UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

EDSON BINGA DA ROCHA

ABORDAGEM DA FUNÇÃO QUADRÁTICA POR MEIO DA SUA FORMA CANÔNICA: um estudo de caso numa escola pública de Juazeiro - BA.

JUAZEIRO – BA

2018

EDSON BINGA DA ROCHA

ABORDAGEM DA FUNÇÃO QUADRÁTICA POR MEIO DA SUA FORMA CANÔNICA: um estudo de caso numa escola pública de Juazeiro - BA.

Trabalho apresentado à Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF, Campus Juazeiro, como requisito da obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Lino Marcos da Silva

JUAZEIRO – BA

2018

Rocha, Edson B. da

R672e Abordagem da função quadrática por meio da sua forma canônica: um estudo de caso numa escola pública de Juazeiro - BA / Edson Binga da Rocha. -- Juazeiro, 2018.

83 f.: il. 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, Juazeiro - BA, 2018.

Orientador (a): Prof. Dr. Lino Marcos da Silva

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Aprendizagem da matemática - Metodologia. I. Título. II. Silva, Lino Marcos da. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF

Bibliotecário: Márcio Pataro

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

Edson Binga da Rocha

ABORDAGEM DA FUNÇÃO QUADRÁTICA POR MEIO DA SUA FORMA CANÔNICA: um estudo de caso numa escola pública de Juazeiro-BA

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Aprovada em: 23 de novembro de 2018.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Lino Marcos da Silva, PROFMAT/UNIVASF

Prof. Dr. Paulo José Pereira, PROFMAT/UNIVASF

Prof. Dr. Aroldo Ferreira Leão, CENEL/UNIVASF

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado saúde, força e confiança para superar as dificuldades, acreditar no meu sonho e concluir esta etapa da minha vida.

A UNIVASF, seu corpo docente e administrativo que oportunizaram a janela que hoje vislumbra um ambiente propício à evolução e crescimento.

A todos os professores do curso por me proporcionar e compartilhar todo o seu conhecimento.

Ao meu orientador professor Lino Marcos da Silva que com muita paciência, dedicação, orientação incansável, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos que ajudaram esse sonho tão especial.

A minha família, em especial, minha esposa Jane e minhas filhas Jéssica e Ana Caroline eu quero gritar bem alto meu agradecimento por nunca duvidaram da minha capacidade e tornarem possível à realização do meu grande objetivo.

Aos amigos, colegas do PROFMAT – Turma 2015, por terem feito parte dessa vitória, em especial, Romênia Karoline e Sumaia Ramos, companheiras nos estudos e trabalhos e irmãs na amizade.

Enfim, a todas as pessoas que de alguma forma direta ou indiretamente fizeram parte dessa conquista, aos quais sem nominar terão o meu eterno agradecimento. Obrigado!

A CAPES pelo apoio financeiro. “O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.”

Dedico esta nova conquista aos meus pais, João e Nair, “*in memorian*”, com todo meu amor e gratidão por tudo que fizeram ao longo da minha vida.

RESUMO

Tendo em vista as dificuldades apresentadas pelos alunos do primeiro ano do ensino médio quando do estudo da função quadrática, resolvemos investigar as contribuições de uma abordagem do estudo dessa função por meio da sua forma canônica no processo de ensino e aprendizagem da matemática. A viabilidade da proposta foi analisada através de uma pesquisa de campo, realizada numa escola pública da cidade de Juazeiro – BA, utilizando-se as abordagens qualitativa e quantitativa. Além disso, foi realizada, sob a perspectiva de apresentação e desenvolvimento do conteúdo função quadrática, uma análise de livros didáticos de matemática adotados nas escolas públicas de ensino médio. Os resultados da pesquisa de campo indicam que a abordagem didática proposta foi bem aceita pelos alunos e sugerem que o estudo da função quadrática por meio da sua forma canônica pode contribuir significativamente para uma melhoria no nível de compreensão desse conteúdo. Por sua vez, a análise dos livros didáticos aponta que a forma canônica dessa função é pouco explorada pelos autores. Acreditamos que esse trabalho tem potencial para contribuir para a melhoria do ensino da matemática por possibilitar ao professor da disciplina reflexões sobre sua prática docente, particularmente no que diz respeito a escolha dos conteúdos e recursos didáticos para as suas aulas.

Palavras-chave: Ensino de matemática. Função quadrática. Forma canônica. Livro didático.

ABSTRACT

Considering the difficulties presented by the students of the first year of high school when studying the quadratic function, we decided to investigate the contributions of an approach to the study of this function through its canonical form in the teaching and learning process of mathematics. The feasibility of the proposal was analyzed through a field research, carried out in a public school in Juazeiro city – Bahia, using the qualitative and quantitative approaches. In addition, from the perspective of presentation and development of quadratic function content, an analysis of mathematics textbooks adopted in public high schools was carried out. The results of the field research indicate that the proposed didactic approach was well accepted by the students and suggest that the study of the quadratic function through its canonical form can contribute significantly to an improvement in the level of comprehension of this content. In turn, the analysis of textbooks shows that the canonical form of this function is little explored by the authors. We believe that this work has the potential to contribute to the improvement of mathematics teaching by enabling the teacher of the discipline to reflect on their teaching practice, particularly regarding the choice of contents an didactic resources for their classes.

Keywords: Mathematics teaching. Quadratic function. Canonical form. Textbook.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino de matemática de forma descontextualizada, baseado em algoritmos e técnicas operatórias desvinculadas do cotidiano tem se mostrado ineficaz na educação básica. Como consequência direta, o desempenho dos alunos em testes envolvendo resolução de problemas matemáticos tem sido objeto de análise por diversos pesquisadores. Por exemplo, Bossa (2000), afirma que, após a aplicação de uma série de instrumentos que avaliavam as condições de leitura, escrita, interpretação de textos e operações matemáticas básicas, constatou-se que mais de 70% dos alunos concluem o ensino fundamental sem ter adquirido as condições mínimas desejadas para esta etapa da educação básica. Nessa mesma linha, porém no âmbito internacional, Moreno (2016) enfatiza os resultados na área de matemática no Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa), onde o Brasil teve a pontuação mais baixa nas últimas edições do programa. Afirma ainda que, “Os resultados do Brasil no Pisa são gravíssimos porque apontam uma estagnação em um patamar muito baixo”. De fato, um índice de 70% dos alunos abaixo do nível 2 (numa escala de 1 a 6, nível mínimo esperado) em matemática é preocupante. Testes como o PISA revelam, na sua maioria, que os alunos não apresentam habilidades em formular, empregar, interpretar e avaliar problemas, o que demonstra a existência de entraves no processo de ensino aprendizagem. A maioria dos alunos apresenta baixo nível de conhecimento em relação ao estudo de matemática.

Como uma das finalidades do ensino médio é o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, essas deficiências têm contribuído para o baixo rendimento dos alunos no estudo da função quadrática. Partindo dessas premissas, surgiu o seguinte questionamento: o que fazer para diminuir ou eliminar as dificuldades apresentadas pelos alunos no estudo da função quadrática?

Por se tratar de um conteúdo de uso recorrente no cotidiano escolar e em diversos problemas da matemática e de outras disciplinas, torna-se relevante pensar numa nova abordagem para o estudo deste tema, de modo a contribuir para uma aprendizagem significativa dos conceitos relacionados a função quadrática.

A partir dessas considerações, visa-se responder a seguinte pergunta: Qual a viabilidade do uso da forma canônica como alternativa metodológica para o ensino da função quadrática?

Logo, a escolha desse tema teve como objetivo dar uma contribuição para fomentar uma maior discussão sobre ferramentas básicas necessárias ao desenvolvimento das habilidades para resolver problemas modelados pela função quadrática, como também analisar informações expressas pelo gráfico dessa função, apresentando mais uma alternativa de ensino para tornar o aprendizado desse conteúdo mais agradável e significativo. Portanto, pensando em estratégias que possibilitem aos alunos atribuir sentido e significado às ideias Matemáticas, tornando-os capazes de estabelecer relações e analisar conceitos em detrimentos da memorização, é que propomos uma investigação da viabilidade do estudo da função quadrática por meio da sua forma canônica usando o processo de completar quadrados.

Nesse sentido, desenvolvemos uma pesquisa com o objetivo de investigar as contribuições do uso da forma canônica como forma de abordagem da função quadrática, averiguar a viabilidade dessa proposta, verificar o desenvolvimento das habilidades (completar quadrados, reconhecer função quadrática e sua representação algébrica e gráfica, identificando os seus coeficientes) utilizadas no processo de abordagem do objeto em estudo via forma canônica, como também, analisar a presença dessa abordagem nos livros didáticos do ensino médio.

Para o desenvolvimento deste trabalho foram utilizadas pesquisas bibliográficas e de campo. A pesquisa bibliográfica baseou-se em publicações científicas e livros de matemática do 1º ano do ensino médio disponibilizados às escolas públicas pelo Programa Nacional do Livro Didático. O estudo foi desenvolvido, em sua totalidade, através da pesquisa de campo, envolvendo 20 alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola pública da cidade de Juazeiro – BA. Neste trabalho, buscamos aplicar uma pesquisa qualitativa e quantitativa ressaltando os aspectos referentes a percepção dos alunos em relação aos entraves encontrado por eles acerca da função polinomial do 2º grau, seu ensino e aprendizagem. Também fez-se uso da pesquisa quantitativa, a partir de questionários e testes de conhecimentos para análise e mensuração dos dados que darão suporte a nossa análise. Para tal, aplicou-se questionários aos alunos e aos professores de matemática da escola e aplicou-se três testes.

Essa dissertação está estruturada em quatro capítulos do seguinte modo: O primeiro capítulo, foi destinado ao referencial teórico, abordagens sobre a temática por especialistas, aspectos da legislação especifica e recortes de alguns trabalhos científicos. Quanto aos aspectos históricos, foi apresentado um resgate histórico buscando apresentar considerações conceituais, definições, demonstrações, aplicações e importância da função quadrática ao longo do seu desenvolvimento na evolução do estudo das equações polinomiais.

No segundo capítulo, intitulado função quadrática, foi abordado os aspectos importantes, dentre eles a sua definição, a forma canônica, o seu gráfico, intersecção com os eixos, as coordenadas do vértice, seu eixo de simetria, translações horizontais e verticais do seu gráfico, além de apresentar técnicas de determinar os zeros da função.

O terceiro capítulo apresenta toda a metodologia, onde foi realizada a abordagem, justificando os processos aplicados durante a coleta, organização e apresentação dos dados coletados, além da sequência didática utilizada.

No quarto capítulo, destaca-se a análise da abordagem da função polinomial do 2º grau nos livros didáticos disponibilizados às escolas públicas pelo programa Nacional do Livro Didático, PNLM, onde foi verificado como se dá essa proposta de construção, sistematização e consolidação desses conhecimentos. Neste capítulo foi realizado ainda, a análise dos resultados referente as respostas dadas pelos alunos e professores de matemática após a aplicação dos questionários, testes e atividades avaliativas.

Por fim, apresentamos as considerações finais, momento em que são realizadas as conclusões deste trabalho seguidas das referências bibliográfica.

CAPÍTULO 1

1 ASPECTOS HISTÓRICOS

1.1 INTRODUÇÃO

Segundo a Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco (BCC), uma das formas mais eficazes de atribuir significado ao conteúdo matemático é contextualizá-lo no processo de evolução histórica dos seus conceitos. Em síntese, deve-se buscar através da história a construção dos vários axiomas, conceitos, fórmulas e postulados, utilizando-os como instrumento importantíssimo para elucidação da origem dos mesmos, levando o aluno a entender como cada conteúdo foi introduzido, o que formaliza e serve de suporte como ferramenta capaz de contribuir no processo de ensino aprendizagem. Nesse sentido, a BCC diz que " [...] é preciso levar em conta as contribuições do processo de construção histórica dos conceitos e procedimentos matemático para a superação das dificuldades de aprendizagem desses conteúdos em sala de aula." (PERNAMBUCO, 2009, p. 98).

Como meio de responder algumas indagações sobre a natureza da matemática e seu processo de criação e generalização relativa a compreensão das técnicas algébricas é que se faz necessária uma abordagem histórica a respeito dos métodos de resolução da equação polinomial do 2º grau. De acordo com Lima (1998, p. 21) "até o século 16, não se usava uma fórmula para os valores das raízes, simplesmente porque não se usavam letras para representar os coeficientes de uma equação. Isso começou a ser feito a partir de Francois Viète, matemático francês que viveu de 1540 a 1603".

A abordagem para o cálculo das raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ no primeiro ano do ensino médio ocorre por meio da sua fórmula resolvente, conhecida como fórmula de Bhaskara,

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

de forma abstrata, mecânica e, em geral, sem justificativa, fato que leva, via de regra, o aluno a memorizá-la.

Quando se trata da função polinomial do 2º grau as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 73), destacam que

> O estudo dessa função – posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função – deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o aspecto do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se assim a memorização de regras.

De fato, ainda hoje, nota-se nos diversos livros didáticos de matemática adotados no ensino médio, como por exemplo, o livro # contato matemático e Matemática ciências e aplicações, que a passagem da representação gráfica para fórmula é pouco utilizada, como também, o procedimento para construção do seu gráfico por meios de pontos específicos ainda é muito forte. Nesse sentido, Maia (2007), após realizar uma análise dos livros didáticos percebeu a predominância da passagem da representação algébrica para a representação gráfica por meio da construção de tabelas, ou utilizando-se apenas alguns pontos especiais, os quais os livros chamam de pontos notáveis da parábola. E, ainda, que a passagem inversa, ou seja, a passagem do gráfico para a fórmula é pouco realizada.

Notamos que as abordagens dos livros didáticos ainda reforçam a ideia para a construção do gráfico pelo procedimento de pontos. Visando dar significado ao ensino e a aprendizagem desse conteúdo, observa-se tal preocupação em alguns trabalhos científicos, dentre os quais destacamos Maia (2003 apud Durval, 2007, p. 46) que afirma: “a compreensão em matemática implica na capacidade de mudar de registro, e também em saber explicar as propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto matemático em suas diferentes representações”.

Nessa mesma linha, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 72), ao enfatizar a representação geométrica da função quadrática por meios de pontos, diz que “a elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções.”

Para Gravina (1990, p. 27), o uso de tabelas na construção de gráficos de funções faz com que os alunos percam a ideia mais geral sobre o comportamento da função. Com a tabela o problema se reduz a marcação de alguns pontos do gráfico através de avaliação de x, tornando-se um exercício meramente computacional, sem raciocínio.

Ainda, segundo Lima (2001), na sua análise de livros de matemática para o Ensino Médio, o método de completar quadrados, instrumento essencial para estudar esse tópico, não é usado nem ao menos mencionado nos livros didáticos. A forma canônica do trinômio, idem. Os inúmeros e interessantes problemas contextuais que o assunto permite se reduzem a um único.

Por outro lado, Maia (2007, p. 44) afirma na sua análise dos livros do Ensino médio que “um dos autores faz um tratamento da escrita algébrica da função passando da sua forma desenvolvida $f(x)=ax^2+bx+c$ para a forma canônica $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ utilizando as propriedades das equações, e o faz utilizando duas funções especificas. Porém, todo trabalho é deixado de lado, a partir do momento que generaliza esse tratamento e encontra as fórmulas para a determinação das coordenadas do vértice”. Dessa forma, as técnicas utilizadas até então para construção de gráficos reforçam a ideia de que convém procurar novos ângulos para focalizá-los, outra maneira de abordá-los, forma essa que proporcione aos alunos o desenvolvimento de capacidades concernentes ao raciocínio, atenção, abstração, memória lógica, análise e visualização.

Conforme Soares (2013, p. 24), carregar os alunos com fórmulas que não possuam significado conclusivo, acaba privilegiando o aprendizado mecânico, que não desenvolve o raciocínio do aluno e desperdiça todo potencial que ele possui para buscar o aprendizado.

Nos dias de hoje, observa-se um grande número de alunos que apresentam dificuldades em relacionar os conceitos algébricos e o esboço da parábola, que é o gráfico da função quadrática. Analisando essa problemática procuramos apresentar este conteúdo utilizando uma metodologia diferente da que normalmente é trabalhada nas escolas, utilizando-a como ferramenta facilitadora, que auxiliem no processo ensino-aprendizagem, priorizando o raciocínio, possibilitando assim, ações como estimular, prever e comparar.

Pensando em proporcionar meios que possibilitem a construção de ideias claras e significativas referentes a função quadrática faremos uma abordagem da escrita algébrica, passando da forma tradicional $f(x)=ax^2+bx+c$ para sua forma canônica $f(x)=a(x-m)^2+k$ e vice-versa, pois, nessa correspondência nota-se que as mudanças ocorridas na representação algébrica acarreta implicações relevantes para sua representação gráfica.

Com base nesse contexto e fazendo uso da forma canônica faremos um análise das variáveis e unidades simbólicas significativas referentes a função polinomial do 2º grau, tais como: intersecção com o eixo das abscissas, intersecção com o eixo das ordenadas, concavidade, coordenadas do vértice, valor máximo e valor mínimo e eixo de simetria, como uma forma de enriquecer e aperfeiçoar o estudo deste conteúdo, viabilizando a construção de estratégias que estimulem o raciocínio, a criatividade e a curiosidade dos alunos no processo ensino aprendizagem.

Apresentaremos ainda um estudo epistomológico-histórico da função quadrática fazendo algumas considerações conceituais, identificando como diferentes povos concebiam a noção de definições, demonstrações, aplicações e importância desta função ao longo do tempo.

Registros históricos de civilizações antigas mostram que povos antigos como do Egito, da Babilônia, da Grécia, entre outros, tinham o domínio de métodos e técnicas que eram empregadas nas soluções de problemas envolvendo o que hoje chamamos de equações. Dessa forma, devemos buscar, através da história, a construção dos vários axiomas, conceitos, fórmulas, postulados, utilizando-os como instrumento importantíssimo para elucidação da origem dos conceitos envolvidos levando o aluno a entender como cada conteúdo foi introduzido, o que formaliza e serve de suporte e ferramenta capaz de contribuir no processo ensino aprendizagem. "[...] é preciso levar em conta as contribuições do processo de construção histórica dos conceitos e procedimentos matemático para a superação das dificuldades de aprendizagem desses conteúdos em sala de aula" (PERNAMBUCO, 2009, p. 98)

1.2 EQUAÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

Segundo Garbi (2009, p. 9) durante muitos séculos após sua invenção, o uso das escritas mesopotâmica e egípcia ainda permaneceu restrito a um pequeno número de pessoas, os chamados escribas. A eles competia registrar a história dos reis, a contabilidade dos impostos, os estoques e as transações comerciais. Ao fazê-lo, precisavam realizar pequenos cálculos aritméticos e geométricos de modo que seus conhecimentos não mais poderiam limitar-se às técnicas das letras e dos símbolos, mas deveriam incluir rudimentos matemáticos que eles próprios desenvolviam e passavam a seus sucessores.

Diga-se de passagem, as soluções dadas pelos escribas eram essencialmente práticas. A sistematização e formalização do conhecimento matemático não tinha como base qualquer fundamentação teórica. Por isso, costuma-se dizer que os primeiros conhecimentos matemáticos foram sendo acumulados de maneira indutiva (ou empírica) e não dedutiva. Para Rooney (2012, p. 125)

> *A representação de quantidades desconhecidas através de símbolos, fundamental na álgebra, evoluiu lentamente. Embora os antigos egípcios e os matemáticos sumérios tenham tratados de problemas que envolviam quantidades desconhecidas, eles não a expressavam na forma de equações como fazemos agora. Sem dúvida, só depois do século 16 evoluiu a forma familiar de equação.*

Em outras palavras, é oportuno ressaltar, nesse ponto, que os documentos matemáticos daquela época não faziam uso da simbologia à qual estamos atualmente acostumados. Conforme Roque (2012, p. 222), por exemplo, a palavra "coisa" era utilizada para enfatizar a condição de incógnita, pois, em árabe o vocabulário está associado a uma "indefinição" ou "indeterminação".

De um modo geral, apenas os números eram representados por símbolos: os desenvolvimentos eram, em sua quase totalidade, expresso por palavras, uma forma de expressão que hoje é conhecida por "álgebra retórica". Podemos citar como exemplo um dos problemas de Ahmes que, segundo Garbi (2009, p. 12), diz "uma quantidade, somada a seus $2/3$, mais sua metade e mais sua sétima parte perfaz 33. Qual é essa quantia?" Numa simbologia moderna nomearíamos a tal quantia desconhecida por x, de modo que teríamos

$$x+\frac{2}{3}.x+\frac{1}{2}.x+\frac{1}{7}.x=33\,. \tag{1}$$

Multiplicando a eq. (1) por 42 obtemos

$$97.x=33.42 \tag{2}$$

Note que a eq. (2) é uma equação do 1º grau. Os egípcios não conheciam a simbologia algébrica moderna, de modo que não deve ter sido muito fácil resolver tais equações. Porém, usavam um método mais refinado: aplicavam técnicas aritméticas, chamada Regra da Falsa Posição. Um exemplo da aplicação dessa regra será dada adiante na resolução da equação (1). Vamos dividi-la em 3 passos:

1º passo: escolha do número falso. Nesse caso escolhemos o número 42 (suposta quantia).

2º passo: usando o número 42 e aplicando as operações indicadas, iremos obter

$$42+\frac{2}{3}.42+\frac{1}{2}.42+\frac{1}{7}.42=97$$

3º passo: ajuste do número

	número	resultado
falso	42	97
Verdadeiro	x	33

O que resulta em

$$\frac{42}{x}=\frac{97}{33}. \qquad (3)$$

Multiplicando a eq. (3) por $33x$ obtemos

$$97.x=33.42.$$

O próprio Garbi, já citado, descreve ainda um outro exemplo desta regra: "qual o número que somado à sua terça parte dá 8? Para resolvê-la, inicialmente assumimos um valor específico, provavelmente falso, digamos 3.

Temos então $3+\frac{3}{3}=4$ em vez de 8. Como 4 deve ser multiplicado por 2 para se obter o número correto deve ser $2.3=6$.

Na realidade, tal método é adequado para equações do tipo $ax=b$. De outra maneira, usando notações mais modernas, podemos considerar uma função linear $y=f(x)=ax$ e procurar determinar para qual valor de x a função f terá imagem igual a b.

Por outro lado, na universidade de Alexandria, no Egito, por volta de 300 a.C surgia Euclides, autor dos Elementos, que se encarregaria de sintetizar e sistematizar o conhecimento matemático que se reunira até agora.

Acrescente-se a isso que, ao visitar o Egito e a Babilônia, dos conhecimentos matemáticos desenvolvidos, Tales de Mileto trouxe de lá para a Grécia o estudo da Geometria. Entretanto, ao invés, de apenas transmitir o que aprendera, introduziu um conceito revolucionário: as verdades matemáticas precisam ser demonstradas. A partir daí começaram as demonstrações dos teoremas. Na opinião de Garbi (2009, p. 19)

> Tales revolucionou o pensamento matemático ao estabelecer que as verdades precisam ser demonstradas, com o que criou a Matemática dedutiva. Euclides manteve este conceito, mas fez nele uma ressalva: nem todas as verdades podem ser provadas; algumas delas, as mais elementares, devem ser admitidas sem demonstrações..

Além disso, Euclides introduziu alguns conceitos que se tornaram fundamentais na solução de equações. Logo no início do livro Os Elementos, (Euclides, 2009, p. 98), esclarece algumas verdades evidentes por si mesmas, agrupando-as em **postulados de natureza geométrica** (cinco) e em **noções comuns**, válidas genericamente. As noções comuns de Euclides foram:

(a) As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.

(b) E, caso sejam adicionadas coisas a coisas iguais, os todos são iguais.

(c) E, caso de iguais sejam subtraídos de iguais, os restantes são iguais.

(d) E, caso iguais sejam adicionados a desiguais, os todos são desiguais.

(e) E os dobros das mesmas coisas são iguais entre si.

(f) E as metades da mesma coisa são iguais entre si.

(g) E as coisas que se ajustam uma a outra são iguais entre si.

(h) E o todo é maior que a parte.

(i) E duas retas não contém uma área.

A esse respeito Garbi (2009, p.19) afirma que, embora não tenha sido enunciado diretamente por Euclides, é fácil aceitar outra verdade; (j) “Iguais multiplicado ou dividido por iguais continuam iguais.”

Aqui estava a chave para a solução das equações do 1º grau.

Considere, por exemplo, a equação

$$3x + 2 = 8. \tag{4}$$

Pela noção comum (c), se subtrairmos dos dois lados da equação (4) o número 2 a igualdade se preserva. Então,

$$3x + 2 - 2 = 8 - 2 \ ou \ 3x = 6. \tag{5}$$

Pela verdade (j), se dividirmos os dois lados da equação (5) pelo número 3, a igualdade se preserva. Então, obtemos

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \quad \text{ou} \quad x = 2.$$

Finalmente, depois de tanto tempo, encontrava-se um método geral de resolução das equações do 1º grau.

Conclui-se com isso que a história é um instrumento importantíssimo para explicação e elucidação da origem dos vários axiomas, fórmulas e postulados situando o conhecimento matemático no tempo e no espaço.

1.3 EQUAÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

Os Babilônios, segundo Garbi (2009), na mesma época, já conseguiam trabalhar com equações do 2º grau e resolviam-nas por um método baseado no mesmo raciocínio empregado pelos hindus quase 3 milênios mais tarde, o método de “completar quadrado”. Embora os resultados fossem corretos, os tabletes que contém soluções de equações do 2º grau apresentavam, como todos os demais, uma abordagem realizada através do passo a passo, do tipo “faça isso”, “faça aquilo”, “ este é o resultado”, sem qualquer justificativa lógica sobre o caminho seguido.

Por outro lado, Pastos (1985, p. 36) afirma que os babilônios já manipulavam expressões algébricas e resolviam equações do 2º grau completas, pois algumas formas de fatoração já eram bem conhecidas. Além disso, transportavam termos em uma equação de modo semelhante ao que fazemos hoje.

Nesse sentido, o teorema de Pitágoras, criado em aproximadamente 550 a.C, foi outra grande descoberta na história da matemática. Quando Pitágoras, que nascera na ilha de Samos, a 50 km de Mileto, e que provavelmente estudara com Tales ou com seus discípulos na chamada Escola de Mileto, demonstra que em um triângulo retângulo vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$, onde a é a hipotenusa, b e c são os catetos de um triângulo retângulo, produz-se, pela primeira vez na Europa, uma equação do 2º grau com um atraso de pelo menos 1200 anos em relação ao que já havia acontecido na Babilônia.

Por outro lado, a matemática hindu produziu grandes personagens, dentre os quais destacam-se Bhaskara de Akaria e Sridhara. O primeiro usou, no século XII, a solução que mais se assemelha à utilizada atualmente; e o segundo foi responsável pela determinação, no mesmo século, da regra que originou a fórmula atual, conhecida no Brasil como fórmula de Bhaskara. A este respeito há um fato curioso: segundo Garbi (2009, p. 25), a fórmula de Bhaskara não foi descoberta por ele. Conforme ele mesmo relatou no século 12, a mencionada fórmula foi encontrada um século antes pelo matemático hindu Shidara. Sua descoberta fundamentou-se na ideia de buscar uma forma de reduzir o grau da equação do 2º grau $ax^2 + bx = c$ para uma equação do 1º grau $px + q = 0$, através da extração de raízes quadradas. Este foi o instrumento que os hindus utilizaram com sucesso para chegar a fórmula que, na citação de Bhaskara (~ 1150), consistia no seguinte: multiplicar ambos os membros da equação por um número igual a quatro vezes o coeficiente do quadrado e somar a ambos o número igual ao quadrado do coeficiente original da incógnita "(então extrair a raiz quadrada)" é o que afirma Morgado (1999). Esse processo pode ser melhor compreendido da seguinte maneira:

1. Seja a equação

$$ax^2+bx=c\,.$$

2. Multiplicando ambos os membros por $4a$, vem

$$4a^2x^2+4abx=4ac\,.$$

3. Somando a ambos os membros o quadrado do coeficiente da quantidade desconhecida, tem-se

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2+4ac\,,$$

ou seja,

$$(2ax+b)^2=b^2+4ac\,.$$

4. Extraindo a raiz quadrada, temos

$$2ax+b=\sqrt{b^2+4ac}\,.$$

Observamos que nessa época a raiz negativa não era considerada.

Note que agora trata-se de uma equação do primeiro grau, cuja resolução já era conhecida.

Sabe-se, no entanto, que Bhaskara apresentou a solução de equações polinomiais do 2º grau ao resolver problemas de ordem comercial/financeira. A seguir, apresentamos um desses problemas com linguagem de hoje.

Problema 1. Um capital de 100 unidades monetárias foi emprestado a uma certa taxa de juros ao ano. Após 1 ano, o capital foi retirado e o juro obtido foi aplicado durante mais 1 ano. Se o juro total foi de 75 unidades monetárias, qual foi a taxa ao ano?

Resolução:

1. Sendo essa taxa $x\%$, temos no 1º ano

$$100+\frac{x}{100}.100\,. \tag{6}$$

2. Retirando o capital 100 da eq. (6)

$$100+\frac{x}{100}.100-100=x$$

Logo, os juros no 1º ano serão de x e no 2º ano de

$$x+\frac{x}{100}.x\,. \tag{7}$$

Como o juro total foi de 75, na eq. (7) obtemos

$$x + \frac{x}{100}.x = 75 \qquad (8)$$

3. Multiplicando a eq. (8) por 100 chegamos a equação polinomial do 2º grau

$$x^2 + 100x - 7500 = 0$$

ou

$$x^2 + 100x = 7500 \, .$$

Note que o coeficiente do quadrado é igual a 1 e o coeficiente original da incógnita é igual a 100. Assim,

4. Multiplicando ambos os membros por 4, vem

$$4x^2 + 4.100x = 4.7500$$

5. Somando a ambos os membros o quadrado do coeficiente da quantidade desconhecida, tem-se

$$4x^2 + 4.100x + 100^2 = 100^2 + 4.7500 \, ,$$

ou seja,

$$(2x + 100)^2 = 10000 + 30000 = 40000 = 4.100^2 \, .$$

6. Extraindo a raiz quadrada, vem

$$2x + 100 = \sqrt{4.100^2} \, .$$

7. Resolvendo a equação do primeiro grau, temos

$$2x + 100 = 200 \Rightarrow 2x = 100 \Rightarrow x = 50 \, .$$

Assim, percebemos que as diferentes maneiras como as equações foram sendo concebidas ao longo da história, contribuem e ampliam as concepções na construção dos conceitos, justificando o processo de formação e significação dos conhecimentos matemáticos.

No século IX, os árabes como Al-khwarizmi agrupam os saberes gregos e indianos criando novas maneiras de solucionar problemas matemáticos. Se os árabes foram responsáveis por fazer desaparecer grande parte do conhecimento ocidental, por outro lado contribuíram para sua preservação. Como relata Fragoso (2000, p. 20), o extermínio se deu quando, como conta a história, em 641 d.C. Omar mandou que fosse destruída a Biblioteca de Alexandria. E a preservação foi devido a atuação de três califas: al-Mansur, Harum al-Rachid e al-Mamum que durante seus reinados foram responsáveis pela tradução, do grego para o árabe, dos mais importantes escritos científicos conhecidos, entre eles, O Almagesto de Ptolomeu e Os Elementos de Euclides.

De fato, de acordo com Roque (2012, p. 221), a álgebra tem origem em um dos livros mais importantes da idade Média: Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-mugabala, escrito por Al-khwarizmi. Esses dois livros tratam, de fato, de duas etapas do método para resolver equações. Citando Al-Khwarizmi:

a) A raiz é qualquer coisa que será multiplicada por ela mesma.
b) O quadrado é o que obtemos quando multiplicamos a raiz por ela mesma.
c) O numero simples é um número que expressamos sem que estejam relacionados nem a uma raiz, nem a um quadrado.

Em resumo, conforme Roque (2012, p. 222), a **Tabela 1** traz o vocabulário usado à época e o seu significado.

Além disso, os enunciados dos problemas de Al-khwarizmi eram feitos de modo retórico. Roque (2012) acrescenta o exemplo “um mal e dez jidhr igualam 39 dinares”, que em nossa notação algébrica seria representado como $x^2 + 10x = 39$. O algoritmo de resolução é descrito na **Tabela 2.**

Dessa Forma, observando a terceira coluna na **Tabela 2,** percebemos que o algoritmo de resolução é uma sequência de operações equivalentes à fórmula de resolução da equação do 2º grau usada atualmente, ou seja,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Tabela 1 – Álgebra usada por Al-khwarizmi.

Palavra	Significado na língua corrente	Sentido nos problemas	Notação moderna
Adad	Número ou quantidade de dinheiro	Quantidade conhecida (número dado)	c
Jidhr	Raiz	Quantidade desconhecida	x
Mal	Possessão ou tesouro	Quadrado da quantidade desconhecida	x^2

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 2 – Resolução da função quadrática por Al-khwarizmi.

Solução apresentada por Al-Khwarizmi	**Operações correspondentes em linguagem moderna**	**Operações correspondentes em linguagem moderna considerando uma equação genérica do tipo $x^2 + bx - c = 0$**
Tome a metade da quantidade de jidhr	$10/2$	$b/2$
Multiplique essa quantidade por si mesma	$5^2 = 25$	$(b/2)^2$
Some nos resultados os adad	25 + 39 = 64	$(b/2)^2 + c$
Extraia a raiz quadrada do resultado	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{(b/2)^2 + c}$
Subtraia desse resultado A metade dos jidhr, Encontrando a solução	8 – 5 = 3	$\sqrt{(b/2)^2 + c} - b/2$

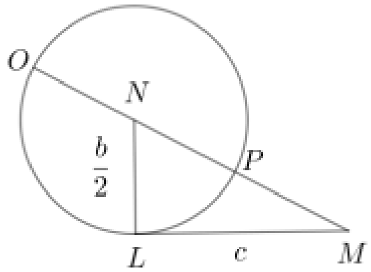
Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse sentido, a abordagem histórica e a estruturação dos saberes tornam-se um instrumento muito eficaz e importante na apropriação da construção das noções básicas dos conceitos matemáticos, justificando, através da sua evolução histórica, a sua criação, o que pode facilitar a sua compreensão e desmitificação.

Por outro lado, na Europa, embora ainda não se usasse o formalismo atual, o processo para resolver problemas envolvendo as atuais equações polinomiais do 2º grau resumia-se a uma receita usada por Bhaskara. Do século XV ao XVII, muitos foram os matemáticos que desenvolveram formas distintas de representação e resolução da equação polinomial do 2º grau. Segundo Roque (2012), as aspirações em conectar a matemática ao ideal euclidiano fez com que os mestres da época incorporasse provas geométricas na tradição algébrica.

Um deles, o francês René Descartes, em 1637, além de possuir uma notação que era diferente da atual somente pelo símbolo de igualdade, desenvolveu um método geométrico para obtenção da solução positiva. No apêndice La Géométrie de sua obra *O discurso do método*, Descartes resolve equações do tipo: $x^2 = bx + c^2, x^2 = c^2 - bx$ e $x^2 = bx - c^2$, sempre com b e c positivos. Por exemplo, para resolver equações do primeiro tipo, $x^2 = bx + c^2$, ele usou o seguinte método:

Figura 1 – Método de Descartes.



Traça-se um segmento LM, de comprimento c; e, em L, levanta-se um segmento LN de comprimento igual a $^b/_2$ e perpendicular a LM. Com centro em N, construímos uma circunferência de raio $^b/_2$ e, em seguida, traçamos a reta por M e N que corta a circunferência em O e P. A raiz procurada é a medida do segmento OM.

Com efeito, no triângulo retângulo MLN, se $OM = x$, então MN = $MN = x - \frac{b}{2}$. Como o triângulo MLN é retângulo com hipotenusa MN e catetos LN e LM, aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos

$$MN^2 = LN^2 + LM^2.$$

ou seja,

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2. \tag{9}$$

Desenvolvendo os quadrados na eq. (9) temos

$$x^2 - bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} + c^2 \Rightarrow x^2 - bx = c^2.$$

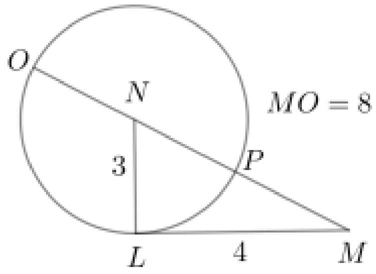
Hoje sabemos que a segunda raiz é menos a medida do segmento PM. Mas, Descartes não considerava a raiz negativa.

Tais observações nos faz pensar no cotidiano escolar, fazendo-se necessário, a resolução de um problema, qual seja:

Problema 2. Determinar as raízes da equação $x^2 - 6x - 16 = 0$.

Resolução: montando a circunferência de Descartes a partir dos coeficientes da equação dada, $a = 1, b = -6\ e\ c = -4$ temos

Figura 2 – Resolução da equação pelo método de Descartes.



Note que $MN=5$ (hipotenusa do triângulo retângulo MLN) e $LN=3$,o que implica em, $OM=MN+LN$ e $PM=MN-LN$, ou seja, $OM=5+3=8$ e $PM=5-3=2$, de onde se conclui que as raízes procuradas são $x_1 = 8 \; e \; x_2 = -2$.

Diante da riqueza dos conceitos matemáticos envolvidos e da beleza inerente ao método de Descarte, acreditamos que conhecer e explorar formas diferenciadas e demonstrações das mais diversas para se resolver equações polinomiais do 2º grau, servem de subsídios para a fomentação e ampliação do pensamento matemático por parte de alunos e professores.

No estudo, hoje em dia, dessas equações, usamos a representação literária herdada dos europeus e a resolução fornecida pelos métodos dos hindus e dos árabes, mas, o uso dessas ferramentas se restringe a um ensino baseado apenas na memorização de procedimentos, na aprendizagem de mecanismos e memorização de fórmulas.

A história nos mostra que, desde 1700 a.C. apareceram várias formas de abordagem dos resultados geométricos no estudo e desenvolvimento desse tipo de equação, surgindo várias iniciativas, no sentido de propor métodos para a sua resolução. Dessa forma, através do resgate histórico deste tema, temos uma forma de responder as perguntas acerca do processo de sua construção no presente, pois, na abordagem histórica da matemática tem-se a possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender os conceitos que utilizamos. Acreditamos, pois, que tal prática venha contribuir para a superação das dificuldades encontradas referentes ao emprego dos conceitos algébricos utilizados na resolução de equações do 2º grau nos dias atuais, oferecendo assim, uma importante contribuição no processo de ensino aprendizagem.

Apresentamos aqui as bases construtivas deste trabalho objetivando evidenciar os fundamentos teóricos que nortearão a análise do estudo da função quadrática por meio da sua forma canônica, conteúdo este, apresentado no 1º ano do ensino médio, com suas definições, demonstrações, aplicações e importância no estudo da matemática. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, “É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamento conceituais e lógicos tem a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido as técnicas aplicadas.” (BRASIL, 2000, p. 40).

Dessa forma, essa percepção é essencial e assume um papel relevante no contexto da aprendizagem, podendo facilitar a comunicação e o aprendizado em matemática.

Assim, como a Matemática faz parte da história do ser humano, procuramos mostrar, passando por diversas culturas, em diferentes momentos históricos, a evolução do estudo das equações polinomiais do 2º grau, fato que pode ser percebido por meio dos primeiros registros da atividade matemática, que revela a necessidade e preocupação de diferentes culturas, com o resgate dos conceitos matemáticos do passado e do presente.

Uma função $f:\Re \to \Re$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \Re$.

As aplicações desse modelo de função não está restrita aos interesses da matemática. Ela também é extremamente importante para outras áreas do conhecimento, por exemplo, na física, este tipo de função modela o lançamento oblíquo de projéteis e os movimentos uniformemente variados (MUV): Na engenharia, a função quadrática aparece no cálculo de estruturas e áreas.

Assim, com o intuito de estimular o espírito questionador dos alunos e com o objetivo de apresentar uma metodologia que possibilite a elaboração de estratégias que auxiliem o raciocínio lógico viabilizando a compreensão do conteúdo, foi escolhido a forma canônica como abordagem para o ensino da função quadrática, a qual será abordada no próximo capítulo.

CAPÍTULO 2

2 FUNÇÃO QUADRÁTICA

2.1 FORMA CANÔNICA

A expressão $f(x)=a(x-m)^2+k$ é a forma canônica da função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ e pode ser obtida, a partir desta, por meio de algumas manipulações algébricas no lado direito da igualdade, principalmente por meio do processo de completar quadrados. Essa tarefa pode ser realizada seguindo as seguintes etapas:

1. Consideremos o trinômio que representa usualmente a função quadrática:

$$f(x)=ax^2+bx+c\,. \tag{1}$$

2. Colocando, na expressão (1), o a em evidência, já que $a\neq 0$, temos:

$$ax^2+bx+c \;=\; a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]. \tag{2}$$

Note que as duas primeiras parcelas dentro do colchete são as mesmas do desenvolvimento do quadrado $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$. De fato,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\,. \tag{3}$$

3. Completando o quadrado (basta somar e subtrair o último termo da equação (3) na equação (2), podemos escrever:

$$ax^2+bx+c = \;a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right];$$

$$ax^2+bx+c \;=\; a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]\,. \tag{4}$$

4. Escrevendo $m=-\dfrac{b}{2a}$ e $k=\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$ e substituindo na equação (4), teremos

$$f(x)=(x-m)^2+k\,, \tag{5}$$

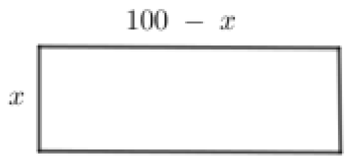
que é a forma canônica da função quadrática.

A análise de uma função polinomial do 2º grau através de sua forma canônica possibilita responder mais facilmente diversos questionamentos, como por exemplo, determinar o valor do domínio que maximiza ou minimiza a função e qual é esse valor máximo (ou mínimo). Esses detalhes serão discutidos mais adiante e por hora iremos apresentar exemplos de problemas práticos que envolvem a função quadrática.

Exemplo 2.1. Os diretores de um centro esportivo desejam cercar com tela de alambrado, o espaço em volta de uma quadra poliesportiva em forma de retângulo. Tendo recebido 200m de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área cercada seja a maior possível e qual é essa área. (Dante, 2011).

Resolução:

Fazendo um esboço do espaço a ser cercado e atribuindo a medida x a um dos lados, o outro lado deverá medir $100-x$, pois, a soma das medidas dos lado dever ser igual a 200.



Lembrando que a área do retângulo é o produto das medidas do seu comprimento por sua largura, a função que modela a área do retângulo que representa a quadra poliesportiva é dada por

$$A(x) = x(100-x) = 100x - x^2 .$$

Seguindo as etapas apresentadas na seção 2.1 e completando o quadrado na expressão da função quadrática teremos

$$A(x) = -x^2 + 100x ,$$

$$A(x) = -\left[x^2 - 100x + 50^2 - 50^2\right],$$

$$A(x) = -\left[(x-50)^2 - 2500\right],$$

$$A(x) = -(x-50)^2 + 2500 .$$

Note que, sendo $(x-50)^2 \geq 0$, então $A(x)$ terá maior valor quando $(x-50)^2 = 0$. Daí, teremos 2500 como o maior valor da função $A(x)$. Logo, para que a área seja máxima, devemos ter $x = 50$. Assim, para que se obtenha um cercado de área máxima a região a ser cercada é um quadrado de $50m$ de lado.

Exemplo 2.2. Um trem percorreu 200 km em certo tempo com velocidade constante. Para percorrer essa distância em uma hora a menos, a velocidade deveria ser de 10 km/h a mais. Qual era a velocidade do trem? (Dante, 2016).

Resolução:

Considerando que o deslocamento inicial é igual a zero, temos que $S = vt$, onde S representa a distância percorrida, v é a velocidade e t o tempo gasto no percurso.

1. O trem percorre 200 km em certo tempo, ou seja, $200 = vt$. Logo $t = \dfrac{200}{v}$.

2. Para percorrer 200 km em uma hora a menos, a velocidade deveria ser de 10 km/h a mais, ou seja, $200 = (v+10).(t-1)$. Substituindo t por $\dfrac{200}{v}$, temos

$$200 = (v+t).\left(\frac{200}{v} - 1\right) \Rightarrow 200 = 200 - v + \frac{2000}{v} - 10$$

Logo,

$$v - \frac{2000}{v} + 10 = 0$$

3. Multiplicando a equação anterior por v temos

$$v.\left(v - \frac{2000}{v} + 10\right) = v.0.$$

Assim, a equação que modela a velocidade do trem é dada por

$$v^2 + 10v - 2000 = 0.$$

Agora, basta completarmos o quadrado da equação para obtermos a forma canônica. Realizando os procedimentos indicados na seção 2.1, obtemos

$$(v+5)^2 - 2025 = 0.$$

$$(v+5)^2 = 2025$$

$$(v+5)^2 = 45^2$$

$$v + 5 = \pm 45$$

$$v = 40 \text{ ou } v = -50.$$

Note que a velocidade negativa não é válida, pois o movimento é retilíneo e progressivo. Logo, a velocidade do trem era $40 \ km/h$.

Exemplo 2.3: uma empresa de turismo fretou um avião com 200 lugares para uma semana de férias, devendo cada participante pagar R\$ $500,00$ pelo transporte aéreo, acrescido de R\$ $10,00$ para cada lugar do avião que ficasse vago. Nessas condições, determine o número de passagens vendidas que torna máxima a quantia arrecadada pela empresa.(Balestri, 2016).

Resolução:

Seja x o número de lugares vagos. Como para cada lugar é acrescido R\$ $10,00$, temos

Total de passagens: $200-x$

Valor de cada passagem: $500+10x$

Assim, a função quadrática que descreve a quantia arrecadada pela empresa será:

$$f(x)=(200-x).(500+10x)\Rightarrow f(x)=-10x^2+1500x+100000.$$

Sabe-se que a forma canônica da função quadrática é

$$f(x)=a(x-m)^2+k,$$

em que $m=-\dfrac{b}{2a}$ e $k=-\dfrac{\Delta}{4a}$.

Note que, sendo $(x-m)^2\geq 0$, então $f(x)$ terá maior valor quando $(x-m)^2=0$. Logo, para que o valor seja máximo, devemos ter $x=m$. Assim, teremos k como o maior valor da função $f(x)$. Daí,

$m=-\dfrac{1500}{2.(-1)}\Rightarrow m=75$ lugares vagos. Portanto, a arrecadação máxima ocorrerá com 75 lugares vagos, ou seja, quando forem vendidas 125 passagens $(200-75=125)$.

2.2 GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Assim como ocorre em toda função, o gráfico da função quadrática

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

é um elemento de grande importância para entendermos o seu comportamento.

Figura 3 – Parábola com concavidade para baixo.

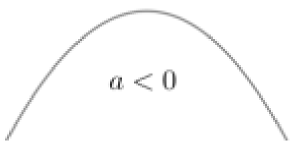
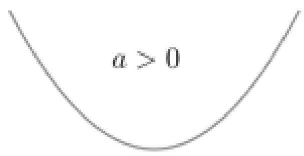


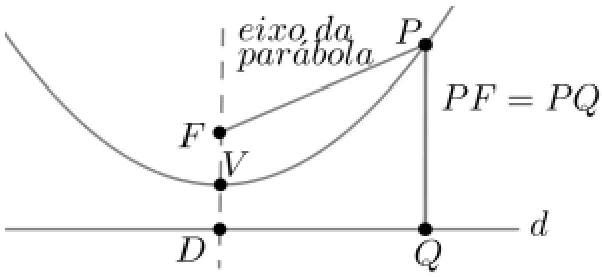
Figura 4 – Parábola com concavidade para cima.



O gráfico de uma função quadrática é uma curva chamada parábola como mostra as **Figuras 3 e 4**. Uma prova analítica desse fato pode ser encontrada em Lima (2006, p. 125)

Para possibilitar um melhor entendimento dessa curva e dos seus elementos considere um ponto F e uma reta d que não o contém, como ilustrado na **Figura 5.** Chama-se **parábola de foco** F **e diretriz** d o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d.

Figura 5 – Parábola da função quadrática.



A reta perpendicular à diretriz que contém o foco F chama-se **eixo da parábola** (eixo de simetria: reta $\overline{VF}$). O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se vértice dessa parábola. O **vértice** V é o ponto médio do segmento de reta cujos extremos são o foco F e a intersecção D do eixo com a diretriz d.

A concavidade da parábola, que é o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, é determinada pelo coeficiente a da seguinte maneira: se $a > 0$, a concavidade é voltada para cima e se $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo, conforme ilustrado nas **Figuras 3** e **4**. Com efeito,

A forma canônica do trinômio

$$ax^2 + bx + c$$

nos dá

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + k$$

onde

$$m = -\frac{b}{2a} \text{ e } k = \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

O ponto do gráfico de

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mais próximo da diretriz é aquele de abcissa $x=-\frac{b}{2a}$. Neste ponto, $f\left(x\right)$ atinge seu valor mínimo quando $a>0$ e seu valor máximo quando $a<0$.

As abcissas α e β dos pontos onde esse gráfico intersecta o eixo x são as raízes da equação

$$ax^2+bx+c=0.$$

Como nesse caso, $f\left(\alpha\right)=f\left(\beta\right)=0$, $x=\alpha$ e $x=\beta$ são também chamadas de zeros da função $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$, o ponto médio do segmento $\left[\alpha,\beta\right]$ é a abcissa x_v do vértice da parábola. Mostraremos mais adiante que $x_v=-\frac{b}{2a}$.

Neste texto, nos limitaremos apenas a fazer um estudo dos pontos mais importantes do gráfico da função quadrática quais sejam: intersecção com o eixo das ordenadas, intersecção com o eixo das abscissas, coordenadas do vértice da parábola e o eixo de simetria da parábola.

2.2.1 Intersecção com os eixos das ordenadas

A parábola que é o gráfico da função quadrática $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ intersecta o eixo y quando temos o valor de x igual a zero, ou seja, devemos calcular o valor numérico da função para $x=0$, isto é,

$$f\left(0\right)=a.0^2+b.0+c\Rightarrow f\left(0\right)=c$$

Assim, o ponto $\left(0,c\right)$ do gráfico da função quadrática pertence ao eixo das ordenadas.

2.2.2 Intersecção com os eixos das abscissas

Designa-se por zero de uma função f todo valor da variável independente x que tem por imagem o valor zero, ou seja, zero de uma função f é todo valor de x, pertencente ao domínio dessa função, tal que $f\left(x\right)=0$.

Graficamente, o zero de uma função é todo valor das abscissas dos pontos onde ocorre a interseção do gráfico de f com o eixo x.

Neste caso, a parábola intersecta o eixo x no ponto $(x,0)$, ou seja, sempre que y for igual a zero, isto é, $y = f(x) = 0$. Isto equivale a calcular as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Sendo $a \neq 0$, temos da equação (4) que

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = 0 . \qquad (5.a)$$

Daí, temos

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0, \qquad (5.\text{b})$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}, \qquad (5.\text{c})$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}, \qquad (5.\text{d})$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}, \qquad (5.\text{e})$$

o que nos conduz a fórmula, conhecida como fórmula de Bhaskara, que é tradicionalmente ensinada nas escolas

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \qquad (5.\text{f})$$

Na equação $(5.\text{f})$, o número $\Delta = b^2 - 4ac$, é chamado discriminante da equação $ax^2 + bx + c$ = 0. Logo, o número de pontos do gráfico da função que intersecta o eixo x, dependerá do valor do Δ. De fato, a passagem da eq. $(5.b)$ para a eq. $(5.\text{c})$ só tem sentido quando $\Delta \geq 0$.

- Caso tenhamos $\Delta < 0$, a equação não possui solução real, pois a equivalência entre as eq. $(5.\text{b})$ e $(5.\text{c})$ nos mostra que o quadrado de $x + \frac{b}{2a}$ não pode ser negativo, ou seja, a parábola da função não intersecta o eixo x.
- Se $\Delta > 0$, a equação $ax^2 + bx + c$ = 0 tem duas raízes reais e distintas,

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

e

$$\beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Neste caso, supondo $\alpha > \beta$, a soma $S = \alpha + \beta$ é dada por

$$S = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{2a} \Rightarrow S = -\frac{b}{a}; \qquad (6.a)$$

enquanto o produto $P = \alpha.\beta$ fica

$$P = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \Rightarrow P = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \qquad (6.\mathrm{b})$$

Em particular, a média aritmética das raízes é $-\frac{b}{2a}$, ou seja, $x_v = -\frac{b}{2a}$. Assim, as raízes α e β são equidistantes do ponto $-\frac{b}{2a}$.

- Quando $\Delta = 0$, a equação dada possui uma única raiz, chamada raiz dupla, isto é, $\alpha = \beta = -\frac{b}{2a}$.

Graficamente a análise da existência dos zeros da função quadrática pode ser feita da seguinte maneira: Se o gráfico da função está inteiramente acima, ou inteiramente abaixo do eixo horizontal x, a equação não possui raízes reais. Se o gráfico apenas tangencia o eixo x, a equação tem uma raiz (única) dupla. Se o gráfico é secante ao eixo x, a equação possui duas raízes reais e distintas.

2.2.3 Coordenadas do vértice da parábola

O vértice da parábola de uma função quadrática é o ponto V de coordenadas $\left(x_v, \mathrm{y}_v\right)$, que pode ser calculado em função dos coeficientes a, b e c. Nesse ponto, há uma mudança no comportamento da função. Ela passa de crescente para decrescente ou vice-versa. Por isso, nesse ponto, a função atinge seu valor máximo ou mínimo.

Da equação $(6.a)$ temos que

$$x_v = \frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{b}{2a}. \qquad (7.a)$$

Temos ainda que, $y_v = f\left(x_v\right)$. Dessa forma, substituindo o resultado encontrado em $(7.a)$ para x_v em $f\left(x\right)$ = ax^2+bx+c, obtemos

$$y_v = f(x_v) = a.\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b.\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \qquad (7.\mathrm{b})$$

Então,

$$y = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Como da equação (4) temos

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

das equações $(7.a)$ e $(7.\mathrm{b})$, temos que, quando $x = -\frac{b}{2a}$, obtemos $f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$. Além disso, podemos escrever

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v.$$

Suponhamos que $a > 0$. Note que a forma canônica

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

exibe, no interior dos colchetes, uma soma de duas parcelas. A primeira depende de x e é sempre não negativa. A segunda é constante. O menor valor dessa soma é atingido quando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0,$$

ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$. Nesse ponto, $f(x)$ assume seu valor mínimo. Portanto, quando $a > 0$, o menor valor assumido por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

como visto na equação $(7.b)$. Assim, de forma análoga, se $a < 0$, o valor $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é o maior dos números $f(x)$, para todo $x \in$ IR. Isto significa que o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ representa um ponto onde a função quadrática possui valor extremo máximo ou mínimo.

2.2.4 Eixo de simetria da parábola

Eixo de simetria de uma parábola que é gráfico de uma função quadrática é uma reta vertical paralela ao eixo das ordenadas, podendo até mesmo ser o eixo das ordenadas, o qual passa pelo vértice da parábola conforme pode ser visto na figuras de 6 a 11. Em cada figura x_1 e x_2 representam os zeros da função f .

Figura 7 – Eixo de simetria.

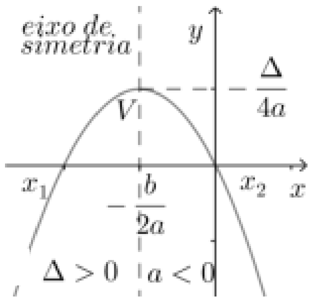


Figura 6 – Eixo de simetria.

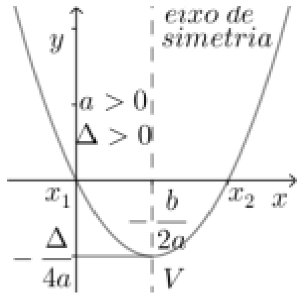


Figura 8 – Eixo de simetria.

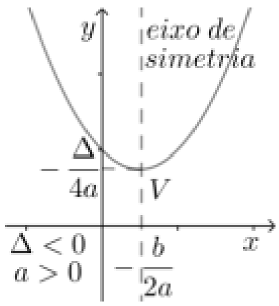


Figura 9 – Eixo de simetria

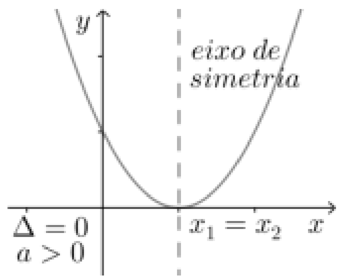


Figura 10 – Eixo de simetria.

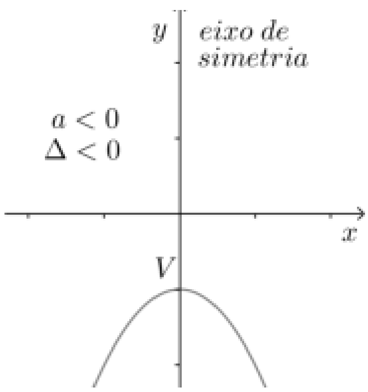
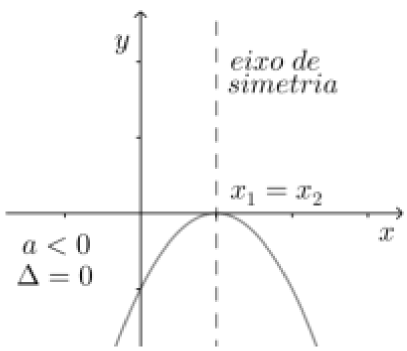


Figura 11 – Eixo de simetria.



Note que, o eixo de simetria intersecta o eixo x num ponto equidistante das raízes, além de intersectar a parábola no seu vértice. Logo a equação do eixo de simetria é $x=-\frac{b}{2a}$.

2.2.5 Translações horizontais e verticais da parábola

Suponhamos que estejam disponíveis as coordenadas (m,k) do vértice de uma parábola, bem como o coeficiente a, que fornece a sua concavidade. Nesse caso é fácil determinar a expressão da função $f(x)$ correspondente, bem como traçar o seu gráfico, bastando para isso que apliquemos sobre a função $g(x)=ax^2$ alguma das transformações, translação horizontal ou translação vertical.

2.2.5.1 Translação horizontal

Figura 12 – Translação horizontal.

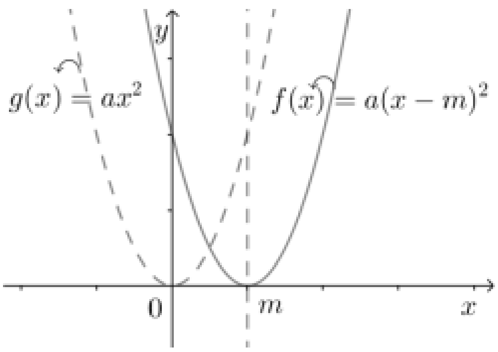
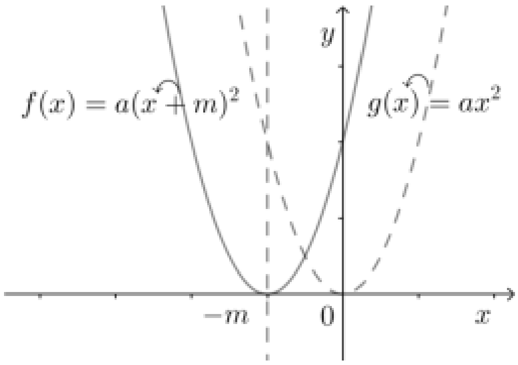


Figura 13 – Translação horizontal.



Note que, conforme representado nas **Figuras 12** e **13**, o gráfico de $f(x)=a(x-m)^2$ e de $f(x)=a(x+m)^2$ resulta do gráfico de $g(x)=ax^2$, ou seja, sua posição é, em valores absolutos, m unidades à direita $(m>0)$ ou à esquerda $(m<0)$ do gráfico de $g(x)$. Se $a<0$, então a parábola tem sua concavidade voltada para baixo, mas a translação é análoga.

2.2.5.2 Translação vertical

Podemos obter o gráfico de $f(x)=ax^2+bx+c$ a partir do gráfico de $g(x)=ax^2$ por meio de uma translação vertical, conforme as **Figuras 14 e 15.**

Note que, no caso em que $k > 0$, haverá um deslocamento para cima (vertical) e o gráfico, $h(x) = a(x-m)^2 + k$, resulta do gráfico $f(x) = a(x+m)^2$. Analogamente, o gráfico de $h(x) = a(x+m)^2 + \mathrm{k}$, resulta do gráfico $f(x) = a(x+m)^2$. Já se $k < 0$, a parábola será deslocada para baixo.

Figura 14 –Translação vertical.

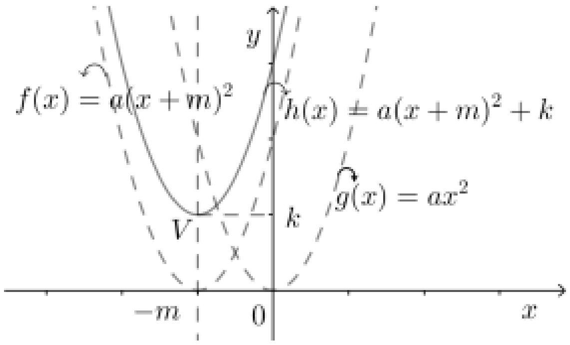
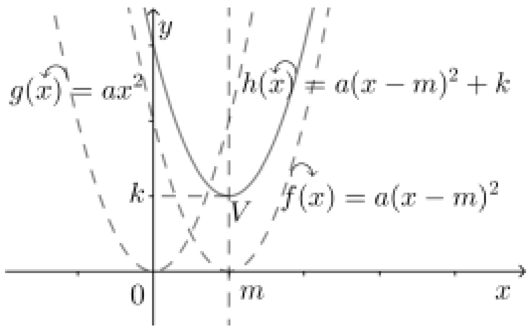


Figura 15 – Translação vertical.



2.3. OUTRAS FORMAS DE DETERMINAR OS ZEROS DA FUNÇÃO

Sabemos que se a função possuir valores para os quais $f(x) = 0$, ou seja, valores que anulam a função, então ela intersectará o eixo x nesse(s) ponto(s). Se o objetivo é apenas determiná-los, é recomendável uma abordagem mais direta como as que serão apresentadas a seguir.

2.3.1 Forma fatorada

Sejam α e β os zeros da função $ax^2 + bx + c = 0$. Colocando o a em evidência na lei de formação da função f e usando as equações $(6.a)$ e $(6.\mathrm{b})$ obtemos:

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right],$$

$$= a\left[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha.\beta\right],$$

$$= a\left[x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha.\beta\right],$$

$$= a\left[x(x-\alpha) - \beta(x-\beta)\right],$$

$$= a\left[(x-\alpha).(x-\beta)\right].$$

Logo os zeros da função f poder ser obtidos fazendo

$$f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-\alpha=0 \Rightarrow x=\alpha \\ x-\beta=0 \Rightarrow x=\beta \end{cases}.$$

2.3.2 Soma e produto

No caso em que os zeros da função polinomial do 2º grau são números inteiros é interessante o aluno resolvê-las aplicando os resultados relativos a soma e o produto vistos na seção *2.2.2*, pois para descobri-las poderá utilizar apenas o cálculo mental, estimulando assim o raciocínio lógico com esta importante estratégia de cálculo, conforme recomendado nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 70).

Seja α e β raízes da equação quadrática $ax^2+bx+c=0.$ Teremos:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ e } P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}.$$

Logo, o problema de calcular os números α e β, se resume ao cálculo da solução do seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha.\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

Que como mencionamos anteriormente, pode ser resolvido mentalmente no caso de α,β serem números inteiros.

Exemplo 2.4: Durante um jogo de futebol, um jogador lança a bola, que descreve uma trajetória parabólica determinada pela função $h(x)=x-\dfrac{x^2}{40}$, em que h representa a altura atingida pela bola e x a distância horizontal percorrida pela bola a partir do ponto de onde foi lançada até tocar o solo. Qual a distância horizontal percorrida pela bola quando esta toca o solo? (adaptado, Balestri, 2016).

Resolução:

A solução do problema consiste em determinar o percurso da bola sobre o eixo horizontal (eixo das abscissas). Assim, devemos calcular os zeros da função, ou seja, os valores de x para os quais $h(x)=0$. Logo podemos escrever

$$h(x)=0 \Rightarrow x-\frac{x^2}{40}=0 \Rightarrow 40x-x^2=0.$$

Então, fatorando a expressão $40x - x^2$ obtemos $x(40 - x)$.

Daí, $$x(40-x)=0\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 40 \end{cases}.$$

Note que a distância de 0 m ocorre no momento do chute, logo a distância percorrida é de 40 m.

Exemplo 2.5: Quantos lados tem um polígono convexo que possui 170 diagonais? Qual é o nome dele? (Dante, 2016).

Resolução:

A função que determina o número de diagonais d de um polígono convexo de n lados é dada por $d = \frac{n(n-3)}{2}$. Assim, $170 = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow n^2 - 3n - 340$. Chamando, n_1 e n_2 de zeros da função, pela soma e pelo produto dos zeros teremos:

$$S = n_1 + n_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-3)}{1} = 3$$
$$P = n_1.n_2 = \frac{c}{a} = \frac{-340}{1} = -340$$

Logo, deveremos descobrir dois números cuja soma é igual a 3 e cujo produto é igual a -340. Como o produto é negativo, os zeros (se existirem) terão sinais opostos, ou seja, um positivo e outro negativo. Se listarmos os pares de números inteiros que multiplicados vale -340 e somados vale 3 encontraremos: $n_1 = 20$ e $n_2 = -17$.

Note que -17 não serve. Portanto, o polígono tem 20 lados e se chama icoságono.

Nesse sentido, podemos concluir que a identificação da estratégia mais adequada para a resolução do problema, auxilia o aluno a aprimorar o raciocínio matemático, uma vez que ele mobiliza saberes no sentido de buscar a solução, suscitando o gosto pelo trabalho mental, estimulando a curiosidade e proporcionando o gosto pela descoberta, o que o levará ao desenvolvimento de sua autoconfiança, criatividade e senso critico.

CAPÍTULO 3

3 METODOLOGIA

3.1 INTRODUÇÃO

Buscando compreender e explicar o problema pesquisado, ou seja, encontrar respostas com o objetivo de confirmar ou rejeitar os pressupostos da pesquisa, faz-se necessário a realização de uma investigação planejada e desenvolvida com rigor cientifico, o que enseja a escolha de uma metodologia adequada para abordar o objeto em estudo. Segundo Gil (2008), "para que o conhecimento seja considerado científico, torna-se necessário identificar as operações mentais e técnicas que possibilitem a sua verificação, ou, em outras palavras, determinar o método que possibilite chegar a esse conhecimento". Lakatos e Marconi (2003) entende que pesquisa é: "[...] um procedimento formal, com método de pensamento reflexivo, que requer um tratamento científico e se constitui no caminho para conhecer a realidade ou para descobrir verdades parciais."

3.2 PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

Com a finalidade de responder os propósitos preestabelecidos, foi realizada uma pesquisa bibliográfica. Segundo Gil (2008, p. 50), "a pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de matéria já elaborada, constituído principalmente de livros e artigos científicos". Portanto, fundamental na estruturação conceitual que servirá de base de sustentação ao desenvolvimento da investigação, realizamos a análise de livros didáticos, cujo critério de escolha foi determinado com base no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) 2017, que são os livros recomendados pelo MEC. Tais livros são escolhidos usando subsídios dos PCNs e passam por uma análise criteriosa fundamentada no Guia do Livro Didático, o que, em tese, devem apresentar padrões de qualidade. Um desses livros foi escolhido pelo autor deste trabalho como um dos recursos pedagógicos para o trabalho em sala de aula. Realizamos também um levantamento de artigos, dissertações, teses e livros para sabermos se essa temática tem sido objeto de trabalhos acadêmicos do Profmat. Uma pesquisa de campo com o objetivo de identificar elementos que possibilitem efetuar uma análise prática do tema proposto também foi realizada.

3.3 PESQUISA DE CAMPO

Para Lakatos e Marconi (2003), "pesquisa de campo é aquela utilizada com o objetivo de conseguir informações e/ou conhecimento acerca do problema, para o qual se procura uma resposta, ou ainda, descobrir novos fenômenos ou as relações entre eles". Nesse sentido, a pesquisa de campo tem como finalidade obter informações diretamente da realidade através do uso de técnicas de coletas de dados com entrevistas ou questionários, a fim de dar respostas a alguma situação ou problema proposto anteriormente.

Dessa forma, durante o desenvolvimento da proposta de ensino, foram aplicados aos alunos dois questionários, com o propósito de averiguar a sua compreensão em relação ao nível de conhecimento, dificuldades, desempenho e processo de ensino da função quadrática, como também, a sua visão sobre a abordagem desta função por meio da sua forma canônica. Também foi aplicado um questionário aos professores de matemática da escola inquirindo-os sobre suas dificuldades no ensino da função quadrática, a relevância do tema e com que frequência fazem uso da forma canônica como abordagem de ensino. Para Gil (2008), questionários é um instrumento de coleta de dados, composta por um conjunto de questões que são submetidas às pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, interesses, entre outros. Além disso, foi aplicado um pré-teste e três atividades avaliativas buscando identificar os conhecimentos prévios e o nível de assimilação dos conteúdos, pelos alunos.

Quanto aos métodos de pesquisa utilizados para abordagem do objeto em estudo, Minayo (2002) destaca que, a pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado, ou seja, identifica e analisa dados não mensuráveis numericamente, como sentimentos, sensações e percepções, ficando no plano do subjetivismo, enquanto a abordagem quantitativa foca a questão da objetividade, traduzindo as informações em dados matemáticos. Ainda segundo Minayo (2002,p. 22), "o conjunto de dados qualitativos e quantitativos, porém, não se opõem. Ao contrário, se completam, pois a realidade abrangida por eles interage dinamicamente, excluindo qualquer dicotomia." Desse modo, para o desenvolvimento do trabalho proposto, utilizamos a abordagem qualitativo-quantitativa de investigação, na qual os dados coletados ao longo da pesquisa foram analisados e tratados, considerando os aspectos subjetivos/objetivos, a serem apresentados e comunicados, *à posteriori*, em resposta à investigação inicialmente formulada.

A pesquisa de campo foi realizada com uma turma da 1ª série do ensino médio, composta de 20 alunos em uma escola estadual do município de Juazeiro-BA. A maioria dos alunos são oriundos de famílias que vivem e trabalham nas fazendas da região.

Definidos o local e os participantes da pesquisa, foi necessário definir as sequências didáticas com a finalidade de diagnosticar o nível de aprendizagem dos alunos, numa situação onde a função quadrática é abordada por meio de sua forma canônica. De forma resumida descreveremos as três sequências didáticas a seguir.

1ª sequência didática: Num primeiro momento, propomos uma atividade para identificar os conhecimentos prévios que serviram como pré-requisito para o estudo do tema.

Num segundo momento, através de uma aula expositiva, apresentamos uma situação problema cujo modelo matemático para a situação real apresentada é uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

***2ª sequência didática*:** No primeiro momento**,** através de uma aula expositiva utilizamos a situação problema introdutória e, completando quadrados, escrevemos a forma canônica da função quadrática. Fazer o esboço do seu gráfico e analisar todos os seus pontos importantes. Num segundo momento, fazer a demonstração da forma canônica.

3ª sequência didática: No primeiro momento, dividir a turma em duplas, entregar a cada dupla uma atividade impressa em papel e propor a seguinte questão: analise o gráfico da função quadrática na sua forma canônica $f(x) = a(x-m)^2 + k$ e determine, depois de compará-los, os movimentos ocorridos em relação ao gráfico da função quadrática mais simples $f(x) = ax^2$. Cada grupo deve apresentar o registro de sua solução justificando suas respostas. No segundo momento, análise e socialização dos resultados apresentados pelos alunos..

CAPÍTULO 4

4 RESULTADOS

4.1 ABORDAGEM DA FUNÇÃO QUADRÁTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma análise dos contextos em que a função polinomial do 2º grau é abordada nos livros didáticos de matemática, oferecidos às escolas públicas brasileiras pelo Programa Nacional do Livro Didático, PNLD, no ensino médio, e como se dar a proposta de construção, sistematização e consolidação dos conhecimentos.

Foram analisados os livros do 1º ano do ensino médio de cinco coleções aprovadas pelo PNLD de 2017. Os critérios definidos para análise levam em consideração os seguintes dados

1. Abordagem inicial do conteúdo. O tema função quadrática foi apresentado por meio de uma ou várias situações problemas?
2. Contextualização do conteúdo. O livro desenvolve o tema de forma contextualizada? Há relações com situações problemas reais ou presente em outras disciplinas?
3. Forma canônica.
4. Articulação entre conteúdos matemáticos.
5. Exemplos e exercícios.
6. Recursos tecnológicos.

Para análise dos aspectos **articulação entre conteúdos matemáticos** e **quantidade de exemplos/exercícios** foi criado uma escala que obedece os seguintes critérios:

a) Articulação entre conteúdos.
   - 0 (zero) – Não apresenta articulação com outro conteúdo.
   - 1 – Apresenta articulação com 1 conteúdo.
   - 2 – Apresenta articulação com pelo menos 2 conteúdos.

b) Quantidade e variedade de exemplos/exercícios propostos.
   - I – Insuficiente 1 a 2
   - S – Suficiente 3 a 5
   - B – Bom 6 a 8
   - MB – Muito bom acima de 8

4.1.1 Resultados

Observou-se que todos os livros analisados, que chamaremos de livro 1, livro 2, livro 3, livro 4 e livro 5, procuraram iniciar, apropriadamente, o estudo da função quadrática usando como estratégia uma situação problema. Para Lima (2001, p. 273), esta abordagem deveria ser utilizada em todo capítulo de livro de matemática.

A abordagem via situação problema também é recomendada nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, que ressalta

> *Não somente em matemática, mas particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações problemas, novos mais compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação (BRASIL, p.52).*

Este resultado está de acordo também com o proposto nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BAHIA, 2015, p. 20), no que tange a modelagem matemática, que destaca que, “esta como estratégia de ensino e aprendizagem viabiliza construções significativas com ações envolvidas na resolução de problemas abertos e de situações-problemas”.

Com relação a contextualização do conteúdo foi observado que além dos problemas clássicos (problemas envolvendo cálculo de áreas) essa estratégia está presente nas cinco coleções analisadas divididas em duas categorias: a primeira, contextualização sócio cultural que é aquela constituída de situações do cotidiano marcadas, algumas vezes, pela utilização dos conhecimentos prévios dos alunos; situações que envolvem interdisciplinaridades; e de situações que trazem preocupações universais. A segunda categoria, por sua vez, trata da contextualização interna à matemática e caracteriza-se por situações em que são realizadas articulações, dentro da própria matemática, para favorecer a conexão entre conteúdos de áreas distintas da matemática.

Constatou-se ainda, nas cinco coleções analisadas, a ausência da contextualização histórica, que envolve situações que buscam situar historicamente o conhecimento matemático. A utilização desse recurso fica limitado, quando utilizado, a descrição de fatos ocorridos no passado ou apresentação de bibliografias de matemáticos famosos. No entanto, o uso da história da matemática além de desenvolver atividades diversificadas integrando a matemática com as demais disciplinas oportuniza a leitura, a reflexão, a análise, além de contextualizar o saber mostrando que seus conceitos são frutos de uma época histórica, dentro de um contexto social e político.

Considerando-se a análise da articulação entre conteúdos da própria matemática e os critérios pré-estabelecidos, os livros 1, 2, 3 e 5 são classificados com nível 1, ou seja, apresentam articulação com apenas um conteúdo. Os exemplos/exercícios propostos envolve conceito de geometria, no caso área, tendo como finalidade a determinação da lei da função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. No nível 2, temos o livro 4, que além da geometria, mostra-se articulado com a Progressão Aritmética (PA). Essa é uma propriedade que caracteriza a função quadrática, isto é, se f é uma função quadrática, então ela transforma uma PA em uma sequência cujas diferenças dos termos consecutivos formam uma PA. A recíproca é verdadeira (Lima, 2006).

Quanto à distribuição da quantidade de exemplos apresentado nos livros eles se encontram no nível S, ou seja, são considerados suficientes segundo a escala adotada, enquanto que para os exercícios, foram classificados no nível MB, os livros 1, 2 e 5; no nível B, o livro 3; e no nível S, o livro 4.

Os cinco livros apresentaram, no seu estudo, a relação forma algébrica/gráfico e vice-versa em níveis satisfatório. Apenas o livro 3, propõe um exercício para o estudo da relação gráfico/forma algébrica, o que é insuficiente, levando-se em consideração que esse conceito deve ser estudado gráfica, numérica e algebricamente permitindo que o aluno aprenda e compreenda a fazer o caminho de volta, ou seja, fazer o estudo gráfico/forma algébrica observando o comportamento da função, seus pontos relevantes e seus significados.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio

> *(...) O estudo dessa função – posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros - deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o aspecto do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando assim a memorização (BRASIL, 2006, p. 73).*

O método de completar quadrados e a forma canônica da função quadrática, instrumento essencial para o estudo desse tópico, não é usado e nem ao menos mencionado pelos livros 1, 2 e 3. No estudo da função quadrática, a única técnica utilizada para escrever a equação polinomial do 2º grau e encontrar suas raízes é a fórmula de Bhaskara. No livro 5, no entanto, encontramos a presença da forma canônica que é utilizada apenas para demonstrar a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Os autores não a utilizam como uma ferramenta para o estudo da função. Já no livro 4, a forma canônica é mencionada apenas no final do capítulo, chamando atenção para sua utilização como ferramenta de estudo, resumindo-se apenas a seis exercícios adicionais. Isto é, nesses dois livros não há estímulo para que os alunos façam uso da sua forma canônica para estudo da função quadrática.

Conforme Soares (2013, p. 24), carregar os alunos com fórmulas que não possuam significado conclusivo, acaba privilegiando o aprendizado mecânico, que não desenvolve o raciocínio do aluno e desperdiça todo potencial que ele possui para buscar o aprendizado.

Dessa forma, acreditamos que com o uso da forma canônica da função quadrática no ensino deste tema, estaremos permitindo ao aluno compreender algébrica e geometricamente elementos importantes, como pontos de intersecção com os eixos, concavidade e pontos de máximo e mínimo. Além disso, acreditamos que tal compreensão, que estarão diretamente ligadas as escrita algébrica, favorece a sua interpretação e ampliação dos conceitos matemáticos, podendo ser melhor explorada com o uso da tecnologia.

Observamos ainda que, apenas os livros 3, 4 e 5 apresentam atividades que incentivam o uso de recurso tecnológico. No livro 3, a sugestão para uso do recurso vem em forma de nota, pedindo pra recorrer ao software winplot sempre que estiver estudando funções. Nos livros 4 e 5, a sugestão é para o uso do software geogebra para auxiliar no desenvolvimento das atividades possibilitando observar o comportamento do gráfico da função, suas particularidades e regularidades.

A presença de indicativos do uso de recursos tecnológicos nos livros didáticos é importante, pois o uso da tecnologia é uma ferramenta poderosa que auxilia no processo de investigação matemática, no processo de construção do conhecimento e que possibilita a superação de vários obstáculos inerentes ao aprendizado da disciplina. Além disso, o uso de recursos tecnológicos torna o aprendizado um processo dinâmico e permite um melhor gerenciamento do tempo e ações de aprendizagem, levando o aluno a refletir, agir, criar e construir um novo modo de pensar a matemática. Nesse sentido, para a escolha do livro didático devemos observar dois aspectos: o uso da tecnologia e se a escola dispõe de infraestrutura capaz de fazer emergir tais tecnologias como elemento mediador no processo pedagógico.

O **Quadro 1** apresenta um resumo da análise realizada nos livros didáticos relacionadas ao estudo da função quadrática.

Quadro 1 – Análise da função quadrática nos livros didáticos.

	# Contato Matemática 1	Matemática Ciência e Aplicação 2	Matemática Paiva 3	Matemática Contextos e Aplicações 4	Matemática Interação e Tecnologia 5
Abordagem inicial por meio de situação problema.	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Contextualização do conteúdo.	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Articulação entre os conteúdos.	1	1	1	2	1
Quantidade e variedade de exemplos	S	S	S	S	S
Quantidade e variedade de exercícios	MB	MB	B	S	MB
Relação forma algébrica/gráfico	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Presença da forma canônica	Não	Não	Não	Sim	Sim
Os livros abordam o conteúdo função quadrática por meio da forma canônica?	Não	Não	Não	Sim	Sim
Há estímulo para que o aluno faça uso da forma canônica?	Não	Não	Não	Não	Não
Há estímulo ao uso de recursos tecnológicos?	Não	Não	Sim	Sim	Sim

Fonte: Elaborado pelo autor.

Finalizamos essa análise destacando que o livro didático é um importante recurso didático do professor e uma ferramenta de aprendizagem para o aluno, por isso, a importância na hora de sua escolha. É o professor quem organiza o uso desse recurso, planeja as atividades, decide o que deve ser aprofundado ou retomado e direciona os conteúdos básicos a serem abordados, adequando-os a proposta pedagógica e que atenda as expectativas de aprendizagem da comunidade escolar. É esse material que servirá de apoio a sua prática de ensino em sala de aula. Portanto, uma escolha inadequada desse livro ou quando mal utilizado pode representar um empecilho em vez de auxiliar o processo de ensino aprendizagem.

Além disso, é importante que o professor tenha em mente consciência da necessidade de adequação do livro didático à realidade do aluno.

4.2 ESTUDO DE CASO NUMA ESCOLA PÚBLICA DE JUAZEIRO – BA.

Além das atividades avaliativas, a turma da 1ª série do ensino médio, foi submetida a dois questionários que foram denominados de questionário **A** e questionário **B** e um pré-teste que teve como objetivo principal mapear o nível de conhecimento e habilidades necessárias ao estudo da função quadrática.

Primeiramente, serão apresentados os resultados do questionário **A** e do pré-teste para em seguida procedermos a análise dos mesmos. A primeira parte do questionário **A** procurou identificar o nível de conhecimentos dos alunos sobre potenciação, radiciação, operações com números racionais e cálculo literal. Já a segunda parte do instrumento buscou informações sobre o desempenho dos alunos na resolução da equação do 2º grau e estratégias utilizadas em estudos anteriores do assunto.

Em seguida, apresentaremos os resultados e análise das atividades propostas aos alunos, que teve como objetivo verificar o nível de assimilação e aprendizagem da função quadrática tendo em vista a abordagem via sua forma canônica; bem como os resultados do questionário **B** que teve o intuito de detectar o grau de aceitação dos alunos em relação ao uso dessa ferramenta. Também serão apresentados os resultados do questionário aplicado a 4 professores de matemática da escola, que versava sobre a relevância atribuída por eles ao uso da forma canônica no ensino da função polinomial do 2º grau.

4.2.1 Questionário A

Na primeira parte do questionário o aluno deveria responder, utilizando uma escala de 0 (zero) a 5, na qual o 0 (zero) indicava NADA e o 5 indicava BASTANTE, como classificaria o seu nível de conhecimento sobre conteúdos de matemática. Os conteúdos e as respostas dos alunos estão expostos no **Quadro 2** que indica o quantitativo de alunos em porcentagem em cada nível da escala em relação a cada conteúdo.

Na segunda parte do questionário **A** o aluno deveria responder a três perguntas, que versavam sobre facilidade de compreensão e desempenho quando do estudo da equação do 2º grau em situações didáticas anteriores.

Quanto à facilidade de compreensão do conteúdo, 25% dos alunos responderam que assimilam melhor através da apresentação de fórmulas prontas, enquanto 70% deles preferiram com a justificativa do porquê das mesmas.

Como resposta a pergunta: “Se você já estudou o assunto equação do 2º grau como foi seu desempenho?”, verificou-se que 50% dos alunos consideram que tiveram um desempenho regular, conforme o gráfico apresentado na **Figura 16.**

Sobre a estratégia utilizada pelo professor para o ensino da equação do 2º grau, 35% responderam que foi por meio da aplicação direta de fórmula, mesmo índice dos que responderam que estudaram o tema via resolução de problemas.

4.2.2 Pré-teste

O pré-teste foi aplicado para um grupo de 20 alunos com o objetivo de avaliar o nível de conhecimento, ou seja, obter dados que nos permitam fazer diagnóstico, identificando quais conceitos matemáticos foram assimilados de forma efetiva em estudos anteriores, detectando as possíveis dificuldades dos alunos, com fim de serem utilizados na construção de estratégias pedagógicas capaz de enfrentá-las e superá-las, levando segurança e habilidades para os mesmos no processo da aprendizagem da função quadrática.

Os exercícios propostos foram elaborados com a finalidade de obter informações que indicassem quais habilidades os alunos já dominavam, quais precisavam ser retomadas ou reforçadas, usando como referência o trabalho que deveria ser desenvolvido. Os principais descritores das questões apresentadas nos exercícios estão apresentados no **Quadro 3** com os respectivos percentuais de acertos.

4.2.3 Análise dos resultados (primeira etapa)

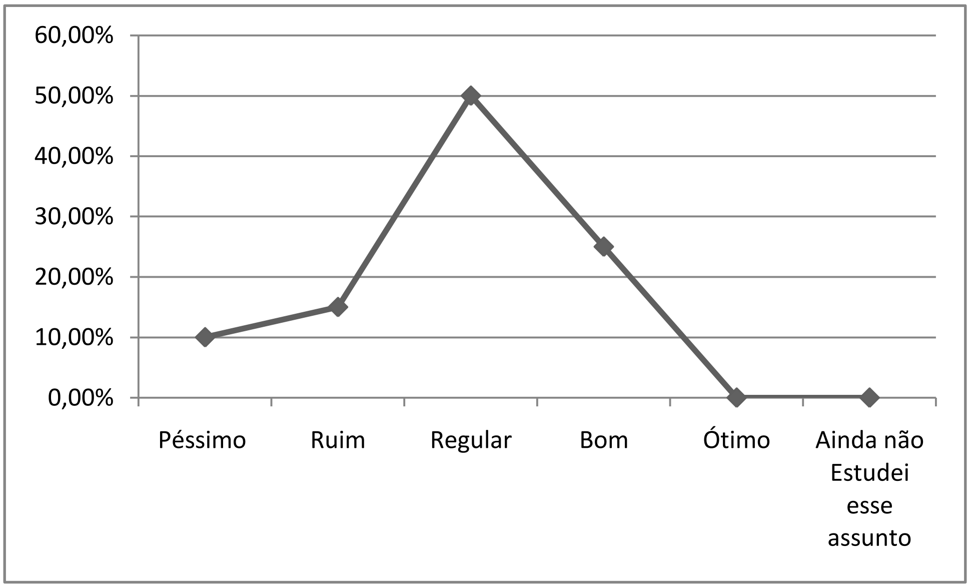
De acordo com os dados expostos no **Quadro 2,** percebe-se que a maioria do universo dos alunos pesquisados, sobre o nível de conhecimento de alguns conteúdos de matemática, apresentam um nível inadequado para o desenvolvimento de conceitos e resolução de atividades no estudo de função quadrática. Por exemplo, temos em média, 66% dos alunos nas faixas de 0 (zero) a 2 que é a faixa na qual os alunos indicam possuir pouco ou nenhum conhecimento em conceitos básicos de matemática, como potenciação, radiciação, números racionais e irracionais, expressões algébricas e produtos notáveis.

Quadro 2 - Nível de conhecimento conteúdos básicos.

	ESCALA					
Conteúdo	0	1	2	3	4	5
Potenciação	20%	15%	20%	25%	15%	5%
Radiciação	15%	40%	25%	5%	10%	5%
Operações com números racionais	10%	25%	30%	20%	5%	10%
Cálculo literal	25%	20%	20%	0	30%	5%

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 16 – Percentual do nível de desempenho no estudo da equação do 2º grau.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por outro lado, contrastando com esse resultado, conforme o gráfico da **Figura 16**, pode-se perceber que a maioria dos alunos afirma ter tido um bom desempenho no estudo da equação do 2º grau. Decorre daí, pelas respostas geradas e observadas em torno do conhecimento, uma situação de conflito entre duas ideias, ou seja, temos uma contradição. De fato, não parece que alunos que não dominam operações matemáticas básicas tenham um bom desempenho no cálculo das soluções de equações quadráticas. Porém de um lado, temos um número elevado de alunos com pouco ou nenhum conhecimento dos conceitos básicos, enquanto de outro um número grande de alunos afirmando que apresentam habilidades na resolução da equação do 2º grau.

Quadro 3 - Descritores dos conteúdos envolvidos nas questões do pré-teste.

Questões	Conteúdos envolvidos	Competências	% Acertos questões
1	Números racionais	Efetuar cálculos com números racionais que envolvam as operações (adição, subtração, multiplicação e divisão)	5%
2 e 3	Potenciação	Efetuar cálculos com números racionais que envolvam as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).	0
4 e 5	Números irracionais	Efetuar cálculo com valores de radicais	10%
6	Produtos notáveis	Identificar e aplicar produtos notáveis: quadrado da soma e quadrado da diferença.	0
7	Expressão algébrica	Identificar e reduzir os termos semelhantes de uma expressão algébrica.	0
8	Equação do 2º grau	Resolver problema que envolva equação do 2º grau	5%

Fonte: Elaborado pelo autor.

No pré-teste, nas questões, das quais alguns alunos até tentaram resolver, não necessariamente correto, chama atenção o percentual de 100% de erros ou ausência de resolução nas questões 2, 3, 6 e 7, visto que os exercícios eram de nível fácil. Este resultado comprovado na aplicação do pré-teste é ratificado por Bossa (2007) na sua tese de doutorado, que averiguou que mais de 70% dos alunos que concluem o ensino fundamental não apresentam as competências mínimas desejadas para essa etapa da educação básica.

Procedendo uma comparação entre os resultados do pré-teste com o resultado do questionário **A**, no qual os alunos indicaram seu desempenho como regular ou bom no estudo da equação do 2º grau, percebe-se que a auto- análise dos mesmos não foi muito precisa.

Percebe-se ainda, nessa comparação, que os alunos não dominam habilidades e conhecimentos básicos, o que sinalizou a necessidade de uma retomados dos conteúdos a partir dos obstáculos encontrados, na busca de corrigir lacunas de aprendizagem. Para UJIIE et al. (2017, p. 62), no campo da educação matemática, os conhecimentos prévios são um dos principais aspectos que devem ser levados em conta no processo educativo, tendo fundamental importância tanto para alunos quanto para professores. Podemos afirmar então, que, o ritmo e a dinâmica de aprendizagem desenvolvida por alunos que apresentam dificuldades em compreender, assimilar, aprender e socializar o conhecimento está associado a estruturas que dão conta de conteúdos anteriores, ou seja, os conhecimentos prévios são um dos principais aspectos que devem ser levados em conta no processo ensino aprendizagem, pois conduz o aluno a acionar os seus conhecimentos sobre determinado assunto e estabelecer relações entre o já conhecido e o novo. Diante disso é importante ressaltar que:

> *O conhecimento prévio é uma variável importante na configuração do processo de ensino e aprendizagem de alunos de quaisquer níveis de ensino, desde que seja tomado como ponto de partida para composição de um diagnóstico da realidade, do que é sabido e do que é necessário saber. Os conhecimentos prévios são molas propulsoras para os planejamentos sistemáticos da ação pedagógica docente tendo em vista aquisição de conhecimentos futuros ou construção de novos conceitos e conhecimentos (UJIIE, 2017, p. 61).*

4.2.4 Função Quadrática por meio da sua Forma Canônica

Nessa seção apresentaremos os resultados e análises das atividades propostas aos alunos para aferir o nível de assimilação da função quadrática após o estudo realizado através da foram canônica. Segundo Gil (2008), dados desse tipo possibilitam o fornecimento de resposta ao problema proposto e podem ser adequadamente analisadas quando são organizadas em categorias. Sendo assim, para análise dos resultados obtidos nas questões das atividades da sequência didática aplicada, utilizaremos quatro categorias baseadas no trabalho de Souza (2016), as quais serão descritas no **Quadro 4**.

Após a sistematização dos conteúdos relacionados a função quadrática e estudados por meio de sua forma canônica em sala de aula, foi aplicado três atividades que teve como finalidade avaliar os seguintes pontos da função quadrática: atividade 1 (coeficiente e valor numérico), atividade 2 (forma canônica) e atividade 3 (translação horizontal e vertical do gráfico). Os descritores das questões constantes nas atividades avaliativas estão apresentados no **Quadro 5**.

Quadro 4 - Categorias para análise das respostas das atividades.

CATEGORIA	COMPOSIÇÃO
1	Alunos que acertaram completamente a questão.
2	Alunos que aplicaram os conceitos corretamente, mas erraram contas ou manipulações algébricas.
3	Alunos que conseguiram utilizar os conceitos, mas os utilizaram de forma errada.
4	Alunos que erraram completamente a questão ou as deixaram em branco.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 5 - Descritores dos conteúdos envolvidos nas atividades avaliativas.

ATIVIDADES	CONTEÚDOS ENVOLVIDOS	COMPETÊNCIAS
1	- Valor numérico. - Coeficientes a, b e c	- Identificar como positivo ou negativo os valores dos coeficientes de uma função quadrática representada através de gráfico. - Calcular o valor numérico de uma função.
2	- Forma algébrica e forma canônica. - Gráficos.	- Modelar uma situação problema através de uma função quadrática. - Resolver problema envolvendo máximo ou mínimo. - Fazer o esboço do gráfico.
3	-Translação horizontal e vertical do gráfico.	Analisar a translação horizontal/vertical de uma função quadrática a partir da sua representação gráfica

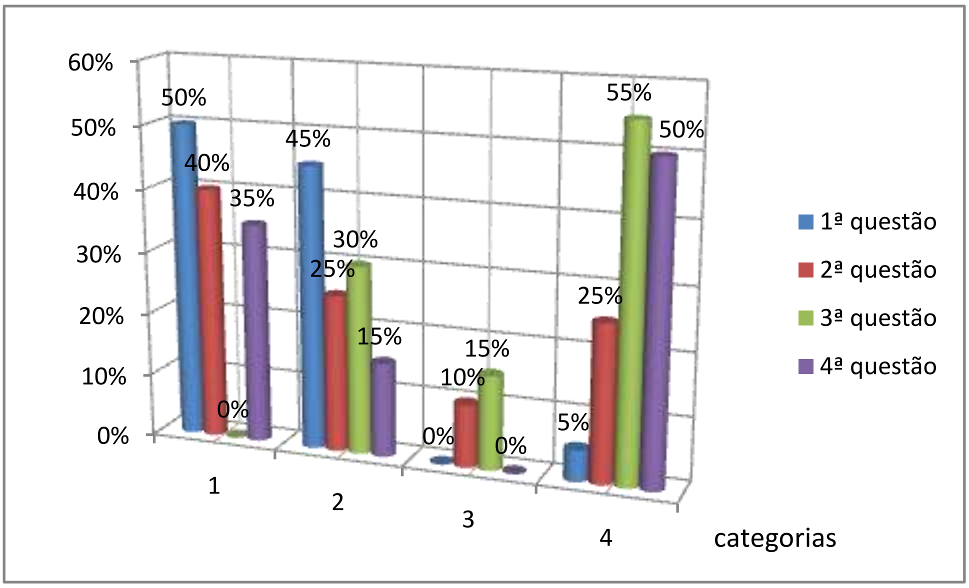
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados da atividade 1 estão apresentado na **Figura 17,** os da atividade 2 na **Figura 18** e os da atividade 3 na **Figura 19.**

4.2.5 Análise dos Resultados (segunda etapa)

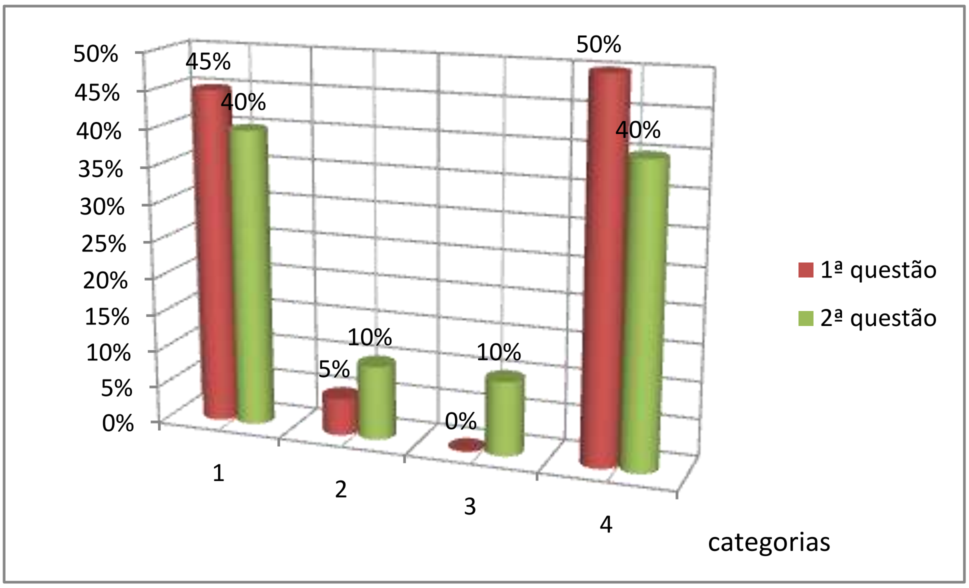
O desempenho dos alunos na 1ª questão da atividade 1, foi de 50% e 45% respectivamente, nas categorias 1 e 2, o que pode ser considerado bom, uma vez que essas são as categorias nas quais os alunos demonstraram ter compreendido a abordagem proposta.

Figura 17 – Resultado das questões da atividade 1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

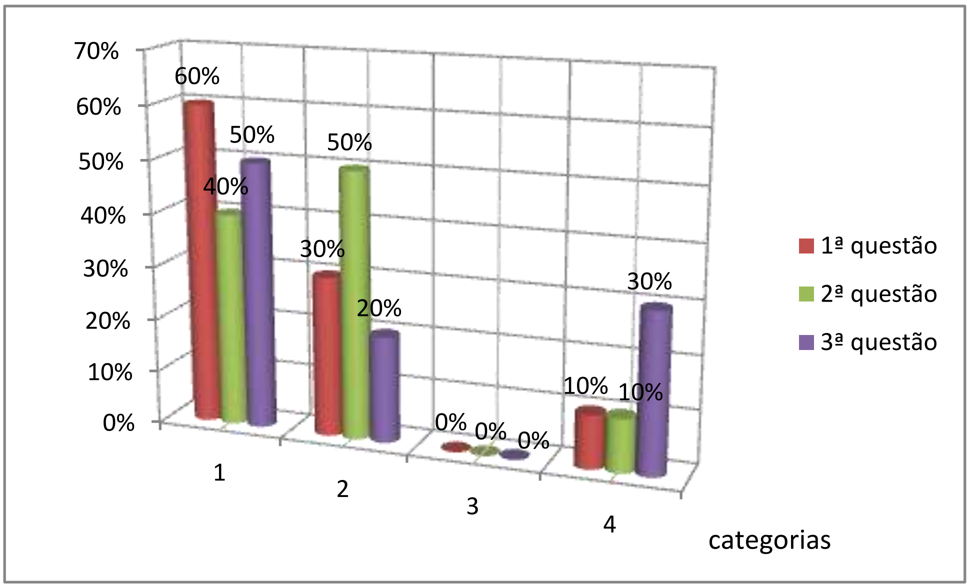
Figura 18 – Resultado das questões da atividade 2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na 2ª questão, o desempenho alcançado também foi satisfatório, pois 65% dos alunos ficaram nas categorias 1 ou 2. Nota-se ainda, que 10% dos alunos conseguiram aplicar os conceitos abordados, porém de forma incorreta, fato que pode ser superado com a apresentação de mais algumas aulas. Devemos observar que na aprendizagem escolar o erro é inevitável e muitas vezes, pode ser um caminho para se buscar o acerto. A esse respeito, Ramos (2017), observa que, a aprendizagem não ocorre apenas quando o aluno chega a um resultado correto. A partir do momento que o mesmo consegue chegar a uma tese, o professor deve ajudá-lo a identificar se a mesma é válida ou não, se sim ótimo, se não, também ótimo, uma vez que, agora o estudo e análise serão sobre o erro que tornou a tese inválida.

Figura 19 – Resultado das questões da atividade 3.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando os resultados da 3ª questão, notamos que os alunos obtiveram um baixo desempenho ficando nas categorias 2 ou 3 com 45%, além de termos um aumento na categoria 4. Nessa questão os alunos demonstraram muita dificuldade em encontrar os valores numéricos da função principalmente nas operações envolvendo radicais e frações.

Ao considerar os resultados da 4ª questão, percebemos que o desempenho foi regular, pois 50% dos alunos ficaram nas categorias 1 ou 2. Constatamos ainda, um aumento significativo no número de alunos que errou ou deixou de responder a questão, aumentando assim o percentual da categoria 4. Tal aumento deve ter ocorrido devido as dificuldades em interpretar a situação problema.

Nos resultados da atividade 2, na **Figura 18**, nota-se que os resultados da 1ª e 2º questão são parecidos, pois o enquadramento das categorias 1 e 2 se dá na faixa dos 50% o que indica um rendimento regular. Nota-se ainda, que o índice de alunos que erraram ou deixaram de responder a questão foi alto. Verificamos nessa atividade que os alunos apresentaram dificuldades no desenvolvimento, em fatorar e completar o trinômio.

De acordo com os dados da atividade 3, exposto na **Figura 19**, percebe-se que houve um aumento significativo, em relação as questões anteriores, no desempenho dos alunos, pois 60% e 20%, respectivamente, ficaram nas categorias 1 ou 2, o que indica um bom desempenho. Nota-se ainda, uma redução considerável no número de alunos que erraram ou deixaram a questão sem responder, fato este, que pode ser explicado pela percepção que o aluno teve em notar que, a mudança na representação algébrica acarreta mudanças na sua representação gráfica e vice-versa.

Analisando os resultados obtidos de acordo com as quatros categorias utilizadas, comparando os mesmos com a defasagem apresentada pelos alunos investigados, que não possuíam o mínimo de pré-requisitos necessário, ou seja, as habilidades mínima, e considerarmos que os resultados obtidos foram satisfatórios, uma vez que, em média, 50% dos alunos conseguiram aplicar corretamente os conceitos, temos um aumento significativo no nível de desempenho dos mesmos. Além disso, os alunos enquadrados na categoria 4 da atividade 2, que na 1ª e 2ª questão alcançou um nível considerável nos resultados, ou seja, desempenho crítico, com conhecimentos abaixo do básico, exigem mais tempo e dedicação do professor e a necessidade de uma abordagem mais ampla (maior número de aulas) do assunto para que aconteça o equilíbrio no nível de conhecimento.

Neste trabalho, optou-se por uma abordagem diferente buscando uma maneira de tornar o ensino da matemática mais significativo. Estudar matemática para muitos tem sido um pesadelo, e até mesmo um critério de inteligência. Carvalho (1982, apud vitti, 1996, p. 34), afirma que “ninguém é considerado mais ou menos inteligente se é bom ou fraco em música, mas se for fraco em matemática é um estigma que pode marcar toda a vida do aluno”. Nesse sentido e a partir da interpretação dos resultados verificamos que essa abordagem possibilitou ao aluno aprofundar os seus conhecimentos o que contribuiu para o aprendizado dos conceitos, melhorando de um modo geral o seu rendimento observados nos resultados apresentados nas atividades propostas.

4.2.6 Questionário B

Após a sistematização dos conteúdos em sala de aula, os alunos foram questionados através de um questionário acerca de como o assunto foi trabalhado, se o uso dessa abordagem facilitou a aprendizagem, o quanto ele aprendeu e quais as maiores dificuldades apresentadas por eles quando do uso da forma canônica no estudo da função quadrática.

No que diz respeito a maneira como o assunto foi abordado em sala de aula pelo professor, os resultados obtidos demostraram que 85% dos alunos investigados revelaram aprovar a metodologia aplicada. Quanto ao processo de abordagem como facilitador de aprendizagem, verificamos que 60% dos alunos atribuíram ao método aplicado o entendimento e assimilação do conteúdo.

Analisando os dados referentes à pergunta, *o quanto você acha que aprendeu com essa abordagem*?, 75% dos alunos afirmaram que a metodologia aplicada ajudou para que assimilassem o conteúdo.

Por fim, com relação às dificuldades encontradas quando do estudo da função quadrática através dessa abordagem, verificamos que 45% e 25%, respectivamente, citaram as operações com frações e completar quadrados como obstáculos na construção da aprendizagem.

4.2.7 Análise dos Resultados (terceira etapa)

Em conformidade com os resultados obtidos, percebemos que a maioria dos alunos aprovou a metodologia aplicada em sala de aula. Além disso, a abordagem realizada para o estudo da função quadrática funcionou como facilitador no processo de aprendizagem dos conhecimentos despertando o interesse do aluno e melhorando o seu desempenho. Notamos ainda, em relação a proposta de ensino utilizada referente ao estudo da função quadrática que as respostas positivas ficaram um pouco acima dos índices obtidos pelos mesmos nas atividades avaliativas,

Por fim, constatamos que os alunos reconhecem como maiores dificuldades no emprego dessa técnica de ensino, as operações com frações e completar quadrados, dificuldades estas que impossibilita para alguns, o emprego e articulação da forma canônica como procedimento de aprendizagem da função quadrática. Todos esses problemas evidenciados indicam a necessidade que o aluno tem que conhecer bem um conteúdo prévio para compreender o posterior. Isso significa que uma etapa que não foi bem aprendida compromete o aprendizado daí por diante, mesmo com mudanças na abordagem como proposta de melhoria na qualidade do ensino.

4.2.8 Questionário do Professor

Um questionário contendo três questões foi aplicado a quatro professores de matemática da escola, com o propósito de entender com que frequência estes fazem uso da forma canônica no ensino da função polinomial do 2º grau, quais as principais dificuldades relacionadas ao uso dessa abordagem e que nível de relevância eles atribuem ao ensino da função quadrática por meio de sua forma canônica.

Ao verificar as respostas dadas, constatou-se que 2 professores responderam que às vezes fazem uso da forma canônica, mesma quantidade dos que responderam que nunca fazem uso destas no ensino da função polinomial do 2º grau. Quanto as principais dificuldades relacionadas ao uso dessa abordagem, 3 professores responderam que os alunos não tem base e 1 professor respondeu que o tema não é abordado nos livros didáticos, o que reforça a estratégia didática adotada pelos livros didáticos analisados, fato esse que pode explicar em parte as dificuldades dos alunos no estudo da matemática, desenvolvida a partir de livros textos baseados em definições, fórmulas e exercícios. De fato, os entraves apresentado pelos alunos na utilização/aplicação dos conceitos básicos na resolução dos problemas propostos detectado no pré-teste, refletem a falta de habilidades e conhecimentos de conceitos básicos de matemática, o que reforça a ideia de um ensino aprendizagem associado às técnicas de memorização. Com relação ao nível de relevância do ensino da função quadrática por meio de sua forma canônica, verificou-se que 2 professores apontaram para alguma relevância (nível 2), 1 professor achou relevante (nível 3) e 1 achou muito relevante (nível 4). Com base nesses resultados percebemos que a maioria dos professores de matemática da escola não aborda em suas aulas o estudo da função quadrática por meio da sua forma canônica, como indicado pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), onde se afirma que o trabalho com a forma fatorada

$(f(x) = a(x - m)^2 + k)$ pode ser um auxílio importante na compreensão do estudo dessa função, evitando-se assim a memorização de regras.

Nos resultados do pré-teste observa-se que, as respostas obtidas estão relacionadas a fatores que influenciam no ensino aprendizagem, ou seja a forma como esses conhecimentos foram adquiridos, o que demonstra um distanciamento entre o que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio propõe e o que ocorre em sala de aula, o que vem corroborar com os resultados apresentados na análise dos livros didáticos, onde, dos cinco livros analisados, apenas duas coleções fez referência a forma canônica da função quadrática, ficando evidente a razão da resistência e a dificuldade dos professores em fazerem uso dessa metodologia no estudo da função quadrática.

Nessa direção, acredita-se que, mais do que opor-se ou apresentar resistência as inovações propostas, é preciso que se estabeleça uma análise, uma reflexão e discussão sobre o tema para que se encontre uma prática pedagógica que valorize muito mais as ideias matemáticas e como estas serão buscadas do que sua sistematização, muitas vezes vazias de significados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou a apresentação de uma abordagem do estudo da função quadrática por meio da sua forma canônica, pensando em estratégias que possibilitassem ao aluno atribuir sentido as ideias matemáticas, tornando-os capazes de estabelecer relações e analisar conceitos em detrimento da memorização de fórmulas. A pesquisa foi aplicada para 20 alunos da 1ª série do ensino médio de uma escola pública do distrito de Juazeiro – BA, que ainda não apresentavam habilidades necessárias para a resolução de uma equação polinomial do 2º grau.

O objetivo da pesquisa foi investigar as contribuições do uso da forma canônica como processo de abordagem de ensino da função quadrática, averiguar a viabilidade dessa metodologia, além de analisar a presença dessa abordagem nos livros didáticos do ensino médio. Por meio da comparação da análise a posteriori, que seguiu a experimentação, com a análise a priori de nossa sequência de atividades, podemos concluir que atingimos nossos objetivos, pois os resultados demonstraram que os participantes aprenderam conceitos importantes do conteúdo da função quadrática através da manipulação da sua forma canônica, estabelecendo relações entre resultados algébricos observados e seus respectivos resultados geométricos, tirando conclusões de como seria o gráfico de uma função quadrática por meio da observação de sua lei de formação.

Em relação as análise dos livros didáticos, conforme propostas dos documentos oficiais, dos cinco autores pesquisados, verificamos que apenas dois deles, fazem referência e apresentam algumas questões envolvendo função quadrática através da sua forma canônica, como é indicado nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2006), apesar de não dar ênfase ao método, privilegiando a fórmula de Bhaskara como técnica de estudo.

Como instrumentos de pesquisa foram utilizados três questionários (questionários A e B aplicados aos alunos e o questionário C aplicado aos professores) e três atividades avaliativas com a finalidade de obter os dados necessários para consolidação da pesquisa. Analisando os dados obtidos com esses instrumentos, foi possível observar que os alunos apresentavam dificuldades em relação a alguns conceitos e procedimentos indispensáveis para o desenvolvimento da metodologia a ser empregada. Percebemos então, a necessidade de se fazer uma intervenção na busca de promover um aprofundamento desses conceitos e procedimentos, uma vez que, um conceito nunca é isolado, mas se integra a um conjunto de outros por meio de relações, das mais simples as mais complexas, com a finalidade de ampliar a sua capacidade de mobilizar esses conhecimentos, facilitando assim o trabalho pedagógico.

Em seguida, foi feita a aplicação de três atividades. Analisando os resultados obtidos, constatamos que o trabalho ampliou o conhecimento dos alunos. Foi observado ainda, melhorias na interpretação das questões e na elaboração de suas respostas, sinalizando melhoras no nível de conhecimento dos alunos em relação aos indicadores das atividades iniciais (pré-testes).

Constatamos assim, que a questão da pesquisa foi respondida de forma afirmativa, ou seja, o método de resolução da função quadrática através da sua forma canônica contribuiu para o processo de ensino aprendizagem desse tema.

Destaca-se aqui, as dificuldades que acompanharam essa pesquisa, tais como, o baixo índice no nível de conhecimento e o desinteresse por parte de alguns alunos pelos estudos, fatores que dificultaram o processo de ensino aprendizagem.

Portanto, em vista dos argumentos apresentados esperamos que essa pesquisa venha contribuir como instrumento de aprendizagem, servindo como recurso didático. Como também, deve-se enfatizar que o objeto de estudo aqui apresentado não é conclusivo e que o mesmo possa servir de estímulo para que outros (autores) interessados venham a se aprofundar nos fundamentos e na análise dessa proposta de trabalho e que continuem o estudo sobre o tema dando ênfase as dificuldades apresentadas.

REFERÊNCIAS

BAHIA. Secretaria da educação. **Orientações Curriculares Para o Ensino Médio:** Matemática. Salvador, 2015. 31p.

BALESTRI, R. **Matemática: Interação e Tecnologia**. V. 1. – 2 Ed. – São Paulo: Leya, 2016. 288p.

BOSSA, N., **Fracasso Escolar** – um sintoma da contemporaneidade revelando a singularidade. Tese de doutorado. Universidade de São Paulo – USP. São Paulo. 2000. Disponível em: <file:///C:/Users/EDSON/Documents/DOUTORADO-UNIVERSIDADE-DE-S%C3%83O-PAULO.doc-tese%20-%20N%C3%A1dia%20Bossa.pdf>. Acesso em: 15/06/2018.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Orientações Curriculares Para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias. Secretaria da Educação Básica. Brasília. 2006. 135p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnologia. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2000. 58p.

CARVALHO, I. M., **Processo Didático**. 4ª ed. Rio de Janeiro: FGV. 1982. 389 p.

DANTE, L. R., **Matemática: Contextos e Aplicações** – 1ª ed., São Paulo: Ática, 2011. 384p.

DANTE, L. R., **Matemática: Contexto e Aplicações: Ensino Médio**. – 3 Ed. – São Paulo: Ática, 2016. 288p.

EUCLIDES. **Os Elementos/Euclides**; tradução e introdução de Irineu Bicudo – São Paulo, Editora UNESP, 2009. 600p.

FRAGOSO, W. C. Uma Abordagem Histórica da Função do 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, nº 43, p. 20, 2000.

GARBI, G. G., **O Romance das Equações Algébricas** – 3 Ed. – São Paulo: Livraria da Física, 2009. 240p.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social** – 6ª Ed – São Paulo: Atlas, 2008. 220p. Disponível em: <https://ayanrafael.files.wordpress.com/2011/08/gil-a-c-mc3a9todos-e-tc3a9cnicas-de-pesquisa-social.pdf >. Acesso em: 03/10/2017. 197p.

GRAVINA, M. A. O Quanto Precisamos de Tabelas na Construção de Gráficos de Funções. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, nº 17, p. 27, 1990.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5ª Ed. – São Paulo: Atlas, 2003. 295p. Disponível em:

<https://docente.ifrn.edu.br/olivianeta/disciplinas/copy_of_historia-i/historia-ii/china-e-india >. Acesso em: 03/10/2017.

LIMA, E. L., A Equação do 2º Grau. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, nº 13, p. 21-33, 1998.

LIMA, E. L. et al**. Exames de Textos**. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2001. 470p. Disponível em: <https://groups.google.com/forum/#!topic/profmat/PRAhpMKU9p0 >. Acesso em: 02/10/2017.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do Ensino Médio**. 9 Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. V 1. 280p.

MAIA, D., **Função Quadrática: Um Estudo Didático de uma Abordagem Computacional**. 2007. 141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- PUC-SP. 2007. Disponível em: <http://livros01.livrosgratis.com.br/cp032202.pdf >. Acesso em: 02/10/2017.

MINAYO, M. C. S. et. Al. **Pesquisa Social** – 21ª ed. – Petrópolis, Editora Vozes, 2002. 80p.

MORENO, A.C. Brasil cai em ranking mundial em ciências, leitura e matemática. **Globo.com online**, São Paulo, 06 Dez. 2016. Disponível em: <https://g1.globo.com/educacao/noticia/brasil-cai-em-ranking-mundial-de-educacao-em-ciencias-leitura-e-matematica.ghtml >. Acesso em: 26/08/2018.

MORGADO, J., **Equação do 2º grau ou equação quadrática:** um pouco da sua história. Centro de Matemática, Cidade do Porto, 1999. Disponível em: <http://www.ipv.pt/millenium/16_ect1.htm>. Acesso em: 05/01/2018.

PASTOS, A. L.P., Equações do 2º grau: completando quadrados. **Revista do professor de matemática**, Rio de Janeiro, nº 6, p. 36, 1985.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Base Curricular Comum Para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco**: Matemática/Secretaria de Educação. – Recife: SE. 2009. 110p.

RAMOS, S. A., **O jogo a caça ao tesouro como recurso didático para o ensino da aritmética modular**. 2017. 123f. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – Profmat) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro – BA, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150150592>. Acesso em: 16/06/2018.

ROONEY, A**. A História da Matemática** – Desde a criação das Pirâmides Até a Exploração do Infinito. São Paulo: M Books do Brasil Editora Ltda, 2012. 216p.

ROQUE, T., **História da Matemática** – uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. – Brasil, Zahar, 2012. 512p.

SOARES, J. H. S., **Função Quadrática**. 2013. 40f. Dissertação (Mestrado profissional em Rede Nacional). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/18654/1/JobsonHSS_DISSERT.pdf >. Acesso em: 01/10/2017.

SOUZA, V. S. **Relações trigonométricas em Triângulos quaisquer com o auxílio de triângulos retângulos**. 2016. 98f. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – Profmat) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro – BA, 2016.

UJIIE, N. T. et al. Alexandria: Revista de educação em ciências e tecnologia. Florianóplis, v. 10, n. 1, p. 57-73, maio 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/1982-5153.2017v10n1p57/34218 >. Acesso em 02/102017.

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Etapa 1

Tema: Forma algébrica da função quadrática

Objetivos:

- Conhecer a forma algébrica da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Reconhecer o gráfico da função quadrática.
- Identificar através do estudo dos parâmetros **a, b** e **c** a relação entre estes e a representação gráfica da parábola.
- Resolver problemas envolvendo função quadrática.

Tempo: três aulas de 50 minutos cada.

Recursos: Folhas de papel, lápis, régua, borracha e livro didático.

Metodologia:

1ª Momento: Nesse primeiro momento, será proposta atividade para identificar os conhecimentos prévios como potenciação, radiciação, operações com números racionais (frações), fatoração e cálculo literal que servirão como pré-requisito para o estudo do tema e, se após a análise dessa atividade, notar que os alunos apresentam dificuldades, fazer uma retomada dos conteúdos.

2ª Momento: Através de uma aula expositiva apresentar uma situação problema cujo modelo matemático para a situação real apresentada seja uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Logo após, generalizá-la, defini-la e mostrar as informações gráficas, que apresentará características diferentes dependendo do valor de cada coeficiente **a, b** e **c.** Após o problema introdutório, apresentar a resolução de problemas propostos, onde o aluno possa verificar as argumentações apresentadas.

Avaliação: Propor aos alunos uma lista de exercícios para que eles possam resolvê-la aplicando os procedimentos identificados nos problemas anteriores.

Bibliografia:

Dante, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações – 3ª Ed. –São Paulo: Ática, 2017.

Etapa 2

Tema: Forma canônica da função quadrática

Objetivos:

- Escrever a forma canônica da função quadrática.

- Analisar o comportamento dos pontos notáveis da função quadrática como: zeros da função, ponto em que a parábola intersecta o eixo vertical, eixo de simetria, como também o vértice da parábola explorando a localização dos valores máximos e mínimos, apresentados entre a forma algébrica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e o seu gráfico e vice-versa.
- Esboçar a partir da forma algébrica da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, fazendo uso dos elementos notáveis, o seu gráfico e vice-versa.

Tempo: Oito aulas de 50 minutos cada.

Recursos: Folhas de papel, lápis, régua, borracha e livro didático.

Metodologia:

1º Momento: Através de uma aula expositiva utilizar a situação problema introdutória e, completando quadrados, escrever a forma canônica da função quadrática. Fazer o esboço do seu gráfico e analisar todos os seus pontos importantes como: zeros da função, ponto em que a parábola intersecta o eixo vertical, eixo de simetria, vértice da parábola explorando os valores de máximo e mínimo.

2º momento: Fazer a demonstração da forma canônica. Logo após, propor outras situações problemas apresentando suas soluções.

Avaliação: Propor aos alunos uma lista de exercícios para que eles possam resolvê-la aplicando os procedimentos identificados nos problemas anteriores.

Bibliografia:

Dante, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações – 3ª Ed. –São Paulo: Ática, 2017.

Etapa 3

Tema: Translação horizontal e vertical do gráfico da função quadrática.

Objetivo: Obter a partir do gráfico mais simples da função quadrática, $f(x) = ax^2$, o gráfico de qualquer função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Tempo: quatro aulas de 50 minutos cada.

Recursos: Folhas de papel, lápis, régua, borracha e livro didático.

Metodologia:

1º Momento: Dividir a turma em duplas, entregar a cada dupla uma atividade impressa em papel e propor a seguinte questão: analise o gráfico da função quadrática na sua forma canônica $f(x)=a(x-m)^2+k$ e determine, depois de compará-los, os movimentos ocorridos em relação ao gráfico da função quadrática mais simples $f(x)=ax^2$. Cada grupo deve apresentar o registro de sua solução justificando suas respostas.

2º momento: Análise e socialização dos procedimentos, para que, no debate, os alunos verifiquem se suas conclusões foram válidas e cheguem a conclusões comuns, bem como percebam que modificações na escrita algébrica da função acarretam mudanças na representação gráfica e vice-versa.

Avaliação: Propor aos alunos uma lista de exercícios para que eles possam resolvê-la aplicando os procedimentos identificados nos problemas anteriores.

Bibliografia:

Dante, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações – 3ª Ed. –São Paulo: Ática, 2017.

APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO A

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF

Mestrando: Edson Binga da Rocha

Orientador: Dr. Lino Marcos da Silva

QUESTIONÁRIO

Este questionário faz parte de uma proposta de investigação referente a minha dissertação de mestrado, no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). O mesmo tem como objetivo a coleta de informações sobre o ensino e a aprendizagem do conteúdo Equações e Funções Polinomial do 2^o grau. Esperamos que os resultados da mesma subsidiem o planejamento de ações e intervenções pedagógicas que possibilitem melhores resultados para o ensino da matemática na Educação Básica. Nesse sentido, a sua colaboração, respondendo este questionário, será de grande valia para o sucesso desta pesquisa. Informamos que suas respostas serão utilizadas exclusivamente para os fins da pesquisa e que os dados do colaborador serão mantidos no mais absoluto sigilo.

Algumas das questões propostas a seguir podem ser marcadas em mais de um item. Marque aquele ou aqueles itens que melhor representem a tua situação.

Parte 1

Numa escala de 0 a 5, na qual o 0 (zero) indica NADA e o 5 indica BASTANTE, como você classifica o seu nível de conhecimento sobre cada uma do seguintes conteúdos de Matemática?

1. **Potenciação.**

(0) (1) (2) (3) (4) (5)

2. **Radiciação.**

(0) (1) (2) (3) (4) (5)

3. **Operações com números racionais (frações).**

(0) (1) (2) (3) (4) (5)

4. **Cálculo literal** (cálculo com letras no lugar de números)**.**

(0) (1) (2) (3) (4) (5)

Parte 2

5. Nas aulas de matemática, você compreende melhor os assuntos de matemática quando o professor apenas apresenta as fórmulas prontas ou quando ele justifica o por quê das mesmas?

( ) Tanto faz.

( ) Fórmulas prontas.

( ) Fórmulas com justificativas

6**.** Se você já estudou o assunto **equação do 2º grau** como foi o seu desempenho no mesmo?

( ) Péssimo.

( ) Ruim.

( ) Regular.

( ) Bom.

( ) Ótimo.

( ) Ainda não estudei esse assunto.

7. Quando do estudo da equação do 2º grau, o processo de ensino foi realizado utilizando-se situações problemas ou aplicações direta de resolução de equações?

( ) Aplicação direta de resolução de equações.

( ) Situações problemas.

( ) Aplicação direta de resolução de equações e situações problemas.

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO B

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF

Mestrando: Edson Binga da Rocha

Orientador: Dr. Lino Marcos da Silva

QUESTIONÁRIO

Algumas das questões propostas a seguir podem ser marcadas em mais de um item. Marque aquele ou aqueles itens que melhor representem a tua situação.

Parte 1

1) Numa escala de 0 a 5, na qual o 0 (zero) indica NÃO GOSTEI DE JEITO NENHUM e o 5 indica GOSTEI MUITO, como você avalia a maneira como o assunto funções quadráticas foi trabalhado em sua sala?

   (0) (1) (2) (3) (4) (5)

Parte 2

2) Você acredita que o estudo da função quadrática através dessa abordagem facilitou a tua aprendizagem do conteúdo?

   ( ) Não facilitou nada.
   ( ) Facilitou um pouco.
   ( ) Facilitou razoavelmente.
   ( ) Facilitou bastante.
   ( ) Facilitou completamente.

Parte 3

3) Numa escala de 0 a 5, na qual 0 (zero) indica 0% e o 5 indica 100%, o quanto você acha que aprendeu do conteúdo com essa nova abordagem?

   (0) (1) (2) (3) (4) (5)

4) Quais as maiores dificuldades encontradas por você no estudo da função quadrática através da forma canônica?

   ( ) Compreensão do processo dedutivo.
   ( ) Problemas envolvendo frações.
   ( ) Completar quadrados.

( ) outros: ____

( ) Não tive dificuldade.

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO PROFESSOR

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF

Mestrando: Edson Binga da Rocha

Orientador: Dr. Lino Marcos da Silva

QUESTIONÁRIO

Este questionário faz parte de uma proposta de investigação referente a minha dissertação de mestrado, no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). O mesmo tem como objetivo a coleta de informações sobre o ensino e a aprendizagem do conteúdo Equações e Funções Polinomial do 2º grau. Esperamos que os resultados da mesma subsidiem o planejamento de ações e intervenções pedagógicas que possibilitem melhores resultados para o ensino da matemática na Educação Básica. Nesse sentido, a sua colaboração, respondendo este questionário, será de grande valia para o sucesso desta pesquisa. Informamos que suas respostas serão utilizadas exclusivamente para os fins da pesquisa e que os dados do colaborador serão mantidos no mais absoluto sigilo.

Algumas das questões propostas a seguir podem ser marcadas em mais de um item. Marque aquele ou aqueles itens que melhor representem a tua situação.

1) No ensino da função polinomial do 2º grau no ensino médio, com que frequência você faz uso da forma canônica?
   ( ) nunca
   ( ) as vezes
   ( ) regularmente
   ( ) sempre
2) Na sua opinião quais as principais dificuldades relacionadas ao uso dessa abordagem?
   ( ) É mais difícil para o professor explicar.
   ( ) É mais difícil para o aluno entender.
   ( ) O tema não é abordado nos livros didáticos
   ( ) Os alunos não tem base.

( ) outros: ____

3) Numa escala de 0 a 5, na qual 0 (zero) indica NENHUMA RELEVÂNCIA e o 5 indica TOTALMENTE RELEVANTE, na sua opinião, qual o nível de relevância do ensino da função quadrática por meio da sua forma canônica para o aprendizado do tema pelo aluno?

(0) (1) (2) (3) (4) (5)

APÊNDICE E – ATIVIDADE AVALIATIVA 1

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

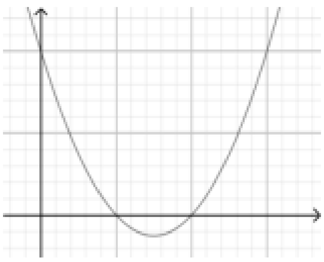
Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF

Mestrando: Edson Binga da Rocha

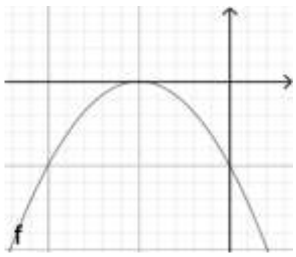
Orientador: Dr. Lino Marcos da Silva

1. Para as funções quadráticas abaixo determine os coeficientes a, b e c.
   a) $f(x) = -2x^2 + 3x - 7$
   b) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 5x$
   c) $f(x) = 0,5x^2 + 0,2x - 1$
   d) $f(x) = 5x^2$
2. Determinar como positivo ou negativo os valores dos coeficientes a, b e c da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ representada nos gráficos abaixo justificando sua resposta.

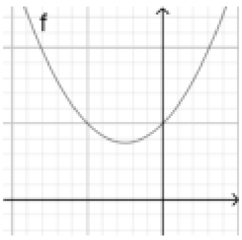
a)



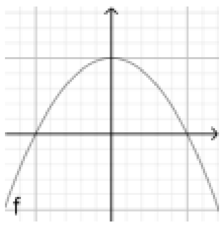
b)



c)



d)



3. Dada a função quadrática $f:\Re \to \Re$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 8$, determine:
   a) $f(1)$
   b) $f(0)$
   c) $f(-2)$
   d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$
   e) $f\left(\sqrt{3}\right)$

4. (PUC-MG-Adaptado) Uma pessoa investiu em papéis de duas empresas no mercado de ações durante 12 meses. O valor das ações da empresa **A** variou de acordo com a função $A(t) = t + 10$, e o valor das ações da empresa **B** obedeceu à função $B(t) = t^2 - 4t + 10$. Nessas duas condições, o tempo t é medido em meses, sendo $t = 0$ o momento da compra das ações. Com base nessas informações, calcule o valor das ações das empresas **A** e **B** após 5 meses da compra.

APÊNDICE F – ATIVIDADE AVALIATIVA 2

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF

Mestrando: Edson Binga da Rocha

Orientador: Dr. Lino Marcos da Silva

1. Marcela pretende construir um cercado em forma de retângulo para o seu cachorro e tem á disposição $16m$ de alambrado. (adaptado, Balestri, 2016).

a) Escreva a função que modela a área $A(x)$ desse retângulo.

b) Escreva a função $A(x)$ obtida no item a) na sua forma canônica.

c) Determine os zeros da função $A(x)$.

d) Determine o ponto em que a parábola intersecta o eixo y.

e) A parábola que representa $A(x)$ possui concavidade voltada para baixo ou para cima? Justifique.

Determine as coordenadas do vértice da parábola que representa $A(x)$.

f) Determine as coordenadas do vértice da parábola que representa $A(x)$.

g) Faça o esboço do gráfico que representa $A(x)$.

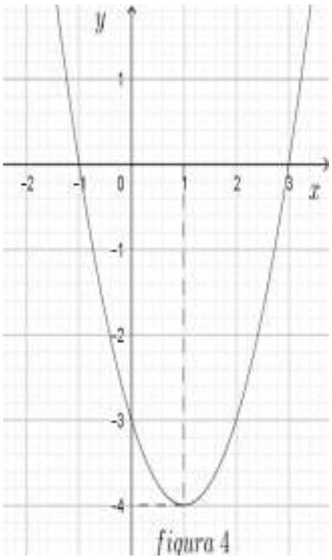
h) Para que valor de x a área $A(x)$ será máxima? Qual é essa área máxima?

i) Existe alguma relação entre as respostas do item h) e a forma canônica da função? Justifique.

j) Quais devem ser as dimensões do retângulo para que sua área seja máxima?

Qual o eixo de simetria da parábola?

Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ correspondente ao gráfico a seguir, determine: (adaptado, Balestri, 2016).



a) Os zeros da função f.
b) O ponto em que a parábola intersecta o eixo y.
c) As coordenadas do vértice da parábola que representa f.
d) A função f na sua forma canônica.
e) A função f na sua forma algébrica $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$.
f) A função f possui valor máximo ou valor mínimo? Qual é esse valor?

APÊNDICE G – ATIVIDADE AVALIATIVA 3

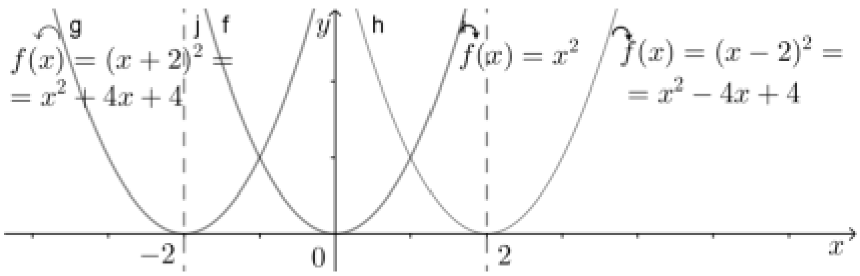
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF

Mestrando: Edson Binga da Rocha

Orientador: Dr. Lino Marcos da Silva

1. Observe os gráficos das funções quadráticas $f(x)=x^2$, $f(x)=(x-2)^2$ e $f(x)=(x+2)^2$ e responda: (Dante, 2016)



a) Como é o gráfico da função $f(x)=(x-2)^2$ em relação ao gráfico de $f(x)=x^2$?

b) E o da função $f(x)=(x+2)^2$ em relação ao gráfico de $f(x)=x^2$?

c) Quais são as coordenadas dos vértices das parábolas $f(x)=x^2$, $f(x)=(x-2)^2$ e $f(x)=(x+2)^2$?

d) E as do vértice da parábola $f(x)=(x+m)^2$? E a parábola $f(x)=(x-m)^2$?