [11] e [12].

Definição 1 : Sejam *a* e *b* dois inteiros quaisquer e seja m um inteiro positivo fixo. Diz-se que *a* é congruente a *b* módulo *m* se e somente se *m* divide a diferença *a* - *b*

Ou seja, *a* é congruente a *b* módulo *m* se e somente se existe um inteiro *k* tal que .

Com a notação:

Indica-se que *a* é congruente a *b* módulo *m* , portanto simbolicamente :

divide

Exemplo:

, pois 5 divide

, pois 5 divide

Teorema 1: Dois inteiros *a* e *b* são congruentes módulo *m* se e somente se *a* e *b* deixam o mesmo resto quando divididos por *m* .

Demonstração:

() suponhamos que .então, por definição :

, com

Seja r o resto da divisão de *b* por *m* ;então , pelo algoritmo da divisão :

, onde

Portanto:

E isto significa que *r* é o resto da divisão de *a* por *m*, isto é, os inteiros *a* e *b* divididos por *m* deixam o mesmo resto *r* .

Reciprocamente, suponhamos que *a* e *b* divididos por *m* deixam o mesmo resto *r* . então, podemos escrever:

e , onde

E , portanto:

divide

Teorema 2 : Seja *m* um inteiro positivo fixo e sejam *a* , *b* e *c* inteiros quaisquer . Subsistem as seguintes propriedades :

(1)

(2) então

(3) Se e se então

Demonstração:

(1) Com efeito :

m divide 0 ou *m* divide

(2) Com efeito , se , então com .Portanto:

(3) Com efeito , se e se , então existem inteiros *h* e *k* tais que e .
Portanto:

E isto significa que .

Teorema 3 : Seja *m* um inteiro positivo fixo e sejam *a* e *b* dois inteiros quaisquer . Subsistem as seguintes propriedades:

(1) Se e se *n* divide *m*, com , então

(2) Se e se , então

(3) Se e se *a* , *b*, *m* são todos divisíveis pelo inteiro ,então

Demonstração:

(1) Com efeito:

e n divide *m*

Onde *k* e são inteiros.

Portanto:

(2) Com efeito:

(3) De fato:

Teorema 4: Seja *m* um inteiro fixo (m > 0) e sejam a,*b*,*c* ,*d* inteiros quaisquer. Subsistem as seguinte propriedades:

I)

II) Se,então e

III) Se,então para todo inteiro positivo *n*.

Prova:

I)

Se e se então existem tais que e. Portanto:

, portanto

Analogamente

, portanto

II)

Se e se então pela propriedade anterior temos que:

e

III)

Usando o ñteorema da indução Matemáticaò, a proposição é verdadeira para *n* = 1 e suposta verdadeira para um inteiro positivo *k* ,temos:

e

Portanto pela propriedade I temos que

ou

Isto é, a proposição é verdadeira para o inteiro positivo *k* + 1.Logo, a proposição é verdadeira para todo inteiro positivo *n*.

Exemplos:

(1) e implica:

ou

ou

(2) implica:

ou

(3) implica:

Teorema 5 : Se e se o, então

Prova:

Se , então :

,

E se o, existem inteiros *r* e *s* tais que, onde *r* e *s* são primos entre si. Portanto:

O que implica que, com

Logo pelo teorema 5.4 (Teorema de Euclides) e ou, por ser ,

Corolário 1 :

Se e se o , então

Corolário 2:

Se , com *p* primo, e se *p* não divide *c* , então

Teorema 6: (Principio da indução finita)

Seja um número inteiro e suponhamos que a cada inteiro *n*, , está associada uma afirmação , a qual possui, para cada *n*, um valor lógico V(quando verdadeira) ou F(quando falsa).Suponhamos que as condições 1 e 2 abaixo sejam verificadas:

1. A afirmação é verdadeira para ;

2. Para cada , se é verdadeira, então é também verdadeira.

Então a afirmação é verdadeira para cada

Teorema 7: Seja d = mdc (a,b) então e x e y números inteiros quaisquer, então vale que d| ax + by.

Teorema 8: Seja p um numero primo e m um inteiro qualquer. Se m | p então m = 1 ou m = p.

2 Resolução de Problemas de Olimpíadas

Os problemas apresentados neste capítulo foram selecionados em livro e sites cujo objetivo é divulgar problemas de olimpíadas de matemática. O critério de seleção usado, na escolha dos problemas foi a aplicação direta das propriedades de congruência e conceitos de teoria dos números apresentados no capitulo anterior. Na resolução os problemas apresentados foram explorados a criatividade, interpretação de teoremas e proposições apresentados na fundamentação teórica.

Questão 1 (França 2005)

Sejam *x, y* inteiros positivos tais que . Prove que é quadrado perfeito.

Solução

Lema: Se, são naturais tais que e e

, então *b* e *c* são quadrados perfeitos.

Prova: Se e □. Agora seja *p* um fator primo que divide *b* então *p* não divide *c* pois , então o fator *p* aparece um número par de vezes no segundo membro, e um número par de vezes em, logo *p* tem que aparecer um número par de vezes em *b*. Logo *b* é quadrado perfeito. Analogamente, *c* é quadrado perfeito.

Agora vamos ao nosso problema:

Agora seja.

Usando o teorema 7 temos que:

e

Logo, . Portanto, pelo lema, é quadrado perfeito

Disponível em: http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php.

Acesso em: jun.2013.

Questão 2 (Croácia 2005)

Prove que existe um múltiplo de que tem 2005 dígitos e é formado apenas por algarismos 2 e 5.

Solução

Seja, e assim por diante. Tal construção se faz da seguinte forma: Começa com 2 que é divisível por 2. E então seguisse a seguinte regra:

i) 2, se.

ii) 5 caso contrário.

Provemos por indução que

i) Para n = 1 é valido.

ii) Suponhamos válida a propriedade para

(Hipótese de indução)

iii) Vamos mostrar que vale para.

Se, então que é divisível por, pois são ambos divisíveis por.

Caso contrário, , em que **I** é um número ímpar. Assim, que é divisível por, pois é par.

Em qualquer caso, temos que. Assim.

Disponível em: http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php.

Acesso em: jun.2013.

Questão 3 (Espanha 1995)

Seja ***p*** um número primo. Encontre todos os pares tais que

Solução

Como, e *p* é primo, então, logo, onde *a, b* são inteiros. No primeiro caso temos:
□
Como, então,
logo pelo teorema 8 tempos que:
,
assim as soluções sãorespectivamente. E por simetria
O segundo caso é análogo.

Disponível em: http://platea.pntic.mec.es/csanchez/olimprab.htm
Acessado em: jun.2013.

Questão 4 (Espanha 1985)

Seja ***n*** inteiro positivo. Prove que é divisível por .

Solução

Faça por indução:
i) Para, temos que.
ii) Suponha válida a propriedade para, isto é, é divisível por (Hipótese de indução).
iii) Provemos que vale para.

Daí temos dois casos a analisar:

Primeiro caso: se *k* for par.
Neste caso, tem os mesmo fatores 2 de

(k + 1)·(k + 2)... 2k com o acréscimo de pelo menos um fator 2 de

Segundo Caso: se ***k*** for ímpar.
Neste caso, tem os mesmo fatores 2 de
(k + 1)·(k + 2)... 2k com o acréscimo de um fator 2, pois retiramos o e acrescentamos o número de

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 5 (Estados Unidos 1979)

Determine inteiros não negativos () tais que

Solução

n é par, , sendo ***q*** um número natural, daí, o que deixa resto zero na divisão por 16. E se n é ímpar, onde ***p*** é um número natural, daí
. Assim, se **p** é par, então pelo teorema 4 item I temos que é múltiplo de 16 p, já que 8*p* é múltiplo de 16; se ***n*** é ímpar, é par. Logo, pelo teorema 4 item I que é múltiplo de 16.
Em qualquer caso, temos que deixa resto zero ou 1 na divisão por 16. Logo, tem resto entre 0 e 14 na divisão por 16; 1599 tem resto 15 na divisão por 16. Portanto, a equação não tem solução.

Disponível em: http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php.
Acessado em: jun.2013.

Questão 6 (IMO 1975)

Sejam, **A** a soma dos dígitos de ***n*** e **B** a soma dos dígitos de **A**. Calcule a soma dos dígitos de **B**.

Solução

Note que .Logo **n** tem menos de 17776 dígitos. Como Assim, e a soma dos dígitos de B é no máximo 13.
Usando o teorema 4 item III temos que:

. E como temos que
.Desse modo, a soma dos dígitos de B é 7.

Disponível em: http://www.imomath.com/othercomp/I/Imo1975.pdf.
Acessado em: jun.2013.

Questão 7 (IMO 1970)

Encontre todos os **n** naturais com a seguinte propriedade: O conjunto pode ser dividido em dois subconjuntos A e B tais que e o produto dos elementos do conjunto A é igual ao produto dos elementos do conjunto B.

Solução

Sejam ***a*** o produto dos elementos de A e B o produto dos elementos de B. Se teremos exatamente um número (*a* ou *b*) com fator 7, portanto teremos o produto dos números (*a* ou *b*) sendo múltiplo de 7 e outro que não é múltiplo de 7, absurdo. Se então pelo teorema 4 item I temos que:Entretanto, se os dois conjuntos tivessem produtos iguais, teríamos
ou
, em nenhum caso temos Portanto, isso é impossível.

Disponível em: http://www.imomath.com/othercomp/I/Imo1970.pdf.
Acessado em: jun.2013.

Questão 8 (Estados Unidos 1976)

Encontre todos os inteiros *a*, *b* e *c* tais que.

Solução

Vamos analisar os casos:

Sejam uma solução, então:

Caso 1: Três números ímpares.

Neste caso pelo teorema 4 item I temos que:

absurdo.

Caso 2: Dois números ímpares e um número par.

Neste caso pelo teorema 4 item I temos que:

absurdo.

Caso 3: Dois números pares e um número ímpar.

Neste caso pelo teorema 4 item I temos que:

absurdo.

Caso 4: Três números pares.

Neste caso suponhamos, por absurdo, que seja uma solução onde *a* é mínimo, então, daí é fácil ver que) também é solução, onde, absurdo!, logo a única solução é .

Disponível em: http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php.
Acessado em: jun.2013.

Questão 9 (São Petersburgo 1998)

Em quantos zeros pode acabar o número para ***n*** natural?

Solução

A resposta é 2. Para n = 1, temos ; para, temos

e se = 3, temos .

Se, não podemos ter 3 ou mais zeros, uma vez que são múltiplos de 8.

Usando o teorema 4 itens I e III temos que:

se **n** é par e), se **n** é ímpar, portanto

não é múltiplo de 8, assim não pode ser múltiplo de 1000.

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 10 (Hungria-Israel)

Encontre todos os inteiros positivos *x*, *y* tais que

Solução

Pelo teorema 4 item III temos que:

se, e somente se ***x*** é par, logo.

Analogamente se e somente se **y** é par, assim.

Assim .

Daí os únicos inteiros cujo produto é 16 são

Como, temos que, daí respectivamente.

Resolvendo estes sistemas, temos, logo

MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 11 (Rússia 2002)

Um número de 4 algarismos é escrito em um quadro negro. As operações permitidas são: adicionar 1 a dois dígitos vizinhos (caso nenhum deles seja 9) ou subtrair 1 a dois dígitos vizinhos (caso nenhum deles seja 0). É possível obtermos 2002 a partir do número 1234 utilizando algumas operações?

Solução

Note que em cada uma das operações o resto na divisão por 11 fica invariante. Após cada operação, somamos ou subtraímos um número da forma

.Comoe
é impossível chegarmos ao número 2002.

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 12 (Argentina 1997)

Ache todos os números naturais **n** tais que seja um número primo.

Solução

Vamos usar congruência módulo 5:

Caso 1:

Neste caso, = . Logo, é primo se e somente se

Caso 2:

Neste caso,

□ é primo se e somente se. Portanto, a única possibilidade para este caso é, que de fato é solução, já que = 7.

Caso 3:

Neste caso

□ é primo se e somente se, portanto a única possibilidade para este caso seria, que não é solução, pois = 9.

Caso 4:

Neste caso

é primo se e somente se, portanto a única possibilidade para este caso é , que de fato é solução.

Caso 5:

Neste caso

é primo se e somente se.

Portanto, a única possibilidade para este caso é , que de fato é solução.

Disponível em: http://www.oma.org.ar/enunciados/
Acessado: em jun.2013.

Questão 13 (Argentina 2004)

Encontre todos os inteiros não-negativos ***a*** e ***b***, tais que.

Solução:

são múltiplos de 3. Daí,

Caso1:.

Substituindo na equação, temos

Consequentemente, são potências de 2.

Sejam; logo, .

Note que se, então. Assim,. Portanto

Dessa maneira, é a única solução.

Caso 2:

Substituindo na equação, temos. Assim,

são potências de 2.

Seja.

Note que se, então.

Dessa maneira, .

Portanto, . Logo, serão as soluções.

Soluções:

Disponível em: http://www.oma.org.ar/enunciados/
Acessado: em jun.2013.

Questão 14 (Torneio das cidades 1997)

Sejam a, b inteiros positivos tais que é divisível por *ab*. Prove que.

Solução

Comoé inteiro,é inteiro,é inteiro.

Portanto, é inteiro.

Seja, em que

Como é inteiro, então é inteiro.

Provemos que

Se então existe um primo ***p***, tal que. Sendo assim, , absurdo, já que o. Dessa forma, temos que. Analogamente, provamos que

Consequentemente, temos que

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 15 (Bielorússia 1998)

Existem números inteiros *x, y* tais que

Solução:

Suponhamos, por absurdo, que exista um par tal que .

Como , então, portanto, , sendo *a* inteiro.

Agora note que; o que será, seguido de

Assim,
, sendo *b* inteiro. Temos então que

Agora note logo. Em seguida, temos. Assim,
, onde *c* é inteiro.

Logo temos que

Agora note que, o que leva a. Assim, , sendo *d* inteiro.

Logo temos que, absurdo, pois

Essa equação não tem solução.

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 16 (Inglaterra 1995)

Prove que é divisível por, para quaisquer *m, n* naturais.

Solução:

Lema: O número de formas que podemos dispor pessoas em m grupo de *n* pessoas é

Prova: Primeiro colocamos as pessoas em uma fila com espaços, como mostra o exemplo abaixo:

,Cada uma das permutações dá origem a uma divisão das pessoas em *n* grupos de *m* pessoas, porém a ordem das pessoas dentro de um grupo é irrelevante e também a ordem dos grupos é irrelevante, logo devemos dividir esse número por:

onde aparece vezes, logo a resposta é:

Agora vamos ao nosso problema:

Pelo lema, é inteiro e também é inteiro.

Logo, é inteiro e é divisível por, para quaisquer *m, n* naturais.

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 17 (Torneio das cidades)

Existe alguma potência de 2, da qual seja possível rearranjar os dígitos e obter uma outra potência de 2?

Solução:

Lema: Não podemos ter duas potências de 2, A e B, com a mesma quantidade de algarismos, uma vez que A □ B (mod 9).

Prova:

Se então, *s* sendo um número natural.

Se A e B tem o mesmo número de dígitos, é impossível que eles tenham a mesma congruência módulo 9, o que prova o lema.

Agora suponhamos, por absurdo, que B é obtido a partir reordenação dos dígitos de A. Então sendo C a soma dos dígitos de A.

A e B possuem a mesma quantidade de dígitos e absurdo, pelo lema.

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 18 (Bélgica 1992)

Se ***n*** é inteiro positivo, encontre o maior inteiro positivo *k* tal que

Solução

Claramente, são a solução. Note que *k* não pode ser maior que 2, pois

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 19 (IMO 1959)

Mostre que para todo *n* natural, a fração é irredutível.

Solução

Lema: Sejam *a, b* números naturais, assim como os números naturais *q, r* tais que

, onde, então

Prova: Sejam

daí

Como

Como

Disponível em: http://www.imomath.com/othercomp/I/Imo1959.pdf.
Acessado em: jun.2013.

Questão 20 (Banco do cone sul)

Prove que todo inteiro é a soma de cinco cubos.

Solução

Lema: Todo múltiplo de 6 pode ser escrito como soma de 4 cubos.

Prova: Se *x* é múltiplo de 6, então

Exemplo: Como escrever o 18 como soma de 4 cubos?

Neste caso temos , daí Sabemos que um numero deixa resto na divisão por 6.

Note que:

Caso 1: Se *x* deixa resto zero na divisão por 6

Neste caso basta completar com zero

Exemplo: Como escrever 30 como soma de 5 cubos?

Pelo lema temos que,logo

Acrescentando o zero fica

Caso 2: Se x deixa resto 1 na divisão por 6

Neste caso basta completar com 1

Exemplo: Como escrever 37 como soma de 5 cubos?

Pelo lema temos que, logo

Acrescentando o 1 fica

Caso 3: Se *x* deixa resto 2 na divisão por 6

Neste caso basta completar com 2

Exemplo: Como escrever 32 como soma de 5 cubos?

Temos que, assim, logo pelo lema

Acrescentando o 2 fica

Caso 4: Se x deixa resto 3 na divisão por 6

Neste caso basta completar com 2

Exemplo: Como escrever 33 como soma de 5 cubos?

Temos que, assim r = k ï 4 = 1, logo pelo lema

Acrescentando o 3 fica

Caso 5: Se *x* deixa resto 4 na divisão por 6

Neste caso basta completar com □ 2

Exemplo: Como escrever 34 como soma de 5 cubos?

Temos que, assim, logo pelo lema

Acrescentando o □ 2 fica $34 = 8^3 + (□\ 7)^3 + (□7)^3 + (6)^3 + (□\ 2)^3$

Caso 6: Se *x* deixa resto 5 na divisão por 6

Neste caso basta completar com □ 1

Exemplo: Como escrever 35 como soma de 5 cubos?

Temos que, assim, logo pelo lema

Acrescentando o □1 fica

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 21 (Banco do cone sul)

Ache todos os inteiros m e n tais que:

Solução

Primeiro caso:

Se, então 2^m é múltiplo de 16 e Logo, não há solução se

Verificando os casos verificamos que as soluções são

Segundo caso:

Se, não há solução, pois 1 e são inteiros e não é. E se, então:

o que é impossível, pois o primeiro membro é ímpar e o segundo é par.

Soluções:

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 22 (Bélgica 1999)

Determine todos os ***n*** naturais de 6 dígitos sendo

, tais que, ou seja,

Solução

Pelo enunciado, temos que Assim,

Vamos aos casos:

Primeiro caso:

Se

, absurdo.

Segundo caso:

=

logo, absurdo.

Terceiro Caso:

=

é uma solução

Quarto Caso:

De maneira análoga ao terceiro caso, temos

Soluções:

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 23 (Polônia 1992)

Prove que para todo **k** natural, é divisível por

Solução

Pelo lema da questão 54, temos que é inteiro. Fazendo, então é inteiro. Fazendo, temos que é inteiro, logo *(k* parcelas), daí é inteiro. Note que logo é inteiro.

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 24 (Rússia 1999)

A soma dos algarismos de um inteiro positivo **n** escrito no sistema de numeração decimal é igual a 100 e a soma dos algarismos do número 44n é 800. Determine a soma dos algarismos do número 3n.

Solução

Sejam os algarismos de *n* e a soma de seus algarismos. Então,

Logo, se os algarismos de *44n* forem:

teríamos

Assim, se houvesse algum ñvai-umò, a soma dos algarismos de *44n* cairia. Deste modo, todos os algarismos de *n* são menores ou iguais a 2 donde os algarismos de *3n* são

. Assim,

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 25 (Putnam 1972)

Seja *n* um número natural, . Prove que *n* não divide.

Solução

Suponhamos, por absurdo, que exista um *n* natural tal que. Seja *p* um primo, tal que. Sendo, logo existem x, y números inteiros tais que. Novamente como, temos pelo teorema Fermat que como, temos que, assim

Daí temos que absurdo, logo não existe *n* tal que

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 26 (Ibero-Americana 1999)

Seja *n* um inteiro maior do que 10, tal que cada um dos seus dígitos pertence ao conjunto Prove que *n* tem algum divisor primo maior ou igual a 11.

Solução

Antes de fazer o problema, vamos provar uns lemas.

Lema 1: Seja, então o penúltimo algarismo da representação decimal *t* é par.

Prova do lema 1:

A partir daí haverá um ciclo de 4 em 4, pois

Agora vamos provar por indução o lema 1:

i) , é trivial.

ii) Suponhamos que seja válido para

, onde *x* é par.

iii) Vamos provar para.

Daí se, então, e o penúltimo algarismo é par, pois é par.

Se, então, e o penúltimo algarismo é par, pois é par.

Se, então, e o penúltimo algarismo é par, pois é par.

Se, então, e o penúltimo algarismo é par, pois é par.

Lema 2: Seja, então o penúltimo algarismo da representação decimal *w* é par.

Prova do lema 2:

A partir daí, haverá um ciclo de 4 em 4, pois

Agora vamos provar por indução o lema 2:

i) , é trivial.

ii) Suponhamos válido para.

, onde *d* é par.

iii) Vamos provar para.

Daí se, então, e o penúltimo algarismo é par, pois *7d* é par.

Se, então, e o penúltimo algarismo é par, pois é par.

Se, então, e o penúltimo algarismo é par, pois é par.

Se, então, e o penúltimo algarismo é par, pois é par. Isso prova o lema 2.

Lema 3: Seja *m* um número natural tal que, onde ***a*** *e* ***b*** são números naturais; então o penúltimo algarismo da sua representação decimal é par.

Prova do Lema 3:

Vamos analisar 3 casos:

Caso 1:

Neste caso temos

Vamos analisar congruência módulo 100.

A partir daí haverá um ciclo de 5 em 5, pois

Em qualquer caso, temos que o penúltimo algarismo de *m* é par.

Caso 2:

Neste caso, seja, então temos que

, onde *s* é par e e, onde

d *e* ***s*** são pares (pelo lema 1 e caso 1) daí temos que

Como *d* e *s* são pares, então o penúltimo algarismo de m é par.

Caso 3:

Prova análoga ao caso 2.

Agora vamos ao problema: suponhamos, por absurdo, que exista algum **n** um número inteiro maior do que 10, tal que cada um dos seus dígitos pertence ao conjunto

tal que *n* não possui nenhum divisor primo maior do que 11.

Então , onde são números naturais.

Note que, pois se, então n teria o ultimo dígito par e se então n teria o último dígito 0 ou 5. Logo e pelo lema 3, o penúltimo algarismo de *n* é par, absurdo. Logo *n* possui um fator primo maior ou igual a 11.

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 27 (Uruguai 2004)

O número formado por 300 algarismos 1 é quadrado perfeito?

Solução

Note que Logo N não é quadrado perfeito, pois N é divisível por 3, mas não divisível por 9.

Disponível em. < http://www.compartida.org/>.

Acessado em: jun.2013.

Questão 28 (Uruguai 1999)

Existem ***x*** *e* ***y*** inteiros tais que:

Solução

Note que e como

logo a equação acima não possui solução inteira.

Disponível em. < http://www.compartida.org/>.
Acessado em: jun.2013.

Questão 29 (Chile 1999)

Existem inteiros ***x*** *e* ***y*** tais que:

Solução

Vamos analisar os casos:

Caso 1: ***x*** *e* ***y*** são ímpares.

Neste caso, teremos é par e é ímpar. Logo, não há solução nesse caso.

Caso 2: ***x*** é par e *y* é ímpar (o caso *x* é ímpar e *y* é par é análogo).

Neste caso, temos que é ímpar e é par.

Caso 3: ***x*** *e* ***y*** são pares.

Neste caso, observe o seguinte: se houver um par como solução, então:

E se é solução, então também é solução.

Agora seja Se, então existe um par onde *c* é mínimo. Daí

Como *c e d* são pares, então. Logo,

absurdo!

Assim, , portanto não há solução positiva. Por conseguinte, também não há solução negativa, pois se é solução, é solução.

Disponível em: http://www.olimpiadadematematica.cl/.
Acessado em: jun.2013.

Questão 30 (Chile 2003)

Encontre todos os primos *p, q* tais que:

Solução

Analisemos congruência módulo 3:

Caso 1:

Neste caso, temos que absurdo!

Caso 2:

Neste caso, temos que absurdo!

Caso 3:

Neste caso, temos que absurdo!

Caso 4:

Neste caso, temos que absurdo!

Logo

Se, então . Daí temos que, o que não é solução.

E se, então

Por inspeção, temos que 5 é raiz. Daí temos que.

Logo, é a única solução.

Disponível em: http://www.olimpiadadematematica.cl/.
Acessado em: jun.2013.

Questão 31 (Chile 2001)

Seja **n** um número natural, prove que é múltiplo de 3.

Solução

para todo n natural. Logo é múltiplo de 3.

Disponível em: http://www.olimpiadadematematica.cl/.
Acessado em: jun.2013.

Questão 32 (Austrália 1983)

Mostre que a equação não possui solução inteira.

Solução

Logo, a equação não tem solução.

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 33 (Balcânica 1990)

Seja. Determine todos os *n*, tais que é divisível por 11.

Solução

Faça, daí teremos que ; logo ...,

Multiplicando esses termos, membro a membro, teremos um produto telescópico e daí logo

Daí temos que

Somando-se, membro a membro, teremos uma soma telescópica, logo

Temos então Daí, que

Analisando a congruência módulo 11, temos que, são as soluções.

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 34 (Inglaterra 1997)

Seja N um número de 4 algarismos, em que N não termina em zero. Defina como sendo o número N escrito ao contrário. Por exemplo seDetermine todos os N tais que

Solução

Como tem 4 algarismos, então temos que

logo os primeiros algarismos de N é 1 ou 2.

Caso 1: O primeiro algarismo é 2.

Neste caso) termina em 2, o que é impossível, pois que é ímpar.

Caso 2: O primeiro algarismo é 1.

Neste caso termina em 1, logo N tem que terminar em 2 ou 7. Como , logo não pode terminar em 2. Assim, N termina em 7.

Logo, logo o segundo algarismo é 7 ou 8 ou 9.

Por outro lado, temos

Daí se então

portanto a soma dos dígitos de N é 2 ou 11 ou 20 ou 29 ou 5 ou 14 ou 23 ou 32 ou 7 ou 16 ou 25 ou 34. Vamos ver as possibilidades:

Possibilidade 1:

Pelas somas acima, temos que. Fazendo as contas, vemos que não são solução.

Possibilidade 2:

Pelas somas acima, temos que. Fazendo as contas, vemos que não são solução.

Possibilidade 3:

Pelas somas acima, temos que. Fazendo as contas vemos que não são solução.

Logo não há nenhum número que satisfaça as condições do problema.

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 35 (Rússia 1998)

Um número de dez algarismos é interessante se seus dígitos forem todos distintos e se ele for múltiplo de 11111. Quantos números interessantes existem?

Solução

Seja I um número interessante. Da definição, vem:

Logo, para algum número natural N de 5 algarismos. Digamos , logo:

Sejam os dígitos de I, nesta ordem, então:

Como os únicos pares de dígitos cuja soma é 9 são e
o número de possibilidades para é:

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

Questão 36 (Bielorússia 2001)

Determine o resto da divisão de +

por 2004.

Solução

Logo a soma é

Como então o resto é 2001.

Fonte: MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática**: IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

4 Considerações Finais

A Aritmética modular foi empregada, com sucesso, no cálculo do dígito das unidades de grandes potências, na aplicação do cálculo dos dígitos verificadores de números de identificação como CPF, ISBN, entre outros , e também na resolução de diversos problemas de olimpíadas de matemática ao redor do mundo. A análise concentrou-se numa criteriosa seleção de problemas olímpicos os quais são muito didáticos e importantes para qualquer treinamento olímpico.

Para todos os problemas verificou-se que, os usos dos conceitos de aritmética modular são essenciais para a resolução dessas situações-problemas e, também, para o cálculo dos dígitos verificadores. Para a resolução de problemas é essencial além do conhecimento dos conceitos de aritmética modular é importantíssimo uma boa experiência em problemas olímpicos já para o cálculo dos dígitos verificadores com aritmética modular se torna um procedimento bem simples com compreensão aceitável para jovens do ensino. Em alguns problemas observamos que eram usados apenas as propriedades e teoremas mais elementares enquanto que em outros problemas eram usados técnicas de aritmética modular combinados com outros conteúdos como indução finita e função máximo inteiro.

A gama de modelos de problemas olímpicos analisados permitiu-nos compreender a diversidade dos problemas olímpicos que necessitam da aritmética modular para a sua resolução. Em particular o cálculo de dígitos das unidades de potencias de grande expoente foi reduzido para o calculo com pequenos expoentes o que facilitou muitos as contas.

Por fim, a resolução desses problemas olímpicos possibilita entendermos como a cuidadosa articulação entre aritmética modular e as olimpíadas matemáticas podem estimular a aprendizagem da matemática para que ela se constitua de fato um valioso campo de conhecimento e produção de riquezas para a humanidade.

5 Referências

ALENCAR FILHO, E. **Teoria elementar dos números.** São Paulo: Nobel,1981.

ANDREESCU, T.; FENG, Z. **101 Problems in Algebra from the Training of the USA IMO Team.** Camberra (Australia): AMT Publishing, 2001.

______; GELCA, R. **Mathematical Olympiad Challenges**. Boston: Birkhauser, 2000.

______; ANDRICA, D. **An Introduction to Diophantine Equations.** Zalau (Romênia): GIL Publishing House, 2002.

______; ENESCU, B. **Mathematical Olympiad Treasures**. Boston: Birkhauser, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB), Departamento de Políticas de Ensino Médio. **Orientações Curriculares do Ensino Médio**: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006.

______. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica(Semtec). **PCN + Ensino médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais ï Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

COUTINHO, S. C. **Números inteiros e criptografia RSA**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

DOMINGUES, H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Atual, 1991.

DOMINGUES, H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. São Paulo: Atual, 1982.

ENGEL, A. **Problems**: Solving Strategies, Problems Books in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1998.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

MACIEL, M. V. M.; BASSO, M. V. A. **Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas (OBMEP)**: as origens de um projeto de qualificação do ensino de matemática na educação. Disponível em: <www.projeto.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/.../CC/CC_19.pdf>. Acessado em: jul. 2013.

MIRANDA, M. **Problemas Selecionados de Matemática** : IME, ITA e Olimpíadas. Fortaleza: Vestseller, 2010.

OLIVEIRA, S. J. P. **Teoria dos Números.** Rio de Janeiro: IMPA,1998.

ZEITZ, P. **The Art and Craft of Problems Solving**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.

Sites acessados:

Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: <http://www.obm.org.br>. Acesso em: jun.2013.

Olimpíada Espanhola de Matemática. Disponível em: <http://platea.pntic.mec.es/csanchez/olimprab.htm>. Acesso em: jun.2013.

Olimpíada Portuguesa de Matemática. Disponível em: <http://www.imomath.com >. Acesso em: jun.2013.

Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Publicas. Disponível em:<http://www.obmep.org.br/estudos.html>. Acesso em: jun.2013.

Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Publicas. Disponível em:<http://www.obmep.org.br/apresentacao.html>. Acesso em: jun.2013.

Olimpíadas de matemática do Chile. Disponível em: <http://www.olimpiadadematematica.cl/>. Acesso em: jun.2013.

Olimpíadas de matemática do Uruguai. Disponível em: <http://www.compartida.org/>. Acesso em: jun.2013.

Portal art of problems solving. Disponível em: <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php>. Acesso em: jun.2013.