UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

EVERALDO DOS SANTOS GONÇALVES

CONTRIBUIÇÕES DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

JUAZEIRO – BA
2020

EVERALDO DOS SANTOS GONÇALVES

CONTRIBUIÇÕES DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, Campus Juazeiro, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Carlos Antônio Freitas da Silva

Coorientador: Prof. Dr. João Batista Rodrigues da Silva

Juazeiro – BA
2020

G635c

Gonçalves, Everaldo dos Santos

Contribuições de uma sequência didática com resolução de problemas de análise combinatória/ Everaldo dos Santos Gonçalves. -- Juazeiro - BA, 2020

xv, 129 f. : il. ; 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF, Campus Juazeiro – BA, 2020.

Orientador: Prof. Msc. Carlos Antônio Freitas da Silva
Coorientador: Prof. Dr. João Batista Rodrigues da Silva

1. Matemática - Ensino. 2. Análise Combinatória. 3. Resolução de Problemas. 4. Sequência Didática. I. Título. II. Silva, Carlos Antônio Freitas da. III. Silva, João Batista Rodrigues da. IV. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510.07

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Renato Marques Alves – CRB 5 - 1458.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

Everaldo dos Santos Gonçalves

CONTRIBUIÇÕES DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Aprovada em: 06 de novembro de 2020.

Banca Examinadora

Prof. Msc. Carlos Antônio Freitas da Silva, PROFMAT/UNIVASF

João Batista Rodrigues da Silva

Prof. Dr. João Batista Rodrigues da Silva, DEPEN/IFBA

Lino Marcos da Silva

Prof. Dr. Lino Marcos da Silva, PROFMAT/UNIVASF

Aníbal Livramento da Silva Netto

Prof. Dr. Aníbal Livramento da Silva Netto, Cenmec/UNIVASF

***Dedico essa conquista** à minha amada esposa, Vilma Ventura Viana Gonçalves, pelo amor, pelo incentivo e por não medir esforços para me ajudar no que fosse necessário. Aos meus queridos filhos Pedro Giovanni, Marcus Vinnícius, Lucas Emannuel e Maria Giovanna, pelo amor e compreensão nos momentos em que, mesmo estando juntos, não pude dar a devida atenção. Com grande júbilo, partilho com vocês o mérito desse sonho realizado.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por tudo. Principalmente pelo dom da vida, pela constante presença e por ter permitido a realização desse sonho.

À minha esposa e meus filhos por todo apoio e por existirem em minha vida.

À minha mãe Neusa Maria dos Santos Gonçalves, pelo amor e por colocar a educação como algo essencial na minha vida.

Aos meus familiares por toda força e por sempre torcerem pelo meu sucesso.

Aos meus irmãos na fé e amigos por contribuírem, acreditando na realização desse sonho e entendendo minhas ausências.

Aos alunos que aceitaram participar desse estudo, por todo comprometimento e esforço em buscar algo mais a nível de conhecimento.

Aos professores do PROFMAT/UNIVASF, por compartilharem seus conhecimentos e experiências, contribuindo para meu crescimento pessoal e profissional.

Aos meus colegas de turma, em especial Alice Valéria (in memoriam), Carla Saturnina, Edilson Franco (in memoriam), Jurandir Lopes, Manoel Pereira, Paulo Soares e Reginildo Coelho, pela amizade, momentos de estudos, partilha de conhecimento e de experiências.

A SBM e a CAPES[1], pela iniciativa em desenvolver esse projeto, que tanto nos proporcionou aprofundamento de conhecimento e troca de experiências que contribuirão significativamente no processo de ensino da Matemática. E também pelas contribuições financeiras que possibilitou o custeamento de diversas despesas.

Em especial, agradeço ao meu orientador, o professor mestre Carlos Antônio F. da Silva e ao coorientador, o professor doutor João Batista R. da Silva, pelas valiosas contribuições, confiança, incentivos, ensinamentos e lições de comprometimento.

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de financiamento 001.

É graça divina começar bem. Graça maior persistir na caminhada certa. Mas graça das graças é não desistir nunca.

Dom Hélder Câmara

RESUMO

Esta dissertação apresenta um estudo referente às contribuições de uma sequência didática com resolução de problemas de análise combinatória. O estudo está fundamentado nos pressupostos de Polya (2006), que indicam a arte de resolver problemas por meio da compreensão do problema, elaboração e execução do plano além do retrospecto, como também, está apoiado nas concepções de Zabala (1998) – que aborda a sequência didática como conjunto de atividades estruturadas. A motivação do estudo parte da experiência do professor da Educação Básica em que ficou perceptível a memorização de fórmulas pelos estudantes como um meio para a resolução de problemas. Deste modo, indicou-se como questão de investigação: como uma sequência didática envolvendo resolução de problemas pode contribuir para a aprendizagem dos princípios básicos de análise combinatória? Delineou-se, como objetivo geral, propor uma sequência didática que auxiliasse na aprendizagem de alguns tópicos de Análise Combinatória através da resolução de problemas. Como objetivos específicos fixou-se: identificar algumas dificuldades de aprendizagem, através da resolução de problemas com contagem; elaborar e aplicar uma sequência didática envolvendo resolução de problemas com contagem e analisar as contribuições da sequência didática na aprendizagem de Análise Combinatória, por meio da resolução de problemas. Para solucionar a questão de investigação, utilizou-se a abordagem qualitativa apresentada por Gerhardt e Silveira (2009) por preocupar-se com fatos da realidade que não podem ser quantificados e na fenomenologia abordada por Bicudo (2010), que busca compreender o fenômeno afeto ao objeto de estudo. Contudo, participaram da coleta de dados,15 alunos da terceira série do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia – IFBA, campus Juazeiro. Para a coleta de dados, utilizaram-se os instrumentos: anotações do diálogo com os alunos nos encontros, formulário de um questionário informativo e um questionário diagnóstico, além das atividades da sequência didática, que foram elaboradas e aplicadas. Os resultados encontrados demonstraram que a Sequência Didática contribuiu para a aprendizagem dos princípios básicos de Análise Combinatória e para reflexões a respeito das dificuldades ou particularidades destacadas no percurso de sua aplicação. Entre os resultados, pode-se apontar: A superação da rejeição por alguns alunos em relação à metodologia aplicada, apresentação de um problema gerador antes da formalização do conceito; o entendimento de como elaborar e executar um plano; avanços na compreensão de como e quando aplicar o Princípio Fundamental da Contagem; Identificação das diferenças entre os conceitos vivenciados; melhora na leitura e interpretação do enunciado de problemas propostos; entre outros. O planejamento e a vivência da sequência didática favoreceram a promoção do conhecimento matemático e a compreensão dos conteúdos abordados. Espera-se que essa pesquisa possa contribuir com outras futuras investigações acerca do ensino e aprendizagem de análise combinatória.

Palavras-chave: Sequência Didática. Resolução de Problemas. Análise Combinatória. Ensino e Aprendizagem.

ABSTRACT

This dissertation presents a study referring to the contributions of a didactic sequence with solving combinatorial analysis problems. The study is based on the assumptions of Polya (2006) that indicate the art of solving problems through the understanding of the problem, elaboration and execution of the plan beyond the retrospective, as well as, it is supported by the conception of Zabala (1998) that addresses the sequence teaching as a set of structured activities. Such theorists contributed to the elaboration and application of the didactic sequence. Thus, the motivation of the study starts from the experience as a teacher of Basic Education in which it was noticeable the memorization of formulas by the students as a means to solve problems. Thus, a research question raises, how can a didactic sequence involving problem solving contribute to learning the basic principles of combinatorial analysis? The study outlined as a general objective: to propose a didactic sequence that would assist in learning some topics of Combinatory Analysis, through problem solving. And as specific objectives: to identify some learning difficulties, by solving problems with counting; elaborate and apply a didactic sequence involving problem solving with counting and analyze the contributions of the didactic sequence in learning Combinatory Analysis, through problem solving. To solve the investigation question the qualitative approach, presented by Gerhardt and Silveira (2009), was used because it is concerned with facts of reality that cannot be quantified and in the phenomenology approached by Bicudo (2010) that seeks to understand the phenomenon that involves the object of study. In this study, 15 students from third grade of High School of Federal Institute of Education, Science and Technology of Bahia – IFBA, Juazeiro campus, participated in the data collection. For data collection, the following instruments were used, notes of the dialogue with students at the meetings, questionnaire form and a diagnostic questionnaire, in addition to the activities of the didactic sequence that were developed and applied. The results demonstrated that the Didactic Sequence contributed to the learning of the basic principles of Combinatory Analysis and to reflections on the difficulties or particularities highlighted in the course of its application. Among the results, we can point out: Overcoming the rejection by some students in relation to the applied methodology; presenting a generating problem before formalizing the concept; understanding how to design and execute a plan; advances in understanding how and when to apply the Fundamental Principle of Counting; Identification of the differences between the concepts experienced; improvement in the reading and interpretation of the statement of proposed problems; among others. The planning and experience of the didactic sequence favored the promotion of mathematical knowledge and the understanding of the contents covered. It is expected that this research can contribute to other future investigations on the teaching and learning of combinatorial analysis.

Keywords: Didactic Sequence. Problem Solving. Combinatorial Analysis. Teaching and Learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AC	Análise Combinatória
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DCM	Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica
IFBA	Instituto Federal da Bahia
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PFC	Princípio Fundamental da Contagem
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes.
RP	Resolução de Problema
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
SD	Sequência Didática
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem de matemática tem sido preocupação de alguns pesquisadores, como também tem ganhado destaque nos cenários nacional e internacional por apresentar índices de baixo rendimento, como os apresentados no Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB[2] e no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – PISA[3].

Segundo Moreno e Oliveira (2019), o Brasil não conseguiu registrar avanços significativos no desempenho dos alunos em matemática na última edição do PISA em 2018, ficando no 70º lugar de 80 países avaliados. Na realidade, o resultado decresceu, comparando-se com a edição anterior, realizada em 2015, em que o Brasil ocupou a 65ª posição de 70 países analisados. Fundamentado nos resultados desde 2009, as autoras mencionadas, apontam que a média dos alunos brasileiros nesse componente curricular parece flutuar em torno de uma tendência horizontal, considerando estacionado na última década.

Estudiosos como Trevizan e Brolezzi (2016) apontam que existem fatores metodológicos que não contribuem para uma aprendizagem significativa dos conteúdos que envolvem a matemática, a exemplo da Análise Combinatória (AC) no Ensino Médio, pois apresenta muitos obstáculos para o professor ensinar e para o aluno aprender. Isto é assim porque o ensino dos conceitos de AC é abordado de forma não reflexiva, de modo que não proporciona, ao aluno, empreender uma análise crítica acerca dos problemas e, como consequência, os alunos recorrem ao uso excessivo de fórmulas por julgarem tratar-se de caminho mais adequado para solucionar os problemas.

Nesse mesmo panorama, enquanto pesquisador que leciona há mais de duas décadas, em turmas do Ensino Médio na rede pública e particular de ensino, foi possível perceber alguns problemas gerados no processo de ensino e aprendizagem de AC. Também, em conversa com alguns colegas de profissão,

---

[2] O SAEB é um sistema nacional de avaliação, realizado de dois em dois anos, composto por três avaliações que tem como principal finalidade analisar a Educação Básica brasileira.

[3] O PISA é um sistema internacional de avaliação, realizado de três em três anos com alunos de 15 anos de idade de diversos países, que tem como principal objetivo produzir indicadores que contribuam, dentro e fora dos países participantes.

ainda hoje é perceptível o ensino de AC, em muitas instituições, pautada simplesmente na memorização de fórmulas, algoritmos e no uso de sequências de instruções bem definidas, que podem ser desenvolvidas mecanicamente.

Nessa perspectiva, buscou-se, com este trabalho, justificar a importância do ensino de AC pautado nas contribuições de uma sequência didática envolvendo a metodologia de ensino através da resolução de problemas, utilizando os quatro passos propostos por George Polya em seu livro “A Arte de Resolver Problemas”.

A partir desta perspectiva, indaga-se: como uma sequência didática, envolvendo resolução de problemas pode contribuir para a aprendizagem da Análise Combinatória?

Então, o objetivo geral da presente pesquisa é propor uma sequência didática que auxilie na aprendizagem de alguns tópicos de AC através da resolução de problemas.

Para tanto, foram delineados os seguintes objetivos específicos: Identificar algumas dificuldades de aprendizagem, através da resolução de problemas com contagem; elaborar e aplicar uma sequência didática, envolvendo resolução de problemas, a partir do que se possa contribuir para a aprendizagem dos alunos e analisar as contribuições da sequência didática na aprendizagem de Análise Combinatória por meio da resolução de problemas.

Parte-se da hipótese de que utilizar uma sequência didática, envolvendo resolução de problemas, no ensino de Análise Combinatória, contribui para que os alunos se apropriem dos conceitos básicos de AC e possibilita uma aprendizagem significativa. Sendo assim, para viabilizar o teste da hipótese, realiza-se uma pesquisa de finalidade básica estratégica, objetivos descritivo e exploratório, à sombra do método hipotético-dedutivo, com abordagem qualitativa e realizada com procedimentos bibliográficos e pesquisa-ação.”

Esta pesquisa está estruturada da seguinte forma:

O primeiro capítulo, designado como Introdução, apresenta o planejamento e a delimitação do problema; os objetivos delineados (geral e específicos); justificativa; a hipótese; a pesquisa genérica.

O segundo capítulo, Fundamentação teórica, traz o embasamento teórico no qual se fundamenta a pesquisa, dividida em cinco partes: estudo dos conceitos e princípios básicos de Análise Combinatória; apontamentos sobre dificuldades na aprendizagem em Análise Combinatória; a Análise Combinatória em documentos norteadores da educação básica; a Resolução de Problemas no processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos, finalizando com o estudo de Sequência Didática e de algumas pesquisas sobre o processo de ensino e aprendizagem através de uma Sequência Didática com Resolução de Problemas.

O terceiro capítulo, Metodologia, traz uma proposta metodológica para se trabalhar uma Sequência Didática com Resolução de Problemas de Análise Combinatória no Ensino Médio, assim como: caracterização do estudo; espaço da pesquisa; público participante; técnicas e instrumentos de coleta de dados (a observação, questionário informativo, questionário diagnóstico) e técnicas de processamento e análise de dados.

O quarto capítulo, Resultado e discussão, apresenta a descrição e análise dos questionários; resultados e discussões das etapas da Sequência Didática, sua estrutura e demais especificações. O quinto capítulo traz as considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentam-se conceitos e princípios básicos de análise combinatória, apontando dificuldades na aprendizagem em análise combinatória, análise combinatória em documentos norteadores da educação básica, resolução de problemas e sequência didática.

2.1 Conceitos e princípios básicos de análise combinatória

A relevância da compreensão do conceito da Análise Combinatória na Educação Matemática é um ponto bem sinalizado pelos pesquisadores, devido as suas valiosas contribuições em diversas áreas do conhecimento, importantes para o progresso da sociedade, como na Estatística e Probabilidade. Possui, também, aplicabilidade em outras áreas do conhecimento, notadamente: Química, Biologia, Informática, Engenharia e Física, entre outras.

Diferentes pesquisadores, entre eles Morgado et al (2006), Souza (2010) e Barroso (2010), destacam, em seus estudos, a necessidade do entendimento do conceito da Análise Combinatória.

Buscando a compreensão do conceito de AC, Morgado et al (2006), menciona que muitos alunos a definiriam como o estudo das combinações, dos arranjos e permutações. Para os autores citados anteriormente, essa definição é parcial, visto que a AC trata de muitos outros tipos de problemas e dispõe, além de permutações, arranjos e combinações, de outras técnicas. Eles apontam a AC, como o ramo da Matemática que investiga estruturas e relações discretas.

De forma análoga, pondera Souza (2010), ao afirmar que a AC está relacionada também com outros processos além da arte de contar e de explorar os conceitos de combinação, de arranjo e de permutação, em que o domínio desses tópicos contribui, de forma significativa, para a resolução de problemas de contagem envolvendo subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja preciso enumerar seus elementos.

Para a autora supracitada, a definição anterior é parcial, haja vista que, em seus estudos, ela aponta que existem outros tipos de problemas (tópicos), e que a AC possui outras técnicas de resoluções. Como exemplo desses tópicos, tem-se: o princípio da inclusão-exclusão; o princípio das gavetas de Dirichlet; as funções geradoras; e a teoria de Ramsey. Esses tópicos enumerados têm sua importância, mas não serão objeto de estudos nesta pesquisa.

Diante do exposto, fica perceptível que a definição de AC é bem mais ampla do que contar e estudar as combinações, arranjos e permutações. Esses tópicos são conceitos elementares da AC. Eles constituem tipos relevantes de problemas combinatórios, mas é perceptível que representam somente uma parte desses problemas. Porém, a parte que eles compõem é, sem dúvida, a mais simples e mais usual da AC.

Sabe-se que a AC faz investigação das possibilidades e das combinações possíveis entre os elementos de um conjunto. Seu ensino é privilegiado por consentir a resolução de uma grande variedade de problemas e por sua aplicabilidade em diversos problemas de probabilidades finitas.

Nessa pesquisa, o conceito de Análise Combinatória será tratado como sendo um conjunto de possibilidades construído por elementos finitos, baseando-se em critérios que permitam a contagem tomando, como referência, o conceito de Princípio Multiplicativo. No que se refere ao uso das fórmulas e do formalismo presentes no ensino de AC, Sturm (1999) recomenda que:

> [...] o ensino de Análise Combinatória deve se dar através de situações-problema. As fórmulas devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução de problemas, devem ser construídas e não ser o elemento de partida para o ensino de cada tema: Arranjo, Permutação e Combinação. (p. 03)

Na citação acima, o autor parte do pressuposto de que o estudo da AC tem como centro a exploração de situações problemas, situações essas que podem ocorrer no cotidiano dos alunos. Empenhando nessa perspectiva, o aluno estará sendo estimulado a raciocinar, preocupando-se com a interpretação da situação problema proposta, o que é relevante no campo de estudo da AC. Santos (2013), percebe como fundamental habituar o aluno a fazer uma análise cuidadosa de cada problema, procurando resolvê-lo com concentração, pensando e posteriormente agindo, tomando sempre uma sequência de decisões mais simples.

Fundamentado nas abordagens citadas, percebe-se que não há proibição em se usar fórmulas diante de situações-problemas em Análise Combinatória. Porém, nessa pesquisa se propõe a construção de significados, por meio da descoberta. Como bem mencionou Sturm (1999, p. 03), “[...] as fórmulas devem aparecer em decorrências das experiências dos alunos na resolução de problemas”.

A seguir, serão apresentados alguns conceitos básicos de Análise Combinatória que serão vivenciados no percurso da Sequência Didática.

2.1.1 Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

De acordo com Chavante (2016, p. 44), “Se há **x** opções de escolha para realizar $\mathbf{A_1}$, e realizado $\mathbf{A_1}$, **y** opções de escolha para realizar $\mathbf{A_2}$, qualquer que tenha sido a primeira escolha, então há **x.y** modos de se realizar sucessivamente $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$”.

Ainda segundo o autor supracitado, o Princípio Fundamental da Contagem vale para mais de duas decisões. A forma generalizada desse princípio é a seguinte: Se as decisões $\mathbf{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k}$ podem apresentar $\mathbf{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k}$ resultados diferentes, respectivamente, então a quantidade de resultados diferentes que a decisão composta de $\mathbf{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k}$ pode apresentar, nessa ordem, é dado pelo produto:

$$\mathbf{x_1 . x_2 . x_3 . \ldots . x_k.}$$

Com o Princípio Fundamental da Contagem, podem-se apresentar ferramentas básicas que possibilitem encontrar o número de elementos de conjuntos formados segundo algumas regras, sem que seja necessário enumerar seus elementos. Como ilustração da definição de PFC, tem-se o exemplo a seguir:

Exemplo 1. Vilma vai se vestir para uma festa de formatura com uma blusa e uma calça. Ao abrir seu guarda-roupa, Figura 01, ela ficou em dúvidas, quanto ao que vestir, entre duas blusas (uma branca e uma laranja) e três calças (uma verde, uma preta e uma azul). De quantas maneiras diferentes Vilma pode se vestir com as peças citadas?

Figura 01: Imagem da escolha de uma blusa e uma calça (PFC)

Fonte: GUARDA roupas... (2020, online)https://www.altoastral.com.br/10-dicas-look/

Perceba que a primeira decisão, escolha da blusa, pode ser tomada de duas maneiras, enquanto a segunda decisão, escolha da calça, pode ser tomada de três maneiras. Buscando encontrar a solução, pela enumeração dos elementos, no Quadro 01, tem-se como resposta:

Quadro 01: Resposta do exemplo de PFC (por enumeração)

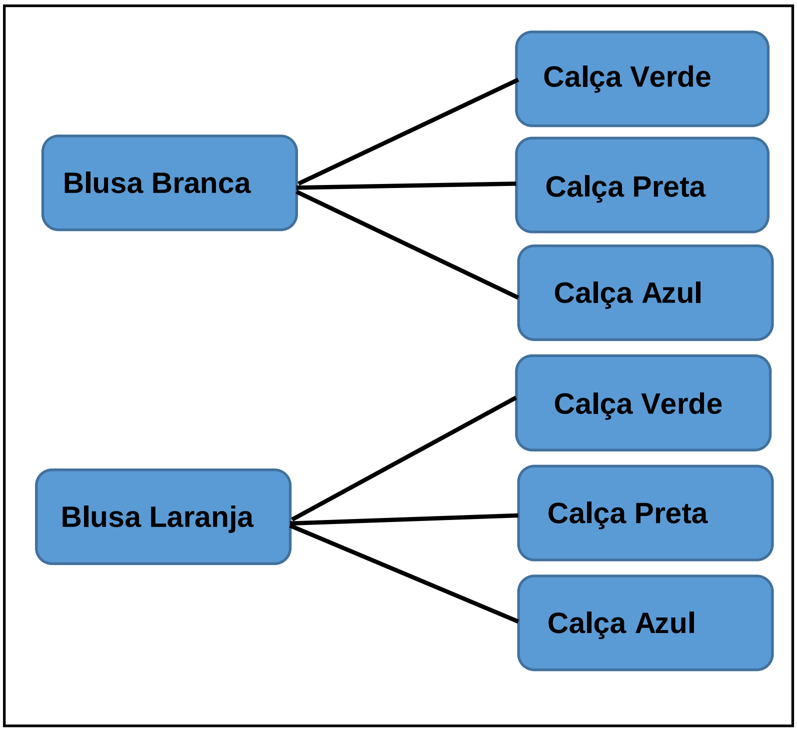
Blusa branca e calça verde	Blusa laranja e calça verde
Blusa branca e calça preta	Blusa laranja e calça preta
Blusa branca e calça azul	Blusa laranja e calça azul

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Outra maneira de encontrar a solução para esse problema é utilizando a árvore de possibilidades[4], conforme Figura 02.

[4] Segundo Smole (2010), a árvore de possibilidades é um tipo de diagrama que auxilia no levantamento das possibilidades de uma dada situação.

Figura 02 - Árvore de possibilidades do exemplo de PFC



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Uma terceira maneira de encontrar a solução para esse problema é utilizando uma tabela de dupla entrada, Quadro 02, com todas possibilidades de compor cada conjunto de roupas.

Quadro 02: Resposta do exemplo de PFC (tabela de dupla entrada)

	Calça azul (A)	Calça preta (P)	Calça verde (V)
Blusa branca (B)	(B, A)	(B, P)	(B, V)
Blusa laranja (L)	(L, A)	(L, P)	(L, V)

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Aplicando o princípio multiplicativo, o número de maneiras diferentes que Vilma pode se vestir, pode ser dado por:

$$\frac{2\text{ possibilidades}}{\text{blusas}} \text{x} \frac{3\text{ possibilidades}}{\text{calças}} = 6\ maneiras$$

Assim, Vilma tem, no total, 6 combinações diferentes de compor um conjunto com as peças citadas.

Alguns problemas podem ser resolvidos pela enumeração de seus casos possíveis ou pela construção da árvore de possibilidades. Contudo, esses métodos tornam-se inviáveis em muitos momentos, entretanto, e isso acontece devido ao grande número de casos que podem surgir; sendo assim, deve-se deduzir de forma satisfatória, junto aos alunos, algumas regras para a obtenção dos possíveis resultados. Como exemplo de aplicação, tem-se,

Exemplo 2. Quantos números de três algarismos diferentes ou não, podem ser formados com os algarismos 2, 4, 6, 7 e 8?

O número formado terá três ordens que serão: centena simples; dezena simples e unidade simples. Representa-se um número de três algarismos, arbitrário, pelos três quadros seguintes:

O primeiro número que ocupará a casa das centenas (C), pode ser escolhido de 5 maneiras diferentes; em seguida o segundo número que ocupará a casa das dezenas (D), pode ser escolhido também de 5 maneiras diferentes e, por último, o terceiro número que ocupará a casa das unidades (U), pode ser escolhido de 5 maneiras, como os demais. Assim tem-se:

5	5	5
C	D	U

Isto posto, pelo Princípio Multiplicativo, existem $5.5.5 = 125$ possíveis números de três algarismos (distintos ou não), formados com os cinco algarismos dados.

2.1.2 Fatorial de um Número Natural

No estudo de Análise Combinatória, é muito frequente a multiplicação de números naturais consecutivos, algumas dessas multiplicações envolvem muitos fatores. Toma-se, como exemplo, a quantidade de números naturais de 5 algarismos distintos que podem ser formados com os 5 algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 é dado por:

$$\mathbf{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1.}$$

Para simplificar as operações com expressões semelhantes a essa, adota-se o símbolo $n!$ (lê-se: “n fatorial”), que indica a multiplicação dos números naturais consecutivos $n, n-1, n-2, n-3, \dots, 1$, com $n \geq 2$. No exemplo anterior tem-se:

$$\mathbf{5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120}.$$

Na busca pela definição de fatorial, Ribeiro (2011, p. 194) faz a seguinte colocação: “Dado um número natural n, com $n > 1$, definimos seu fatorial, indicado por n!, como o produto dos n números naturais consecutivos de n até 1. Utilizando símbolos temos: $n! = n.(n-1).(n-2).....3.2.1$”. Ele também lembra que por definição 1! = 1 e 0! = 1.

O conceito de fatorial é muito utilizado no estudo de arranjos e permutações, a fim de simplificar os cálculos. Como exemplo prático, tem-se,

Exemplo 3. Anagramas são rearranjos de uma palavra, tendo sentido ou não. De posse dessas informações, encontre o número de anagramas das palavras LER e ESCOLA.

Como LER possui três letras distintas, encontra-se o total de anagramas rearranjando as letras, por enumeração esse caso torna-se simples, a resposta será:

LER, LRE, REL, RLE, ERL, ELR.

Aplicando o conceito de fatorial, procede-se da seguinte maneira: escolhe a primeira letra que pode ser qualquer uma das três, na segunda escolha restam duas letras e na terceira escolha apenas uma, visto que a cada escolha diminui uma letra. Logo tem-se:

$$N! = 3! = 3.2.1 = 6 \; anagramas.$$

Para a palavra ESCOLA, o número de anagramas será dado por:

$$N! = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720 \; anagramas.$$

Como mencionou-se anteriormente, a definição de fatorial é utilizada em AC a fim de simplificar cálculos. No exemplo 3, percebe-se que fica impraticável encontrar por enumeração o número de anagramas da palavra escola, pois é grande; logo, em situações similares, a aplicação do conceito de fatorial se torna extremamente viável.

2.1.3 Arranjo Simples

De acordo com Paiva (2010, p. 318), “Arranjos são agrupamentos em que se considera a ordem dos elementos, isto é, qualquer mudança na ordem dos elementos altera o agrupamento”.

Toma-se como modelo de aplicação a seguinte situação,

Exemplo 4. Encontre os elementos do conjunto E = {a, b, c, d}, onde se encontram todas as sequências possíveis de dois elementos distintos que podem ser formadas.

(a, b)	(a, c)	(a, d)
(b, c)	(b, d)	(c, d)
(b, a)	(c, a)	(d, a)
(c, b)	(d, b)	(d, c)

Diante dos agrupamentos formados, percebe-se que dois arranjos simples quaisquer se diferenciam pela ordem dos elementos ou pela natureza dos elementos que o compõem:

- (a, b) ≠ (b, a), pois diferem pela ordem dos elementos;
- (b, c) ≠ (b,d), pois diferem pela natureza dos elementos (elementos diferentes)

Contando o número de sequências formadas, no exemplo 4, constata-se que o número de arranjos simples dos quatro elementos de **E** tomados dois a dois é **12**. Esse número pode ser calculado pelo Princípio Fundamental da Contagem:

$$\frac{4\ \text{possibilidades}}{1^{\text{o}}\ \text{elemento}} \text{x} \frac{3\ \text{possibilidades}}{2^{\text{o}}\ \text{elemento}}$$

Logo, o total de possibilidades será dado por: $4\,.\,3 = 12$.

Para Leonardo (2016, p. 209), “Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjo simples dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento ordenado (sequência) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis”.

Nessas condições, o primeiro elemento pode ser escolhido de n maneiras diferentes; depois o segundo elemento pode ser escolhido de $n-1$ maneiras; em seguida, o terceiro pode ser escolhido de $n-2$ maneiras; dando-se continuidade à sequência, o último elemento pode ser escolhido de:

$$n-(p-1) = n-p+1 maneiras\ distintas.$$

A notação para o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por **$A_{n,p}$**. Portanto:

$$A_{n,p} = n.(n-1).(n-2)._{\dots}.(n-p+1).$$

Buscando deduzir a fórmula para os arranjos simples, multiplica-se ambos os membros dessa relação por:

$$(n-p)! = (n-p)(n-p-1)._{\dots}.3.2.1.$$

Tem-se:

$$(n-p)!\ .\ A_{n,p} = n.(n-1)(n-2)._{\dots}.(n-p+1).(n-p).(n-p-1)._{\dots}.3.2.1.$$

De forma mais simples:

$$(n-p)!\ .\ A_{n,p} = n!$$

Logo:

$$\boldsymbol{A_{n,p}} = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{com n} \in \text{IN, p} \in \text{IN e } 0 < p < n.$$

Aplicando a fórmula dos arranjos simples no exemplo 4, tem-se:

$$A_{n,p} = A_{4,2} = \frac{\mathrm{n!}}{(\mathrm{n-p})!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12 \text{ possibilidades.}$$

2.1.4 Permutação Simples

Permutar significa trocar reciprocamente. Na Análise Combinatória, as permutações dos elementos de uma determinada sequência, nada mais são que um caso particular de arranjo. Souza (2016), define Permutação Simples como todo arranjo de n elementos diferentes, tomados n a n. Sendo assim:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{\mathrm{n!}}{(\mathrm{n-n})!} = \frac{\mathrm{n!}}{0!} = \frac{\mathrm{n!}}{1} = \mathrm{n!}$$

Logo:

$$P_n = n!$$

Pode-se, então, propor a seguinte situação-problema:

Exemplo 5. Numa estante há seis livros didáticos de disciplinas diferentes, sendo cada uma das seguintes matérias: Matemática, Português, História, Geografia, Física e Química. De quantas maneiras distintas, podemos organizar os seis livros na referida estante?

Nesse caso, onde n = p, tem-se que:

$$A_{6,6} = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6!}{0!} = \frac{6!}{1} = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720 \text{ maneiras diferentes.}$$

Ou seja:

$$P_n = n!$$

$$P_n = 6!$$

$$P_n = 6.5.4.3.2.1 = 720\ maneiras\ diferentes.$$

Como mencionado anteriormente, existem n! Permutações de n objetos tomados n a n. Com isso, introduz-se o termo permutação como sendo um caso particular de arranjo.

2.1.5 Combinação Simples

Smole (2010, p. 143) define Combinação Simples de n elementos diferentes, tomados p a p, com p ≤ n, como “todo agrupamento formado por p elementos distintos escolhidos dentre os n elementos dados, de modo que a mudança na ordem dos elementos não modifique o agrupamento“.

Toma-se como um modelo de aplicação,

Exemplo 6. Os elementos do conjunto E = {a, b, c, d, e}, onde encontra-se todos os subconjuntos possíveis de três elementos distintos que podem ser formados.

{ a, b, c }	{ a, b, d }
{ a, b, e }	{ a, c, d }
{ a, c, e }	{ a, d, e }
{ b, c, d }	{ b, c, e }
{ b, d, e }	{ c, d, e }

Diante dos agrupamentos formados, percebe-se que duas combinações simples quaisquer se diferenciam apenas pela natureza dos elementos, e não pela ordem desses elementos que o compõem. De fato,

- { a, b, c } ≠ { a, b, e }, pois diferem pela natureza dos elementos;
- { c, d, e } = { e, c, d }, pois a ordem dos elementos não altera a combinação.

Em cada combinação de n elementos tomados p a p, tem-se p! permutações dos elementos da combinação. O nome desse tipo de agrupamento é Combinação Simples e sua fórmula pode ser deduzida da seguinte maneira:

$$A_{n,p} = p!\,C_{n,p}.$$

Assim, obtém-se:

$$C_{n,p} = \frac{\mathrm{A\ n,p}}{\mathrm{p!}} = \frac{\mathrm{n}.(\mathrm{n}-1).\dots.(\mathrm{n}-\mathrm{p}+1)}{\mathrm{p}\dots.3.2.1}.$$

Multiplicando-se ambos os membros dessa relação por $(n-p)!$, obtem-se,

$$(n-p)!\ .\ C_{n,p} = \frac{\mathrm{n.(n-1).....(n-p+1).(n-p).(n-p-1).....3.2.1}}{\mathrm{p....3.2.1}}.$$

Por último, tem-se:

$$C_{n,p} = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{p!.(n-p)!}}\text{ , com n} \in \text{IN, p} \in \text{IN e } 0 < \text{p} < \text{ n.}$$

Exemplo 7. “Numa escola com 7 professores de Matemática, deve-se escolher 3 para representar a instituição em um encontro pedagógico. De quantas maneiras podemos formar grupos com 3 professores?

Tem-se que o primeiro professor representante pode ser escolhido de 7 maneiras distintas, o segundo pode ser escolhido de 6 maneiras distintas e o terceiro de 5 maneiras distintas. Dessa forma tem-se, um arranjo de sete professores tomados de três em três. Porém, nessa situação, um agrupamento somente se diferencia de outro quando possui pelo menos um professor diferente, visto que invertendo a ordem dos professores, não se obtêm outro grupo diferente do primeiro. Como o número de agrupamentos formados por esses professores, invertendo-se apenas a ordem, é dada por 3! = 3.2.1 = 6. O número de maneiras a formar grupos é dado por 210 / 6 = 35. Alternativamente, aplicando-se a fórmula das combinações simples, tem-se:

$$C_{n,p} = C_{7,3} = \frac{n!}{p!.(n-p)!} = \frac{7!}{3!.(7-3)!} = \frac{7.6.5.4!}{3.2.1.4!} = \frac{210}{6} = 35\ grupos.$$

2.2 Apontando dificuldades na aprendizagem em análise combinatória

De acordo com Nunes e Silveira (2015), a aprendizagem, em Vygotsky[5], é um processo de conhecimentos, habilidades e valores que abrange as ágeis mudanças do ser humano com o mundo cultural em que ele está inserido. Pode-

5 Segundo Trevizan e Brolezzi (2016), os estudos de Vygotsky sobre aprendizagem, privilegia a interação social do indivíduo. Na sua teoria considera o sujeito como ser ativo de seu desenvolvimento, valorizando a sua interação com o meio, formado por objetos e outras pessoas.

se conceber a aprendizagem como uma maneira em que a pessoa se apropria de determinados saberes, atitudes, estratégias ou informações. Estando relacionada à mudança, significação e dilatação das vivências internas e externas dele.

Segundo as autoras supracitadas, Vygotsky defendia que os conhecimentos prévios dos alunos, não deveriam ser o centro do processo de ensino. Mas sim, as competências (conjunto de conhecimentos, habilidades e atitudes), que podem ser firmadas a partir da interferência do outro como mediador. O ambiente escolar, pela sua especificidade de espaço de (re)construção de conhecimentos e de significados culturais, é capaz de gerar condições para que o desenvolvimento potencial vire realidade.

De acordo com os PCN, as necessidades cotidianas levam os alunos a desenvolverem capacidades de natureza prática para conviver com situações relacionadas à matemática, o que lhes concede selecionar informações, reconhecer problemas, tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela comunidade educativa, a aprendizagem aponta resultado bem mais significativo (BRASIL, 1998).

Nessa perspectiva, os PCN apontam como fundamental não subestimar o potencial de conhecimento matemático dos alunos, reconhecendo que eles resolvem problemas ao tentar estabelecer relações entre o que sabe e o que é novo. O estabelecimento de relações é importante para que o aluno entenda efetivamente os conteúdos matemáticos. Visto que, abordados de maneira isolada, eles não se tornam uma ferramenta eficaz para a aprendizagem de conceitos novos (BRASIL, 1998).

Com essa abordagem, nota-se que o fato de mobilizar um conceito matemático isoladamente pode gerar dificuldade de aprendizagem para muitos alunos. Segundo a BNCC, um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos alunos a visão de que a Matemática não é um conjunto de técnicas e regras, porém faz parte da nossa cultura, de nossa história e do nosso cotidiano (BRASIL, 2017).

No que se refere à Análise Combinatória, tema que norteia essa pesquisa, não é diferente, pois muitas são as dificuldades em torno da aprendizagem desse conteúdo. Trevizan e Brolezzi (2016) afirmam que a AC apresenta uma grande potencialidade para resolução de problemas e envolvem raciocínios relevantes, porém, é abordado em muitos momentos, como um formulário a ser manipulado na resolução de exercícios diversos.

Abordagens como a citada anteriormente evidenciam a necessidade de se refletir acerca das dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos, ao se estudar AC. Handaya (2017) menciona que o processo de aprendizagem da AC não é fácil e que habitualmente, antes de chegar à solução do problema, o aluno tem que passar por várias etapas. Para esse autor, as dificuldades de aprendizagem desse conteúdo AC são muito perceptíveis, mesmo entre os alunos do ensino superior. Em seus estudos, acerca do tema, ele aponta alguns fatores que produzem tais dificuldades, entre os principais cita-se os que estão no Quadro 03,

Quadro 03: Dificuldades de aprendizagem em Análise Combinatória

Dificuldades	**Abordagens**
Leitura e interpretação.	Geralmente os problemas de contagem não são apontados com enunciados breves, como*: "determine o arranjo de 6, quatro a quatro". ou "encontre a combinação de 9, três a três".* Eles são apresentados, em muitos momentos, na forma de texto longo, que requer cuidadosa leitura e interpretação.
Diferenciar os tipos de agrupamentos.	Em Análise Combinatória, a diversidade de tipos de problemas é muito grande. Se faz necessário saber diferenciar os tipos de agrupamentos (*arranjo, permutação, combinação*) e seus subtipos como *com repetição, sem repetição, linear, circular, condicional e caótica.* Apesar de alguns não serem abordados em muitos currículos do Ensino Médio, é imprescindível que os alunos diferenciem pelo menos os mais básicos.
Diferenciar e aplicar fórmulas.	Além de existir, para cada tipo de problema uma fórmula diferente, tem casos que não possuem a fórmula geral, como: "Seis amigos vão ao cinema. São 3 rapazes e 3 moças. De quantas formas eles podem ser dispostos numa mesma fila, em seis poltronas vizinhas, de modo que as três moças fiquem sempre juntas? ". Nesse caso deve-se trabalhar com o produto de duas permutações. Além de classificar o problema, é preciso associar, a cada um, sua fórmula certa.
Existência de termos não padronizados.	Alguns termos são de uso comum, porém, há outros que não são comuns. Como *desarranjo* que também é conhecido como *permutação caótica*. Outros utilizam o termo permutação tanto para arranjo quanto para permutação. Como exemplo, temos (GERSTING, 2004, pág. 167) onde menciona "*Um arranjo ordenado de objetos é chamado de permutação"*.

Fonte: Handaya (2017)

Nota-se que entre os fatores mencionados como geradores de dificuldades no ensino de AC, aponta-se a necessidade de ler e interpretar um problema, em muitos momentos apresentado na forma de texto longo. Como exemplo, tem-se a questão de número 177 do Caderno azul de questões do Enem (2012, p.30):

> (Enem 2012) O designer português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.
> *Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012. (adaptado)*

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

Questões como essa, com muitas informações, deve ser lida cuidadosamente mais de uma vez, buscando uma correta interpretação, sendo resolvida passo a passo. Segundo Handaya (2017), para transpor a dificuldade relacionada com a leitura e interpretação, o aluno precisa habituar-se a fazer a leitura de problemas e interpretá-los, discriminando o que se tem e entendendo o que se pede. Nessa perspectiva, os PCN+ (2002) contribuem quando afirmam que saber ler em Matemática é mais que ter algum domínio da língua portuguesa.

> [...] É necessário também dominar códigos e nomenclaturas da linguagem matemática, compreender e interpretar desenhos e gráficos e relacioná-los à linguagem discursiva. Além disso, o aluno precisa analisar e compreender a situação por inteiro, decidir sobre a melhor estratégia para resolvê-la, tomar decisões, argumentar, se expressar e fazer registros. (BRASIL, 2002, p. 112)

No contexto do ensino de Matemática, Pelizzari (2014) afirma que a interpretação de situações-problemas de forma incorreta faz com que o aluno tenha dificuldades em operacionalizá-las de forma exitosa. Uma boa leitura e interpretação permitem, ao aluno, desenvolver estratégias que conduzam a uma escolha adequada e conveniente das etapas envolvidas no processo de resolução de um problema. Percebe-se, assim, que a leitura e a interpretação são fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática como um todo.

A ampla variedade dos tipos de problemas de contagem é outra dificuldade de grande visibilidade apontada por Handaya (2017). Em seus estudos, ele descreve que muitos alunos encontram dificuldades em entender e utilizar suas compreensões para reconhecer os diversos e diferentes problemas de combinatória. Para amenizar tal dificuldade, vê-se relevante valorizar o pensamento do aluno, apresentando-lhe problemas diversos que o conduzam a pensar produzindo novas ideias, soluções e a construção de novos métodos (DANTE, 2010).

Além das dificuldades mencionadas, relacionadas ao ensino e aprendizagem de AC, Gonçalves (2014), aponta como obstáculo para a aprendizagem, a maneira como esse conteúdo é abordado em sala de aula. Para ela, são muitos os questionamentos, por parte dos alunos, acerca de qual fórmula utilizar em cada situação-problema proposto. Segundo a autora, essa dificuldade se dá devido à forma mecanizada que os conteúdos são abordados desde cedo, tendo como ponto de partida exemplos e algoritmos memorizados.

Conceição, Pereira e Santos (2016) também apontam a maneira como o estudo de AC é abordado em sala de aula, como o maior causador de dificuldades de aprendizagem para os alunos. Segundo os autores, apesar de o professor ser capacitado e de possuir uma qualificação maior, a memorização de fórmulas ainda continua sendo o caminho preferido para se abordar o estudo de AC. Como consequência, o aluno não se esforça muito diante da busca de estratégias de solução, apenas decora fórmulas e tenta resolver problemas.

Diante das abordagens anteriores, compreende-se que é importante buscar novas alternativas para a construção significativa do processo ensino e aprendizagem de AC. Em que o aluno construa suas habilidades, por meio da leitura e interpretação de situações-problemas reais e do cotidiano. Dessa maneira, ele estará mobilizando recursos cognitivos, definindo conhecimentos fundamentais em cada situação, ou seja, estará pensando produtivamente.

2.3 Análise combinatória em documentos norteadores da educação básica.

Diante da leitura de alguns documentos norteadores da Educação Nacional, notou-se o destaque que todos dão à formação integral do aluno. Eles preconizam que o aluno precisa ser abordado na sua totalidade, percebido como um ser sociável, capaz de comportar-se ativamente diante da realidade que o envolve.

Dispõe-se, nos textos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), da atualização deles (PCN+), das Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCNEB), da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e até mesmo nos textos da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), que o ensino deve ser abordado de forma que o aluno aprenda além da escola, que ele apresente um aporte intelectual que o permita progredir nos estudos ou mesmo que ele seja inserido no mercado de trabalho.

Os PCN são documentos oficiais que norteiam a prática docente, nele há algumas orientações acerca dos conteúdos que devem ser utilizados nos planejamentos escolares. Nessa perspectiva, segundo tais parâmetros, o ensino de AC deve ser organizado de forma que desenvolva habilidades no aluno, tais como:

> Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos; identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem; identificar dados e relações envolvidas numa situação problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem. (BRASIL, 2002, p.127).

Nota-se, diante das orientações dos PCN+ (2002), que o ensino de AC deve conduzir o aluno a ser capaz de tomar decisões e de aplicar a estratégia mais condizente para contar todos os casos favoráveis em uma situação de combinatória, Utilizando um processo de construção que seja mais simples e explicativo da situação-problema. O objetivo principal é contribuir para que o aluno construa o conhecimento combinatório de forma significativa.

Nos poucos anos desse novo século, podem-se contemplar mudanças que ocorreram e outras que continuam a acontecer, em várias áreas da sociedade brasileira, principalmente no campo educacional. Como exemplo, tem-se a reforma do Ensino Médio e a criação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A sistematização desse documento tem, como principal objetivo, o alinhamento e a formação de um alicerce no sistema educacional do

Brasil, onde todas as escolas (públicas e particulares) possam ter uma base curricular semelhante, respeitando a peculiaridade de cada região. (BRASIL, 2017).

Para o desenvolvimento de habilidades relativas à Análise Combinatória, a BNCC não diverge dos documentos anteriores, pois sugere que os alunos tenham contato com situações que construam o espaço amostral de eventos equiprováveis, envolvendo o princípio multiplicativo e utilizando a árvore de possibilidades, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Com esses contatos, os alunos estarão desenvolvendo habilidades relativas à Análise Combinatória. De acordo com a BNCC, habilidade é o saber fazer e competência é a mobilização desses saberes, de conhecimentos, de valores, de atitudes, entre outros.

No Ensino Médio, entre as habilidades apontadas para o desenvolvimento da competência relacionada à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo combinatória, tem-se: “Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamentos de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo as estratégias diversas como o diagrama de árvore” (BRASIL, 2017, p. 529).

Constata-se então, que é fundamental assegurar aos alunos as competências específicas e habilidades relativas aos seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a maneiras de pensar sendo criativos e que favoreçam a tomada de decisões. Nessa perspectiva, o estudo de Análise Combinatória, por envolver raciocínios relevantes e apresentar grande potencialidade para a resolução de problemas, contribuirá para que os alunos passem a dominar um conjunto de ferramentas que potencializem, de forma significativa, a capacidade de resolver problemas e de ampliar a capacidade de pensar matematicamente.

2.4 Resolução de problemas

A construção do conhecimento científico desde a antiguidade foi fundamentada nas experiências vividas pelos seres humanos. Constata-se isto nos diversos registros gregos, egípcios, chineses, entre outros, descobertos ao longo do tempo. Muitos desses registros usam a Matemática para resolver problemas em várias áreas, tais como: agricultura, arquitetura, comércio, entre outras (ROSSETTO, 2013).

Como exemplo de registros primitivos de ensaios humanos no campo da contagem, tem-se o osso de Ishango, Figura 3, considerado um dos mais antigos objetos que possuem inscrições de cunho numérico. Trata-se de um osso da fíbula de um babuíno, mostrando que funcionava também como objeto de escrita e gravação. Estima-se que esse osso tenha mais de 20.000 anos, nele há três colunas de traços talhados, correspondendo as suas três faces, conforme o Quadro 04. A princípio, esses traços sugerem uma tentativa de contagem. Mas, a análise das relações entre os agrupamentos de traços pode apontar para uma compreensão matemática mais sofisticada (MOL, 2013). No quadro abaixo, indica-se o número de traços por grupo, em cada uma das três colunas:

Quadro 04: Número de traços por grupo no osso de Ishango

Coluna 1: 9, 19, 21, 11 Coluna 2: 19, 17, 13, 11 Coluna 3: 7, 5, 5, 10, 8, 4, 6, 3

Fonte: http://cearacriolo.com.br/novo/2019/02/o-osso-de-ishango/

Figura 03 - Faces frontal e posterior do Osso de Ishango

Fonte: http://cearacriolo.com.br/novo/2019/02/o-osso-de-ishango/

A Matemática é um campo do conhecimento do ser humano que sempre desempenhou grande influência em várias civilizações. Como mencionou-se anteriormente, os registros históricos retratam isso, a sobrevivência de muitas gerações, contaram com contribuições do aperfeiçoamento dessa área do saber.

Segundo Rossetto (2013), é relevante ressaltar que a matemática dos dias atuais é o resultado de uma trajetória histórica que levou anos para ser organizada. Para ela, conhecer parte da história da Matemática é fundamental para o desenvolvimento dessa disciplina.

A resolução de problemas sempre ocupou um lugar relevante no ensino da Matemática. Desde muito tempo, os problemas matemáticos tinham lugar em destaque no currículo dessa disciplina, visto que ensinar a resolver problemas significava mostrar modelos, tendo como estratégia de ensino a repetição, algo muito mecânico. Constata-se essa colocação na abordagem de Souza (2010), quando afirma:

> A existência de problemas emerge desde as antigas civilizações. Problemas matemáticos, encontrados na história antiga: egípcia, chinesa e grega, são ainda apresentados, da mesma forma, em livros-texto de Matemática dos séculos XIX e XX, com a mesma ênfase. A ideia é a mesma. Alguém cria um problema, resolve-o, apresenta sua solução e oferece uma lista de problemas do mesmo tipo para serem resolvidos da mesma forma. Com essa abordagem, não se exige do resolvedor a criação de estratégias para a resolução do problema, ele “aprende” mecanicamente o que lhe é “ensinado”, não aprende a pensar. (SOUZA, 2010, p. 114)

Baseado na citação acima, percebe-se que o ensino da Matemática nas antigas civilizações, era marcado por meras repetições e por memorização de fatos. É notório que o ensino não priorizava o ato de pensar, nem os conhecimentos prévios dos alunos. Souza (2010) enfatiza que ainda hoje há livros em que o ensino de resolução de problemas limita-se apenas a mostrar problemas, possivelmente utilizando técnicas específicas para encontrar a solução, onde a mesma deve servir de modelo para a resolução de outros problemas do mesmo perfil.

Os termos “problemas” e “resolução de problemas” são abordados com grande frequência em sala de aula no cotidiano. Mas em vários momentos são utilizados de forma equivocada, visto que chegam a ser confundidos como uma mesma atividade. Nessa perspectiva, considera-se importante empreender-se uma análise acerca da definição desses termos.

Analisando-se o livro “*A Arte de Resolver Problemas*” em busca da definição do que é um problema, constata-se que não há uma definição direta. Porém, entende-se que, para Polya (2006), autor do livro citado, problema é algo que foi pensado ou almejado alcançar, mas que não se conhece o caminho direto para solucioná-lo.

Segundo Cavalcanti (2011, p. 03), problema é toda “[...] situação em que se percebe a insuficiência dos conhecimentos imediatos diante de um desafio, exigindo uma busca de estratégias que torne possível sua solução”. Dessa maneira, um problema sempre será para o aluno um desafio, longe de ser resolvido por meio de um processo mecânico.

Dante (2010), pressupõe que intuitivamente todos os indivíduos têm uma ideia do que seja um problema. Visto que resolver problemas é próprio da índole humana. Os dias, para os humanos, são preenchidos com ideias e anseios, muitas das vezes, não imediatamente atingíveis. Assim, pode-se caracterizar esse ser como o animal que resolve problemas. Para o referido autor, um problema de forma geral, é um obstáculo a ser vencido, algo a ser solucionado e que necessita do pensar consciente do indivíduo envolvido, para resolvê-lo.

No que se refere a um problema matemático, os PCN o definem como:

> [...] uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução. (BRASIL, 1998, p. 41)

É consensual entre os educadores matemáticos que, de acordo com o conhecimento que dispõe, o que é problema para um aluno pode não ser para outro. Só será problema se exigir do aluno um processo de reflexão para solucioná-lo. Para resolver um problema matemático a contento, pressupõem que o aluno:

- Elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
- Compare seus resultados com os de outros alunos;
- Valide seus procedimentos (BRASIL, 1998, p. 41).

Trabalhando nessa perspectiva, tem-se relevantes contribuições para que o aluno busque se libertar daqueles “exercícios modelos” e utilize suas próprias estratégias, suas habilidades na tentativa de solucionar o problema. Dessa forma, ele poderá perceber que em vez de dar apenas a resposta, estará sendo conduzido a delineá-la. Vale ressaltar que só existe problema matemático quando o aluno for conduzido a interpretar o enunciado da questão proposta e a organizar a indagação que lhe é recomendada (BRASIL, 1998).

Por outro lado, ao tratar-se da abordagem, ensinar sobre “Resolução de Problemas”, alguns pesquisadores a define como: um conteúdo a ser vivenciado no ensino de Matemática, uma disciplina a ser estudada ou uma metodologia de ensino. Metodologia essa que busca transpor os obstáculos dos métodos tradicionais de ensino. Nela, os conceitos matemáticos são construídos pelos alunos, junto à mediação do professor que procura promover uma estrutura relevante para o aluno em relação ao seu conhecimento. A Resolução de Problemas (RP) é uma ferramenta muito importante no processo ensino e aprendizagem da Matemática.

Dante (2010) afirma que a interpretação da RP como metodologia de ensino da Matemática, é a mais frutífera em relação ao processo de ensino e aprendizagem, visto que contempla qualquer uma outra interpretação e as enaltecem com um item metodológico relevante, desfazendo conceitos e procedimentos com o auxílio de situações-problemas estimulantes.

De forma análoga, os PCN+ (2002), afirmam que a Resolução de Problemas é peça central para o ensino de Matemática, visto que o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o aluno está comprometido de forma ativa no enfrentamento de desafios que lhe são propostos (BRASIL, 2002).

De acordo com Onichic e Allevato (2011), apenas no século XX, a partir de Polya (2006), a pesquisa sobre RP e as iniciativas para aceitá-la como um método de ensinar Matemática tiveram grande notoriedade. Enquanto pesquisador matemático, Polya se preocupou em encontrar formas de resolver problemas e de como ensinar estratégias que conduzisse a caminhos para resolver problemas.

Para Polya (2006), o professor que tivesse interesse em desenvolver nos seus alunos a faculdade de resolver problemas, deveria levá-los a ter anseio por problemas e concede-lhes inúmeras oportunidades de imitar e de exercitar. Assim, ele define:

> A Resolução de Problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os. (POLYA, 2006, p. 04)

Nota-se que Polya (2006) ressaltava a importância da prática a fim de desenvolver a habilidade de resolver problemas, bem como a imitação de pessoas que dominavam essa técnica (RP). Muitos educadores e pesquisadores recomendam que a abordagem sobre resolução de problemas aconteça apenas quando o aluno tenha se apropriado do conceito e do que se trata a RP. Apropriando-se dessas concepções, pressupõe que o aluno desenvolva a habilidade de fazer uso inteligente e eficaz do raciocínio matemático, vislumbrando significado naquilo que é estudado.

2.4.1 A Resolução de Problema no Processo de Aprendizagem de Conteúdos Matemáticos

Como mencionado anteriormente, os primeiros estudos sobre o ensino de Matemática utilizando a Resolução de Problemas como processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, teve grande contribuição de George Polya (pesquisador matemático húngaro). Ele apresentou, em seu livro *A Arte de Resolver Problemas (1945),* quatro etapas para a resolução de problemas: ”1) compreensão do problema; 2) elaboração de um plano; 3) execução do plano; 4) retrospectiva”. (POLYA, 2006).

De acordo com o autor mencionado anteriormente, essas etapas não são fixas, rígidas ou infalíveis. Para ele o processo de resolução de um problema é algo mais complexo e rico, que não se limita apenas em seguir instruções passo a passo que conduzirão à solução, como se fosse um algoritmo. No Quadro 05, vê-se com mais detalhes cada uma das etapas, aplicadas a um problema.

Quadro 05: Etapas para resolver um problema segundo George Polya

Compreender o problema	Antes de começar a resolver um problema, precisa-se compreendê-lo. Para isto, deve-se lê-lo atentamente e responder a questões como: há alguma palavra cujo significado eu não conheço? Quais são os dados e as condições do problema? É possível fazer uma Figura ou diagrama da situação?
Elaborar um plano	Nessa etapa, elabora-se um plano de ação para resolver o problema, fazendo a conexão entre os dados do problema e o que ele pede. Muitas vezes, chega-se a uma linguagem matemática que parte da linguagem comum. Nessa fase podem surgir perguntas como: você já resolveu um problema como esse antes? Você lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este? É possível colocar as informações numa tabela e depois fazer um gráfico ou diagrama? É possível resolver o problema por partes?
Executar o plano	Nesta etapa, é preciso executar o plano elaborado, verificando cada passo a ser dado. Completando os diagramas, caso tenha e efetuando os cálculos necessários. Nessa fase, podem surgir questionamentos como: é possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está certo?
Retrospecto	Nesta etapa, analisa-se a solução obtida e faz-se a verificação do resultado. O retrospecto, repassando todo o problema, permite que o aluno reveja como pensou inicialmente, como encaminhou uma estratégia de solução, como efetuou os cálculos, enfim, todo o caminho trilhado para obter a solução. Pode surgir nessa fase perguntas como: é possível verificar o resultado? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?

Fonte: Livro Formulação e resolução de problemas de Matemática (DANTE, 2010).

No livro Resolução de Problemas: Teoria e Prática, Onuchic et al (2014) apresentam algumas ideias relevantes de Polya em relação aos procedimentos estratégicos utilizados na resolução de um problema. Essas ideias foram socializadas em um curso ministrado por ele em Stanford, em 1967, como a seguir:

> Comece com algo que é familiar, ou útil, ou desafiador. Que possua alguma conexão com o mundo ao nosso redor, a partir da perspectiva de alguma aplicação a partir de uma ideia intuitiva. Não tenha medo de usar uma linguagem coloquial quando é mais subjetiva do que a terminologia convencional e precisa. Na verdade, não apresente termos técnicos antes que o estudante possa ver necessidade para eles. Não entre muito cedo ou muito em detalhes pesados de uma prova [demonstração]. Dê primeiro uma ideia geral ou apenas o germe intuitivo da prova. De modo mais geral, perceber que a forma natural de aprender é aprender por etapas: Primeiro, nós queremos ver um esboço do assunto, para perceber alguma fonte de concreto ou algum possível uso. Então, gradualmente, tão cedo quanto nós pudermos ver mais o uso e conexões e interesse, ganhamos maior vontade de trabalhar com os dados. (ONUCHIC et al 2014, p. 23-24)

Percebe-se que Polya via um problema como algo a ser tratado com crescimento gradual, começando com situações mais simples, avançando depois para situações mais complexas. Ainda é possível concluir que, para Polya, a abordagem de um problema partindo de conhecimentos prévios é fundamental para o bom desempenho diante da resolução do problema.

Ainda segundo Onichic et al (2014), a pesquisa de Polya sobre Resolução de Problemas excede as quatro etapas da RP. A melhoria das habilidades de resolver problemas por parte dos alunos era o objetivo e a preocupação de Polya. Na sua concepção, a melhoria das habilidades de resolver problemas só poderia acontecer se os professores se tornassem bons resolvedores de problemas e que estivessem também interessados em fazer dos seus alunos bons resolvedores.

Nos anos sessenta e setenta do século XX, apareceu um movimento de melhoria do ensino de Matemática intitulado Matemática Moderna, tanto o Brasil como outros países aderiram a essa tendência. Esse movimento apresentava um currículo sustentado numa estrutura lógica, topológica, algébrica e de maneira, que enaltecia a teoria dos conjuntos. Existia um cuidado com a linguagem matemática universal mas, em contrapartida, exagerava nas abstrações matemáticas, o que contribuía para o insucesso da aprendizagem.

A Resolução de Problemas obteve espaço significativo nos currículos com a publicação do documento “Uma Agenda para Ação-Recomendações para a Matemática Escolar para a década de 1980[6]”. Esse documento apontava que a Resolução de Problemas deveria ser uma estratégia de ensino-aprendizagem relevante nos currículos escolares. Perante ao insucesso de outras metodologias de ensino, a RP ganha espaço, inicia-se, portanto, um novo tempo da Resolução de Problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Nessa fase, os processos de pensamentos matemático e de aprendizagem por descobertas tiveram um olhar diferenciado no cenário da resolução de problemas. Muitos recursos foram desenvolvidos para auxiliar o professor, como coleções de problemas, sugestões de atividades, listas de estratégias, orientações para avaliar os estudantes, entre outros. (ONUCHIC;

[6] Esse documento foi publicado pelo NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos.

ALLEVATO, 2011). Tudo convergindo para auxiliar o trabalho em sala de aula, muitos dos recursos apontados, contribuíram de forma significativa para que muitos educadores conseguissem fazer da RP o tópico principal em sua função.

No entanto, esses recursos não ajudaram com coerência e de forma clara para se alcançar resultados significativos com o ensino de Matemática fundamentado na RP, visto que os dados pouco contribuíram diante da concretização dos objetivos. Em outras palavras, não havia entendimento de como alcançar os objetivos. Dessa forma, os pesquisadores Schroeder e Lester (1989) apud Onuchic et al (2014), apresentaram três caminhos distintos para se tratar a metodologia da RP na sala de aula. Segundo esses pesquisadores,

> [...] uma das melhores formas de confrontar essas diferenças seria a de distinguir entre três tipos de abordagens de ensino de resolução de problemas: (1) ensinando *sobre* resolução de problemas, (2) ensinando *para* resolução de problemas, e (3) ensinando *via* resolução de problemas. (ONUCHIC et al 2014, p. 29)

No *ensinando sobre resolução de problemas* criam-se métodos para resolver um problema. O professor busca ter como abordagem central do ensino o processo de resolução, expondo as fases e estratégias que podem ser aplicadas. Nessa abordagem, o método de ensino utilizado é o proposto por Polya (2006), que aponta quatro etapas na técnica de resolução de problemas matemáticos.

O objetivo central do *ensinando para a resolução de problemas* é conduzir o aluno a utilizar os conteúdos matemáticos em problemas vivenciados no cotidiano. Nessa abordagem, apesar da relevância da aquisição de conhecimentos matemáticos, o maior propósito é desenvolver nos alunos habilidades de aplicar aquilo que já aprenderam em outras situações. Então, fica claro que o foco é nas técnicas com a finalidade de resolver problemas.

Quanto ao *ensinando via resolução de problemas* deve-se enfatizar o problema como premissa para a construção do conhecimento matemático. Nesse processo, o ato de resolver problemas é o caminho onde os conceitos são desenvolvidos pelos alunos. O papel do professor consiste em abordar problemas significativos que conduzam o aluno a melhorar seu desempenho, apresentando avanços no conhecimento, tendo oportunidade de refletir e de criar estratégias de resolução do problema. Percebe-se que, nessa abordagem, a Matemática e a resolução de problemas são construídas simultaneamente.

O processo "ensinar *via* resolução de problemas" (Teaching via Problem Solving), teve modificação desde 1990, passando a ser "ensinar *através* da resolução de problemas" (Teaching through Problem Solving). O contraste entre os dois processos é que a expressão "através de" quer dizer do começo ao fim, completamente, no percurso da resolução do problema, enquanto a expressão "via" que significa "por meio de", caracterizava apenas um recurso para responder o problema proposto (SOUZA, 2010).

Ainda sobre às concepções do ensino de Matemática fundamentadas em RP, mencionadas anteriormente, Prado e Allevato (2010), enfatizam, diante da história da RP, que:

> [...] Na concepção de ensinar para a Resolução de Problemas, os professores costumam utilizar os problemas para apresentarem aplicações dos conteúdos matemáticos. Primeiramente, apresentam uma parte teórica dos conteúdos matemáticos, e depois, propõem problemas sobre aquele conteúdo. [...] essa é a forma como a grande maioria dos professores realiza seu ensino nas aulas de Matemática. [...] a concepção do Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, [...] se trata de um trabalho em que um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento se faz através de sua resolução. (PRADO; ALLEVATO, 2010, p. 27)

Não existe um modelo de referência para se vivenciar a proposta de ensino da RP em sala de aula, porém, no esforço de contribuir de forma significativa com os professores a fim de trabalharem com essa metodologia, Onuchic et al (2014), após uma série de experimentos e atualizações, desenvolveram um roteiro, apontando que as atividades devem ser organizadas em dez etapas:

Proposição do problema – O professor seleciona ou elabora um problema e denomina-o de "*problema gerador*", cuja finalidade é de construir um novo princípio ou conceito matemático.

Leitura individual – O educador distribui uma cópia impressa do problema para cada aluno e requere que façam a leitura individual.

Leitura em conjunto – O professor distribui entre alunos organizados em pequenos grupos e solicita uma nova leitura do problema, auxiliando-os diante das prováveis dificuldades que surgirem.

Resolução do problema – A partir do momento em que o aluno entende o problema gerador, cada grupo diante de um esforço colaborativo, busca resolvê-lo. Nessa perspectiva, o conhecimento matemático planejado pelo professor será construído com a resolução do problema.

Observar e incentivar – Nessa etapa, os alunos são protagonistas de sua aprendizagem, enquanto o professor deixa de ser comunicador e passa a observar, organizar, incentivar o uso dos conhecimentos prévios, de técnicas operatórias já compreendidas e dos distintos trajetos para resolução do problema. É fundamental que o professor auxilie os alunos nas dificuldades, colocando-se como mediador.

Registro das resoluções na lousa – Os representantes dos grupos são convidados a registrar os resultados obtidos na lousa, independentemente dos acertos, erros ou do processo utilizado para resolver o problema.

Plenária – O professor, como mediador, estimula os alunos a discutirem sobre as diferentes soluções apresentadas pelos colegas, compartilhando suas ideias, justificando seus pontos de vista e sanando dúvidas.

Busca do consenso – Após as discussões, e sanadas as dúvidas, o professor, juntamente com toda a turma, busca chegar a um consenso quanto ao resultado correto.

Formalização do conteúdo – Nessa fase, o professor faz uma síntese formal daquilo que se objetivava aprender a partir do problema gerador. Destacando as diferentes técnicas operatórias, identificando propriedades e construindo demonstrações, caso seja necessário.

Proposição e resolução de novos problemas – Após a formalização do conteúdo, propõem-se novos problemas relacionados ao problema gerador, com o propósito de verificar se os elementos essenciais do conteúdo trabalhado foram compreendidos e de consolidar a aprendizagem construída nas etapas já vivenciadas.

Nota-se que utilizar a proposta de RP não é nada fácil, visto que requer do educador tempo, estudo, planejamento e dedicação para organizar o problema gerador e a aula, além de não se encontrar pronto nos livros didáticos. Requer também do professor uma outra postura, junto às atividades realizadas, ensinando os alunos a enfrentar novas situações, concedendo-lhes a oportunidade de pensar, desenvolvendo raciocínios importantes.

Van de Walle (2001 apud Onuchic et al, 2014), defende que a RP deve ser a principal estratégia de ensino de Matemática. Ele chama a atenção para o fato de que a abordagem do conteúdo a ser vivenciado deve começar sempre onde estão os alunos, diferentemente de outras formas que começam onde estão os professores, desconsiderando o conhecimento prévio dos estudantes. O autor mencionado ainda sugere que as aulas sejam trabalhadas em três fases, incluindo a importância de identificar os conhecimentos prévios que os alunos possuem acerca do conteúdo a ser abordado. A saber:

> - **Antes** (fora da sala de aula) – Nessa fase, o professor deve levar em consideração o conhecimento prévio dos alunos, necessários para delinear o novo conhecimento matemático. Além disso, o professor deve fazer todo o planejamento da aula, levando em conta: o foco da aula, o problema, as estratégias, a resolução do problema, a plenária e a formalização.
> - **Durante** (na sala de aula) – Nessa fase, o professor é observador e avaliador do trabalho dos alunos. Inicialmente, entrega a cada aluno, uma cópia da atividade que deve ser lida por ele. Em seguida, formam-se grupos, e nesse ambiente, há a socialização do trabalho onde, seus participantes passam a trabalhar cooperativamente na busca de possíveis estratégias que poderão levar o grupo a busca da solução, num trabalho colaborativo. É importante dar aos alunos o tempo que o professor considera suficiente para desenvolver esse trabalho.
> - **Depois** (na sala de aula) – Para essa fase, o professor congrega todos os alunos de todos os grupos para uma atividade participativa – professor e aluno. Nela, o professor considera as soluções apresentadas pelos grupos, sem avalia-las e dirige uma discussão exploratória enquanto os alunos defendem suas resoluções e dão justificativas. Professor e alunos, socialmente analisam as resoluções colocadas na lousa: as estratégias escolhidas, os resultados corretos ou não, e, com as dúvidas esclarecidas, chega-se a um consenso acerca da solução obtida. O professor termina com a formalização, totalmente de responsabilidade do professor, escrevendo na lousa os novos conceitos e conteúdos construídos e com os alunos anotando em seus cadernos toda a teoria construída. (ONUCHIC et al, 2014, p. 125-126)

A Base Nacional Comum Curricular, alinhada com a abordagem acima, afirma que os alunos devem aplicar conceitos, procedimentos e estratégias tanto para resolver problemas como para formulá-los, desenvolvendo assim o pensamento por meio de diferentes recursos matemáticos (BRASIL, 2017). Percebe-se que o trabalho com ênfase na RP concede ao aluno estratégias para resolver diferentes tipos de problemas, habilidade fundamental em qualquer espaço da atividade humana.

Nesse contexto, para a proposta didática aqui sugerida, propõe-se uma sequência didática com problemas envolvendo os princípios básicos da Análise Combinatória, apoiados na metodologia de ensino através da resolução de problemas, objetivando que os alunos assimilem os conceitos vivenciados, mediante uma interação e participação ativa.

2.5 Sequência didática

A Análise Combinatória é um tema que perpassa todos os níveis escolares. Os documentos oficiais recomendam que, desde o início do Ensino Fundamental I até o Ensino Médio, seja explorado o pensamento combinatório. Considerando que esse tema se revela extremamente rico por exigir criatividade de resolução, com diversidade de raciocínios e refletindo acerca das dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos ao estudar esse conteúdo, elaborou-se uma Sequência Didática com o objetivo de vivenciar diferentes alternativas em busca da sua aprendizagem.

Zabala (1998) define Sequência Didática como “[...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p. 18). Portanto, o professor, apoiado nos objetivos que almeja atingir com os alunos, deve organizar, de forma bem estruturada, uma série de atividades a fim de alcançar a aprendizagem dos conteúdos delineados para a unidade didática estabelecida.

Nota-se que a Sequência Didática é um conjunto de atividades ligadas a um determinado conteúdo. Para Silva e Oliveira (2009), “Uma Sequência Didática se refere a uma sequência elaborada pelo professor que proporciona uma escolha ou organização de atividades que explorem o domínio do conhecimento dos alunos em sala de aula” (SILVA; OLIVEIRA, 2009, p. 2).

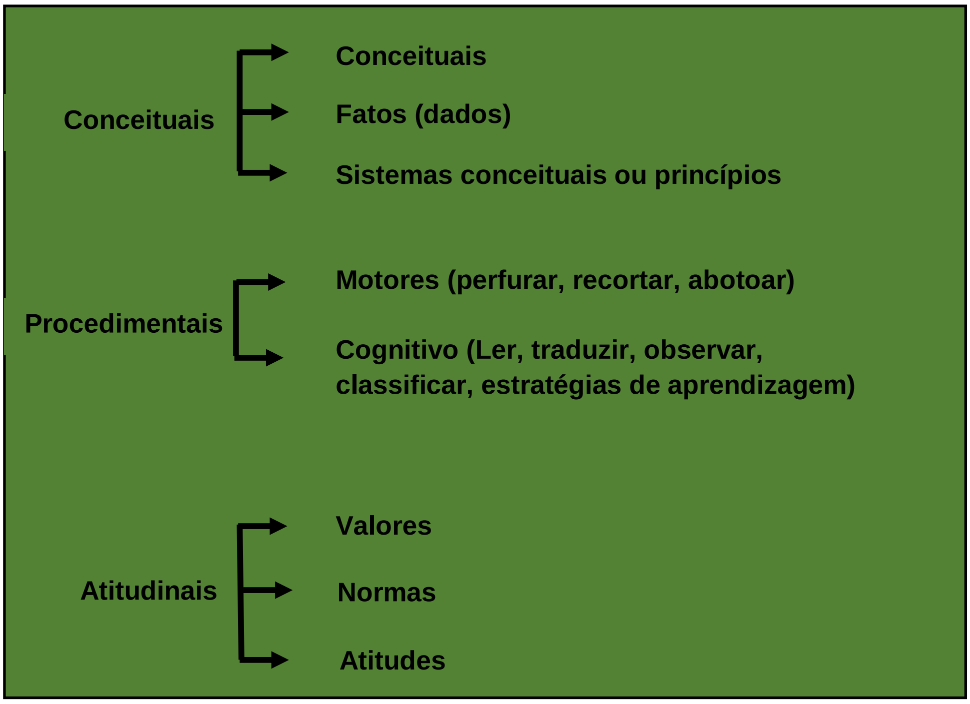
As autoras citadas enfatizam que é importante valorizar as respostas dos alunos. Nesse contexto, vê-se relevância em considerar o nível em que eles se encontram, suas habilidades e seus conhecimentos prévios. Reside aí a importância das atividades de sondagens e os questionários diagnósticos, pois eles contribuem, de forma significativa, para conhecê-los e poder organizar uma sequência que proporcione bons resultados. Paula e Barreto (2016) consideram importante destacar que:

> [...] Sequência Didática não se trata de um aglomerado de atividades soltas, mas sim representa uma articulação entre as atividades, que devem proporcionar níveis progressivos de desafios e habilidades necessárias, além da necessidade de o professor ter definido o objetivo da aprendizagem. (PAULA; BARRETO, 2016, p.04)

A utilização da Sequência Didática como um recurso pedagógico contribui para que o professor tenha um novo olhar sobre a organização do conteúdo, de onde pode partir para a problematização, conduzindo o aluno a verificar seu conhecimento prévio e a se apropriar de novos significados. Ao abordar sobre tipos de conteúdo, Zabala (1998) menciona a importância da ampliação dos objetivos de ensino para abrangê-los. Nesse sentido, ele os traz divididos em três categorias, que são: conteúdos conceituais; procedimentais e atitudinais.

Os conteúdos citados assumem o papel de envolver diversas dimensões da formação do aluno, visto que articulam o saber (conteúdos conceituais), o saber fazer (conteúdos procedimentais) e o ser (conteúdos atitudinais). Apresenta-se a Figura 04 com objetivo de facilitar a visualização desses conteúdos.

Figura 04 - Categorias dos conteúdos segundo Zabala



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

De acordo com o autor supracitado, os **conteúdos conceituais** estão relacionados com conceitos de fato e dele se estendem os **conteúdos factuais**, que são os conhecimentos relativos aos fatos, acontecimentos, situações, dados, fenômenos concretos e singulares. Como exemplo, tem-se o nome de pessoas, a altura de uma montanha, a conquista de um território, entre outros. Esses tipos de conteúdo são mais abstratos, visto que requerem reflexão, compreensão, análise, comparação. Assim, conforme Caldas (2013), a apreensão desse conteúdo ocorre de forma simples, via estratégias de aprendizagem que envolvem a capacidade de memorização, por repetição verbal.

Os **Conteúdos Procedimentais** referem-se às ações ordenadas e com um fim, necessárias para a realização de um objetivo. Diz respeito a um aprender a fazer, envolvem regras, métodos, estratégias, técnicas e habilidades. Exemplificando, tem-se: ler, desenhar, observar, calcular, classificar, traduzir, recortar, inferir, etc. A compreensão desse tipo de conteúdo passa pela realização de ações, ou melhor, é necessário fazer para aprender (ZABALA, 1998). Outro fator relevante para a aprendizagem está relacionado à reflexão da atividade, de maneira consciente diante da sua atuação. A utilização em diferenciados contextos proporciona a aprendizagem de um conteúdo que pode ser usado em diferentes situações (PEREIRA, 2013).

Os **Conteúdos Atitudinais** dizem respeito à formação de valores no que se refere às informações recebidas, eles proporcionam ao aluno reflexões sobre suas atitudes e seu desenvolvimento. Como está posto, esses conteúdos envolvem valores, atitudes e normas, tem-se por exemplo: o trabalho em grupo, a cooperação, o respeito, a solidariedade, a ética e o trabalho com a diversidade. De acordo com Pereira (2013, p. 13), "[...] os valores são os princípios ou ideias éticas que permitem a emissão de um juízo de valor, as atitudes estão relacionadas às tendências para atuação de certa maneira, e as normas são padrões ou regras de comportamento".

Ele sugere que, seja construída uma seleção de esquema de atuação, o qual será flexibilizado e adotado estrategicamente. Tal esquema deve mobilizar de maneira inter-relacionada os conteúdos factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais. Dessa maneira, acabam por abranger os objetivos educacionais, definindo suas ações no campo do espaço de aula (ZABALA, 1998).

Para o autor citado, o uso de Sequência Didática busca manter o caráter unitário e reunir toda a complexidade da prática, permitindo inserir as três fases de toda intervenção reflexiva, que são: o planejamento; a aplicação e a avaliação. Essa abordagem deixa nítida a tríade que contribui para que o professor possa fazer um movimento de constante aprimoramento na sua prática educativa.

O **planejamento** justifica a articulação fundamental entre as reconstruções conceituais e as metodologias alternativas, a **aplicação** materializa a apropriação do material sequenciado concedido aos alunos e a **avaliação** permite as (re)elaborações necessárias, percebidas a partir da análise e discussão dos dados. É propriamente essa tríade apontada por Zabala (1998) que permite ao professor identificar a dimensão unitária de ensinar e aprender Matemática e que pode ser alcançada a partir das interações geradas pelas conexões contidas na Sequência Didática proposta aos alunos (CABRAL, 2017).

Fundamentado nas abordagens dos autores citados, tem-se que a utilização da Sequência Didática apoiada na metodologia da Resolução de Problemas contribui de forma significativa para que o aluno consolide e amplie os conhecimentos matemáticos, Zabala (1998), nos aponta que o planejamento e a avaliação de uma Sequência Didática estão diretamente unidos a prática docente em sala de aula, assim ele ressalta que:

> A intervenção pedagógica tem um antes e um depois que constituem as peças substanciais em toda prática educacional. O planejamento e a avaliação dos processos educacionais são uma parte inseparável da atuação docente, já que o que acontece nas aulas, a própria intervenção pedagógica, nunca pode ser entendida sem uma análise que leve em conta as intenções, as previsões, as expectativas e a avaliação dos resultados. (ZABALA, 1998, p. 17)

Entende-se então, que a aprendizagem deve sempre se dar de forma coerente considerando a individualidade e capacidade dos alunos, de maneira a ser vista como um processo conduzido a transpor desafios que possam ser encarados e que permitam avanços, mesmo que seja um pouco mais em relação ao ponto inicial (ZABALA, 1998).

2.5.1 Pesquisas sobre o Processo de Ensino e Aprendizagem através de uma Sequência Didática com Resolução de Problemas

Buscando avaliar as habilidades dos alunos quanto à resolução de problemas em matemática, de forma específica em Análise Combinatória, Dornelas (2004) realizou uma pesquisa de campo, constando de dois questionários, com 87 alunos do 2º ano do Ensino Médio de duas escolas de Recife – PE, uma era instituição pública e a outra privada. O objetivo era de aplicar uma Sequência Didática buscando analisar o desempenho deles em problemas com combinatória, explorando conceitos, vocabulários e a habilidade em resolver problemas.

Comentários sobre metodologia, levantamento de dados, análise, resultados e pesquisa de campo, foram relatados por Dornelas (2004), ao escrever sua dissertação de mestrado. Realizado os levantamentos de dados, verificou-se que os resultados obtidos apontavam que a AC é abordada no Ensino Médio de forma mecânica, priorizando fórmulas e procedimentos automáticos, dispensando elementos essenciais à resolução de problemas, tais como: raciocínio, compreensão, analogias, argumentação, dentre outros e as estratégias de resolução que favorecem a construção do conhecimento.

O autor supracitado constatou também que os principais erros realizados pelos alunos se referem ao desconhecimento do PFC ou seu uso inadequado e o não conhecimento da importância em ordenar ou não os elementos para formação dos agrupamentos.

Para Dornelas (2004), a atuação dos erros citados anteriormente, prejudicam a aprendizagem e criam novos obstáculos à sequência didática dos conteúdos vivenciados em AC. Ele considera o princípio multiplicativo como um elemento primordial para o desenvolvimento do pensamento combinatório e do entendimento dos conceitos e das características que envolvem os diversos problemas de contagem.

A pesquisa de Dornelas (2004) tem como finalidade apresentar e aplicar uma Sequência Didática que tenha o Princípio Multiplicativo como artifício para a resolução de problemas de contagem que levem o aluno a refletir, entender e resolver problemas envolvendo AC. Oportunizando os alunos de usarem seus conhecimentos prévios, levantar hipóteses, criar, testar, aprimorando a evolução de capacidades cognitivas.

Dornelas (2004) salienta que a utilização didática e sistemática do PFC em problemas de AC, é pré-condição na resolução de situações-problema relacionadas ao tema e para a compreensão dos conceitos consecutivos (Arranjo, Permutação e Combinação). Assim como o autor mencionado, acredita-se que uma proposta didática que trate a AC explorando o Princípio Multiplicativo mediante atividades organizadas torne mais eficaz o processo de aprendizagem.

De acordo com Trevizan e Brolezzi (2016), a AC envolve raciocínios importantes e representa um campo de imensas potencialidades para a resolução de problemas em Matemática. No seu livro de título *“Como Ensinar Análise Combinatória”*, eles apresentam concepções e reflexões sobre a caracterização da escola pública brasileira, tendo a finalidade de situar-se entre os desafios mais atuais.

Segundo Trevizan e Brolezzi (2016), entre outros fatores, a constatação de baixos resultados no ensino de Matemática, em nosso país, nas avaliações nacionais e internacionais, os motivaram a estudar sobre a Teoria das Situações[7], levando-os a refletir acerca da importância das situações adidáticas[8] no ensino. Além de desenvolverem um projeto de implementação e análise de uma situação potencialmente adidática com situações-problema de Análise Combinatória.

Comentários sobre experiência pessoal, compreensão de desenvolvimento e aprendizagem de Vygotsky, Teoria das situações de Guy Brousseau, intervenção pedagógica, sequência didática, análise de dados, entre outros, foram relatados por eles em seu livro (Como ensinar AC).

A escolha de Análise Combinatória para estudo nessa pesquisa, deu-se por dois motivos, primeiro porque Trevizan tinha construído e aplicado uma Sequência Didática sobre Análise Combinatória, antes mesmo de ingressar num programa de mestrado, segundo porque esse conteúdo revela-se extremamente rico por demandar criatividade de resolução e uma variedade de raciocínios.

Com objetivo de oportunizar aos alunos experiências significativas de aprendizagem, os autores planejaram e aplicaram uma sequência didática em três momentos e escolas distintas. Ela foi construída com oito desafios na forma de uma narrativa, contendo diferentes raciocínios combinatórios. Nela aparecem problemas de permutação simples, permutação com repetição, arranjos simples e combinação simples, entre outros.

A sequência acontece num contexto fictício, em que uma personagem, chamada Marcela, depara-se inúmeras vezes com a necessidade de fazer contagens indiretas. Segundo os autores, a narrativa proposta, tem como objetivo dar coesão à sequência e incentivar a sua leitura.

Pontos positivos e negativos puderam ser ponderados durante a aplicação da sequência. Como ponto negativo, os autores citaram a limitação do tempo escolar por ter causado prejuízos para a aprendizagem de alguns alunos que precisavam de maior tempo para amadurecer os conceitos vivenciados.

---

[7] A Teoria das Situações foi desenvolvida pelo matemático francês, Guy Brosseau, ela abrange a relação entre os conteúdos abordados, os alunos e os métodos aplicados pelo professor para consolidar o aprendizado.

[8] De acordo com Trevizan e Brolezzi (2016) uma situação didática ocorre quando predomina o controle do professor sobre a atividade, já a situação adidática acontece quando o aluno trabalha de forma autônoma. Apesar da intencionalidade didática do professor sobre a tarefa, sua interferência direta na aprendizagem não acontece.

Buscando uma avaliação formativa, os autores utilizaram vários instrumentos para visualizar o desenvolvimento individual dos alunos no percurso do projeto, como: anotações pessoais, exercícios entregues, filmagem e prova final. Algumas dificuldades foram observadas, como: enumeração não sistemática, uso incorreto do diagrama de árvore e erro de repetição. Porém, o essencial para os pesquisadores era fazer com que os alunos não aprendessem somente absorvendo as ideias que viessem de outra pessoa, mas que aprendessem tentando, errando, acertando, experimentando.

A pergunta-chave que norteou a pesquisa de Trevizan e Brolezzi (2016) foi, "É possível planejar situações potencialmente adidáticas?". Após percorrer todas as etapas da pesquisa, os autores concluíram que pesquisa e ensino caminham juntos e que todo professor deveria ter em mente uma meta e persegui-la. Quanto à resposta da pergunta-chave, eles afirmam que o processo de ensino e aprendizagem é bem mais complexo do que eles imaginavam no início da pesquisa, desse modo, a resposta não era tão objetiva.

Em vez de dar uma resposta objetiva, eles sintetizaram algumas reflexões realizadas nesse percurso, apontando fatores que favorecem ou desfavorecem a efetivação de uma situação adidática. Foram mencionados, como fatores que desfavorecem: o pouco tempo para o aluno chegar a algumas conclusões, a tendência de antecipar o raciocínio que deve ser do aluno, entre outros. Quanto aos fatores que favorecem, teve-se: a criação de um contrato didático, o planejamento por parte do professor, a aplicação de uma sequência Didática a devolução e orientação da atividade do aluno, etc.

Trevizan e Brolezzi (2016) consideram que é função do professor elaborar situações que suscitem o interesse e a aprendizagem. Essas situações devem enriquecer o meio para que o aluno, raciocinando, tenha condições de formalizar e testar hipóteses. Para os pesquisadores, a aprendizagem só será efetiva se adquirida numa experiência pessoal. Assim como eles, acredita-se que uma proposta didática que explore a AC de modo que o aluno aprenda por sua própria atividade e seja capaz de continuar aprendendo mesmo fora da escola, promove o raciocínio matemática e consequentemente, a aprendizagem.

Babisnski (2017) investiga as possibilidades de uma proposta de ensino para se trabalhar Geometria, fundamentada em uma Sequência Didática à luz de Pais (2001), apoiada na Resolução de Problemas, na Modelagem Matemática[9] e na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986). De acordo com os princípios dessa teoria, os conceitos são vivenciados a partir de situações didáticas, ou seja, situações apontadas para o ensino e aprendizagem de um certo conteúdo, que seja construído diante da relação pedagógica estabelecida entre professor, aluno e o conhecimento.

Comentários sobre resolução de problemas, Modelagem Matemática, Geometria, metodologia, sequência didática, análise de dados, resultados e pesquisa de campo, foram expostos por Babisnski (2017), ao redigir sua dissertação de mestrado. Ele desenvolveu sua pesquisa analisando sua própria prática pedagógica nas aulas ministradas numa turma composta por dez alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II.

Antes do desenvolvimento da Sequência Didática, ele utilizou um questionário diagnóstico (pré-teste) como instrumento, o mesmo foi aplicado com o objetivo de sondar os conhecimentos prévios dos alunos e elaborar uma sequência didática bem estruturada. Além desse instrumento, durante a vivência da proposta o autor utilizou também uma câmera fotográfica como instrumento para registrar informações, impressões e possíveis reflexões realizadas.

Os estudos e abordagens sobre Resolução de Problemas e Modelagem Matemática, foram fundamentados em trabalhos de Onuchic (1999) e Bassanezi (2009), respectivamente. A pesquisa está dividida em três capítulos, com abordagens sobre a história do ensino da Matemática; novas concepções de ensino e aprendizagem de Matemática; e a Sequência Didática nas aulas de Matemática.

As atividades elaboradas e que constituíram o corpus da pesquisa, foram vivenciadas durante o último trimestre de 2016. Tais atividades foram resolvidas em grupos, duplas e individualmente, cada uma fundamentada em objetivos específicos. A pesquisa foi desenvolvida buscando explorar e formalizar: o estudo das razões, das proporções, da semelhança de triângulos e o cálculo de medidas inacessíveis.

[9] Segundo Babisnski (2017) a modelagem matemática pode ser compreendida como a habilidade de transformar problemas do cotidiano em problemas matemáticos, e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

Durante a aplicação da Sequência Didática, o autor realizou aulas práticas fora do espaço escolar, com o intuito de fixar os conceitos de razão e proporção, bem como consolidar o cálculo de medidas inacessíveis. Nessas aulas ele utilizou alguns materiais concretos para sistematizar e facilitar a aprendizagem, tais como: trenas, fita métrica, papel A4, entre outros.

Na análise final de seu trabalho, Babisnski (2017) examinando o pré-teste, as atividades vivenciadas e os registros observados nas aulas, confirmou sua hipótese inicial e constatou que os objetivos previstos para cada etapa foram alcançados, visto que a maioria dos alunos apresentou relevante melhora no cálculo de medidas inacessíveis. Ele também constatou que a utilização da Resolução de Problemas como estratégia de ensino de cálculo de medidas inacessíveis facilitou a compreensão dos conceitos envolvidos, uma vez que os alunos participaram com afinco das atividades propostas e os resultados foram satisfatórios.

O autor destacou que desde o início do planejamento da pesquisa existia uma inquietação sobre o quanto uma Sequência Didática contribuiria no processo de ensino e aprendizagem dos alunos, diante do estudo dos cálculos de medidas inacessíveis. A resposta veio após a vivência da Sequência Didática, com: etapas de ensino interligadas entre si, apresentação de situações problemas do cotidiano, atividades com níveis de dificuldade gradativas, entre outros. Tudo convergindo para que o aluno pudesse interagir melhor nas aulas e compreendesse os conceitos estudados.

Assim como Babisnski (2017) e alguns documentos norteadores da educação básica (PCN e BNCC), considera-se importante utilizar a resolução de problemas como ponto de partida para se vivenciar conceitos matemáticos. Outros fatores que também chamaram a atenção na pesquisa foram as atividades extraclasse, participações, reflexões em sala de aula e a forma como o pesquisador e os alunos interagiram.

A análise desses trabalhos permitiu comparar e conectar as ideias do pesquisador, relacionadas ao ensino de conceitos matemáticos mediante uma Sequência Didática através da Resolução de Problemas, com as opiniões de outros pesquisadores. Possibilitou também examinar em que aspectos a proposta a ser construída seria diferente de outras existentes. Nessa perspectiva, observou-se que várias pesquisas analisadas fazem apenas a utilização da Resolução de Problemas como metodologia, o que justifica a realização de estudos que oportunize o desenvolvimento dos conceitos combinatórios numa Sequência Didática apoiada na metodologia da Resolução de Problemas.

3 METODOLOGIA

3.1 Caracterização do estudo

Na concepção de Aragão e Mendes (2017), metodologia é o estudo do método utilizado para se buscar certo conhecimento. Trata-se das formas de se fazer ciência. Para Marconi e Lakatos (2003) o método é o conjunto das atividades sistemáticas que permite alcançar o objetivo, traçando o caminho a ser trilhado, identificando erros e contribuindo nas decisões do pesquisador. Dessa maneira, conclui-se que metodologia é o estudo dos caminhos necessários para se alcançar um determinado objetivo.

O presente estudo consiste na elaboração, aplicação e análise de uma Sequência Didática, como proposta de ensino e aprendizagem dos princípios básicos de Combinatória, tendo como metodologia a Resolução de Problemas.

Para a elaboração da Sequência Didática, pretende-se fazer um estudo diagnóstico sobre os conhecimentos prévios dos alunos, acerca do estudo dos princípios básicos de Análise Combinatória. Essa concepção teve como suporte os estudos de Vygotsky, apontados por Trevizan e Brolezzi (2016), sobre a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Nessa perspectiva, afirmam que:

> Um conceito muito conhecido de Vygotsky é a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que na escala do desenvolvimento cognitivo, é a área definida entre o nível real de desenvolvimento e o nível potencial da criança. O nível real de desenvolvimento envolve aquilo que ela já sabe ou é capaz de realizar sozinha. O nível potencial envolve tudo o que está em vias de aprender. [...] A ZDP é, então, o estágio que pode vir a ser alcançado pela criança no nível de desenvolvimento em que se encontra. (TREVIZAN; BROLEZZI, 2016, p. 33-34)

O nível de desenvolvimento potencial refere-se aquilo que o aluno alcançou a partir da interação com outras pessoas, por exemplo com seus pares ou com o professor. A ideia de ZDP faz com que o educador valorize os conhecimentos prévios do aluno e também aquilo que ele ainda pode aprender. Em outras palavras, o olhar do professor não se volta apenas para aquilo que o aluno tem condições de fazer ou não tem condições de fazer, visto que é nas possibilidades que se encontra a ação educacional.

Contudo, esta pesquisa busca destacar o processo de ensino e aprendizagem e dessa forma, se caracteriza por ser um estudo de natureza descritiva e de abordagem qualitativa.

A pesquisa descritiva tem como principal objetivo, descrever as características de determinada população ou fenômeno. Nela, o pesquisador observa, registra, analisa e correlaciona fatos, fenômenos ou variáveis sem proceder quaisquer manipulações neles (GOMES, 2004). O autor mencionado também nos lembra que na pesquisa qualitativa o pesquisador experimenta um cruzamento de suas conclusões de maneira que tenha maior segurança de que suas informações não são produto de algum acontecimento particular.

Segundo Gerhardt e Silveira (2009), a pesquisa qualitativa se preocupa com fatos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se no entendimento e no esclarecimento da prática das relações sociais. Para as autoras, a pesquisa científica é o resultado de um exame detalhado, executado com o propósito de resolver um problema utilizando métodos científicos.

Com o intuito de propor uma sequência didática que auxilie na aprendizagem dos princípios básicos de Análise Combinatória, por meio da resolução de problemas, definiu-se que este estudo é de finalidade básica estratégica, sob o método hipotético – dedutivo e realizada com procedimentos bibliográficos e pesquisa – ação. Para Thiollent (1985) apud Gil (2010), a pesquisa – ação pode ser definida como:

> [...] um tipo de pesquisa com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou ainda, com a resolução de um problema coletivo, onde todos pesquisadores e participantes estão envolvidos de modo cooperativo e participativo. (GIL, 2010, p. 42)

Portanto, o detalhamento metodológico do estudo sobre os conceitos e princípios básicos de Análise Combinatória para o Ensino Médio; as dificuldades na aprendizagem em Análise Combinatória; a Análise Combinatória nos documentos norteadores da educação básica; resolução de problemas no processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos e fundamentos da sequência didática, colaborarão para a organização e a interpretação dos dados.

3.2 Espaço da pesquisa e público participante

Para a realização da coleta de dados, optou-se pelo Instituto Federal da Bahia (IFBA) – Campus Juazeiro, situado na região do Vale do São Francisco. A escolha do Campus Juazeiro se justifica pelo fato do pesquisador lecionar na instituição e almejar contribuir de forma diferenciada por meio deste estudo.

Atualmente, o Campus possui em média 455 alunos distribuídos entre os cursos de Administração e Segurança do Trabalho, nas formas Integrada[10] e Subsequente ao Ensino Médio.

Os sujeitos desse estudo são quinze alunos do terceiro ano letivo de 2019, do curso de Segurança do Trabalho, da modalidade integrada, cujo interesse em participar se deu devido um convite realizado pelo professor de Matemática. Ressalta-se que os encontros ocorreram geralmente nas terças-feiras das 10h50min. às 12h30min. Esse horário foi proposto pelos alunos, por ser conveniente para todos os participantes dessa pesquisa.

3.3 Técnicas e instrumentos de coleta de dados

A fim de que os dados coletados representem a realidade, recorre-se ao método científico. Por isso Gil (2010) aborda que os instrumentos de coleta de dados são os meios utilizados para aplicar as técnicas escolhidas. A qualidade dos resultados de uma pesquisa depende, essencialmente, da qualidade do instrumento usado na coleta de dados. Percebe-se, assim, que é importante o delineamento de ferramentas consistentes e adequadas para realizar a investigação. Nessa pesquisa, far-se-á a coleta de dados para investigação, a partir dos instrumentos mencionados no Quadro 06:

[10] A forma Integrada é aquela em que o aluno faz o curso técnico e o ensino médio ao mesmo tempo. Por outro lado, a forma Subsequente é aquela ofertada para o aluno que já concluiu o ensino médio, ou seja, é ofertada subsequentemente ao ensino médio.

Quadro 06: Técnicas e instrumentos de coleta de dados

Instrumento	Abordagem
Observação	Gil (2008), menciona que a observação nada mais é do que a utilização dos sentidos com vistas a obter os conhecimentos necessários para o cotidiano. Para ele a observação é muito importante, sobretudo na fase da coleta de dados. Por meio dela, pretende-se anotar os aspectos relevantes vivenciados durante a aplicação da Sequência Didática, que norteiam o processo ensino e aprendizagem de AC, por meio da resolução de problemas, promovida aos alunos. Ainda para o autor supracitado, a observação, por ser usada, apenas, para a coleta de dados em inúmeras pesquisas, e por estar também presente em outros momentos da pesquisa, chega a ser apontada como método de investigação. Nesta dissertação, as observações das etapas da Sequência Didática têm, como objetivo, analisar suas contribuições na aprendizagem de Análise Combinatória, por meio da Resolução de Problemas.
Questionário 1	Esse questionário (Apêndice A) foi aplicado com o objetivo de coletar, previamente, informações sobre o componente curricular de matemática no processo de aprendizagem. Segundo Gil (2010, p. 103), "a elaboração do questionário consiste basicamente em traduzir os objetivos específicos da pesquisa em item bem redigidos". Assim, por meio desse instrumento pode-se traçar o perfil dos sujeitos que participam, obtendo uma visão ampliada da realidade.
Questionário 2	Esse questionário (Apêndice B), refere-se a uma avaliação diagnóstica, que contém oito problemas abertos que envolvem habilidades básicas de Análise Combinatória. O objetivo na aplicação, foi de coletar informações acerca da aprendizagem em Análise Combinatória por meio da resolução de problemas, bem como averiguar os conhecimentos prévios, as estratégias de resoluções e identificar possíveis dificuldades de aprendizagem dos alunos. Vale ressaltar que, antes da realização desse questionário, nenhuma abordagem sobre o conteúdo foi realizada com a turma. Os problemas aplicados envolviam somente os conceitos básicos de Análise Combinatória, tais como: Princípio Fundamental da Contagem, Arranjo Simples, Permutação Simples e Combinação Simples.

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Além da técnica e dos instrumentos mencionados acima, utilizaram-se, para visualizar o desenvolvimento de cada aluno no desenrolar da pesquisa: anotações pessoais; áudios; filmagens; atividades entregues e recolhidas, como também questionamentos subjetivos por parte do professor, a fim de que os alunos apontassem, de forma escrita/oral, as dificuldades relacionadas às etapas da resolução de problemas e aos conceitos abordados.

Acredita-se que os instrumentos de pesquisa a serem utilizados e o processamento das análises possibilitarão responder à questão de investigação proposta para este estudo que é a de analisar, "como uma sequência didática envolvendo resolução de problemas, pode contribuir na aprendizagem dos princípios básicos de Análise Combinatória".

3.4 Aplicação da sequência didática

Busca-se, com essa Sequência Didática, contribuir para que situações favoráveis surjam a fim de que os alunos assimilem os conceitos básicos de Análise Combinatória, permitindo a identificação de dificuldades que venham surgir no processo. Para atingir os objetivos mencionados na introdução dessa pesquisa, a Sequência Didática sugerida será abordada levando em conta três etapas compostas por nove encontros com 100 minutos cada um. Quanto à estrutura organizacional da Sequência Didática, será vivenciada conforme informações no Quadro 07:

Quadro 07: Etapas da sequência didática

Primeira etapa	Estudo dos Conceitos de Princípio Fundamental da Contagem e Fatorial de um Número Natural
Segunda etapa	Estudo dos Conceitos de Arranjos Simples e Permutações Simples
Terceira etapa	Estudo do Conceito de Combinações Simples.

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Essa organização da Sequência Didática foi assim definida principalmente porque cada etapa servirá de base para uma melhor compreensão do conteúdo a ser vivenciado posteriormente. Dessa forma, como sugere Zabala (1998), os conteúdos estarão ordenados, o que contribui para a vivência de atividades conectadas ao estudo de Análise Combinatória e com níveis de dificuldades gradativas, favorecendo a aprendizagem dos alunos.

A Sequência Didática foi construída e apoiada na metodologia de ensino por meio da Resolução de Problemas, objetivando a aprendizagem de conceitos e de resolução de problemas mediante uma participação ativa dos alunos. As escolhas foram fundamentadas, principalmente, nos estudos feitos por Polya (2006), Onichic e Allevato (2014), Van de Walle (2001 apud Onuchic et al, 2014), Zabala (1998) e Sturm (1999), abordados no levantamento bibliográfico.

Van de Walle (2001 apud Onuchic et al, 2014) enfatiza o uso da Resolução de Problemas como principal instrumento no ensino de Matemática. De acordo com seus estudos, essa prática é importante, visto que o ensino deve começar sempre considerando o conhecimento prévio dos alunos.

Polya (2006) recomenda, que no processo de ensino e aprendizagem, a resolução de problemas seja executada em quatro passos: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano e retrospectiva.

Apoiado nas abordagens de Onuchic et al (2014), em que elas desenvolveram um roteiro sugerindo que as atividades sejam organizadas em dez etapas (proposição do problema, leitura individual, leitura coletiva, resolução do problema, observar e incentivar, registro das resoluções na lousa, plenária, busca do consenso, formalização do conteúdo, proposição e resolução de novos problemas), partindo de um problema denominado “problema gerador”, cuja ideia central é construir um novo conceito matemático.

Nessa perspectiva, Zabala (1998) contribui com essa pesquisa quando propõe que as atividades sejam executadas de forma ordenada, estruturada e articulada a fim de alcançar os objetivos educacionais, sendo o caminho a ser trilhado conhecido pelo professor e pelos alunos. Outras contribuições têm-se quanto à importância da ampliação dos objetivos para abranger os diferentes tipos de conteúdo (conceituais, procedimentais e atitudinais), o planejamento e a avaliação de uma Sequência Didática.

Sturm (1999) defende que o ensino de Análise Combinatória se dê por meio de situações-problema. Favorecendo a construção de significados pela descoberta. Para o autor, as fórmulas devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução de problemas.

Parte-se do pressuposto de que o estudo apoiado nas abordagens dos autores supracitados tenha grande importância para o ensino e aprendizagem de AC no Ensino Médio. Nessa perspectiva, acredita-se que o desenvolvimento de atividades bem estruturadas, organizadas em etapas, vivenciadas através de situações-problema, fazendo uso de estratégias como o PFC e apoiadas na metodologia da Resolução de Problemas, contribui para o desenvolvimento do pensamento combinatório dos alunos de forma significativa.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Efetuada a coleta de dados de uma pesquisa, é necessário que se faça sua análise. Nesse estudo, os dados coletados serão descritos e interpretados segundo um panorama fenomenológico. Lima (2014) aborda que a fenomenologia é o discurso sobre aquilo que se mostra como é, buscando examinar, de forma rigorosa, a experiência humana, como uma ciência descritiva. Desse modo, a reflexão se faz necessária a fim de tornar realizável a observação das coisas assim como elas aparecem, descrevendo-as. Ainda apresenta que a fenomenologia é a investigação daquilo que é possível de ser conhecido e que está potencialmente presente no âmbito da investigação.

Segundo Bicudo (2010), a fenomenologia tem, como cerne, a busca do sentido que as coisas as quais estão à nossa volta fazem para nós. Para ela, é essa busca de sentido que faz a diferença, colocando-se como significativa principalmente no contexto da educação. Por isso, neste estudo, pretende-se compreender como uma Sequência Didática, envolvendo Resolução de Problemas pode contribuir para a aprendizagem dos princípios básicos de Análise Combinatória.

Optou-se pela fenomenologia como suporte para a compreensão dos fatos ocorridos no decorrer do estudo. A identidade dos participantes será resguardada ao analisar: a aplicação dos questionários; as observações das aulas e as atividades propostas.

Assim, para a análise dos dados serão selecionadas algumas atividades, utilizando alguns critérios para a escolha, na busca de responder à pergunta da pesquisa. Por esse motivo, apresenta-se uma seleção de situações e soluções que se julga serem relevantes para a análise dos dados. Nessa perspectiva, inicia-se, a seguir, a descrição dos dados coletados.

4.1 Descrição e análise do questionário informativo

No dia 09 de outubro de 2019 aconteceu o primeiro encontro com os alunos (que cursam o terceiro ano de Segurança do Trabalho na forma Integrada). Inicialmente, socializou-se os objetivos da pesquisa, a metodologia a ser utilizada, orientações acerca dos quatro passos para a resolução de um problema segundo George Polya e a definição de uma Sequência Didática. Em seguida, os quinze alunos responderam ao questionário informativo (apêndice A), e, por fim, buscaram, individualmente, solucionar os problemas propostos no questionário diagnóstico encontrado no apêndice B.

Esse encontro teve a duração de 100 minutos, a aplicação do questionário diagnóstico, Figura 5, iniciou faltando 60 minutos para o término da aula. Durante a aplicação do questionário diagnóstico, surgiram questionamentos e comentários como: “É assim que faz professor?”, “Esse assunto parece ser muito difícil”, “Pode dar número alto na segunda questão?”, “Professor não estou entendendo o que está pedindo na quarta questão.” O pesquisador sempre dialogava motivando e buscando fazer com que os alunos conseguissem olhar de forma diferente sua dúvida.

Figura 05 - Realização do questionário diagnóstico

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

O cenário refletido nesse momento era de silêncio, mas de certa inquietação por parte de alguns participantes que demonstravam pouca concentração. Após o percurso de meia hora, começaram a devolver os questionários, nesse momento quatro alunos entregaram. Por fim, os dois últimos entregaram o questionário 15 minutos após o término do tempo proposto, totalizando 75 minutos.

A fim de levantar resultados que contribuíssem para a realização de uma avaliação sobre os conhecimentos prévios dos alunos e também para identificar possíveis dificuldades de aprendizagem, o pesquisador realizou correções detalhadas dos questionários. As oito questões propostas no questionário envolviam os princípios básicos da Análise Combinatória (Princípio Fundamental da Contagem, Permutação, Arranjo e Combinação Simples).

Apresentam-se, a seguir, os dados coletados na pesquisa de campo. Inicialmente, será apresentado o perfil dos alunos – construído a partir da aplicação do questionário informativo – contendo dados sobre o componente curricular de matemática no processo de aprendizagem. Em seguida, será realizado um comentário geral relacionado aos problemas utilizados no questionário diagnóstico.

O questionário informativo traz 10 questões acerca de sexo, faixa etária, possíveis reprovações, tópicos matemáticos, Análise Combinatória e Resolução de Problemas. Num universo de 15 alunos, todos responderam ao questionário. Entre os sujeitos pesquisados 9 responderam ser do sexo masculino, 6 do sexo feminino e nenhum respondeu outro. Quanto à faixa etária, obtiveram-se respostas no intervalo entre 15 e 20 anos. A maioria respondeu que se encontrava na faixa etária de 17 a 18 anos (80%). É possível inferir que não há diferenças significativas entre as faixas etárias dos sujeitos pesquisados.

No que se refere à reprovação, quatro alunos responderam que foram reprovados na mesma série uma única vez, apenas um respondeu que foi reprovado duas vezes consecutivas na mesma série, os demais tiveram êxito em todos os anos letivos. Os alunos reprovados apontaram como possíveis motivos da reprovação: alguns problemas familiares, ausência de materiais didáticos que auxiliassem na compreensão dos conteúdos, dificuldade de organizar seus estudos, a falta de perspectiva de vida, desinteresse diante dos estudos e desmotivação.

Nota-se, entre os fatores que levaram a reprovação: a dificuldade de organização dos estudos; o desinteresse e a desmotivação. Segundo Polya (2006), no que se refere à resolução de problemas matemáticos, o professor que deseja desenvolver nos seus alunos tal habilidade, deve buscar motivá-los. Para ele, a motivação do aluno passa pelo interesse e por oportunidades de imitações e de práticas.

Os dados coletados mostraram que as reprovações tiveram, como causas, os baixos rendimentos em algumas disciplinas. Foram apontadas uma única vez, as seguintes: Matemática; Física; Biologia; Química; Inglês e Ciências, ao passo que Língua Portuguesa foi citada duas vezes.

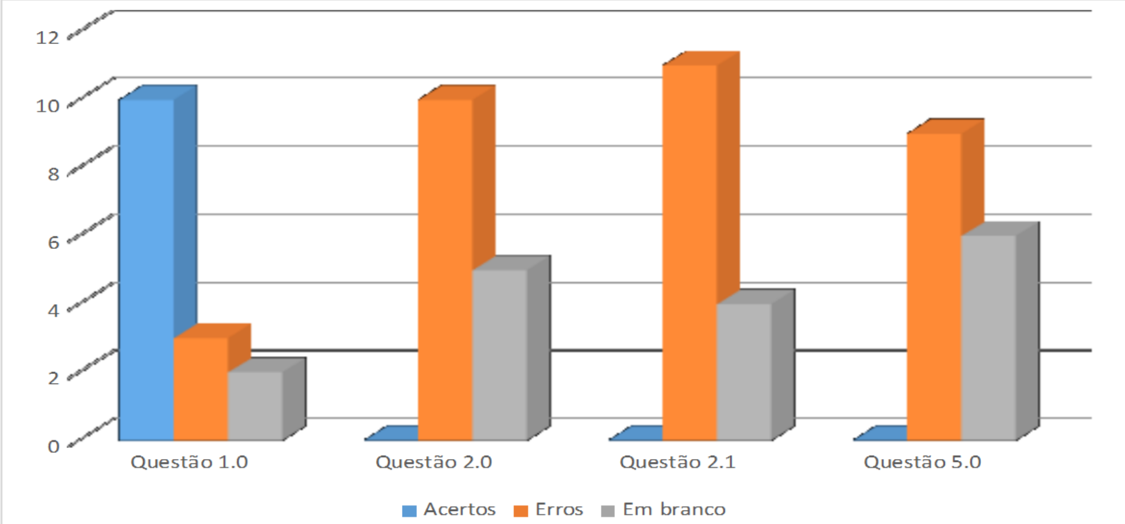
De acordo com os conteúdos vivenciados no Ensino Médio, os alunos apontaram aquele(s) que foi(ram) abordado(s) na sala de aula por meio de situações problemas. Quanto à alternativa que melhor caracterizava a relação do aluno com os conteúdos propostos de acordo com a resolução de problemas, 40% responderam que tinham dificuldades em resolver os problemas propostos, por não possuir uma boa base.

Quanto à percepção do conhecimento sobre Análise Combinatória, 46,67% responderam que nem faziam ideia do que se tratava; 46,67% tinha ouvido falar, mas não tinham noções; 6,66% tinham ouvido falar e que tinham noções básicas; nenhum respondeu que sabia resolver problemas simples de contagem. Diante da análise do desempenho em Resolver Problemas ao estudar Matemática, 73,34% classificaram como regular o desempenho, por apenas as vezes entender e conseguir resolver os problemas propostos. Todas essas informações contribuíram para a elaboração e vivência da Sequência Didática proposta.

4.2 Descrição e análise do questionário diagnóstico

Com o objetivo de perceber os conhecimentos prévios dos alunos e identificar dificuldades de aprendizagem, após aplicação e recolhimento dos questionários diagnósticos, o pesquisador realizou análises detalhadas. Como as oito questões propostas no questionário referem-se aos princípios básicos da Análise Combinatória, sendo duas questões de cada tópico, optou-se por construir dois gráficos, onde um contempla o Princípio Multiplicativo e Arranjo Simples (Gráfico 01), e o outro com Permutação Simples e Combinação Simples (Gráfico 02). Conforme segue:

Gráfico 01 - Desempenho nas questões de PFC (Q. 1.0 e 2.0) e de Arranjo Simples (Q.2.1 e Q. 5.0)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Com relação aos dados do Gráfico 01, pode-se perceber que a maioria dos sujeitos pesquisados demonstraram conhecimento em resolver apenas problemas simples envolvendo o PFC, que é o caso da primeira questão, representada na Figura 06:

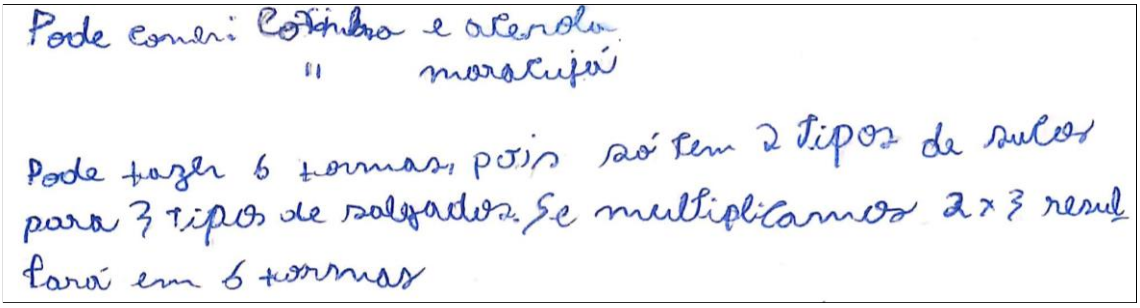
Figura 06 - Imagem da primeira questão do questionário diagnóstico

QUESTÃO 1.0: Giovanni faz a terceira série do Ensino Médio. É um aluno dedicado aos estudos. No que se refere ao lanche no Campus, sempre preferiu aqueles vendidos pela lanchonete particular ao invés dos oferecidos pela cantina da Instituição. Em um certo dia na lanchonete particular havia três tipos de salgados (coxinha, pastel e empada) e dois tipos de sucos (acerola e maracujá). De quantas maneiras Giovanni pode fazer um lanche com um tipo de salgado e um de suco?

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Essa questão foi a única das quatro analisadas que apresentou acertos, num total de dez. Acredita-se que o fato de estar dentro do contexto escolar dos alunos e envolver apenas pequenos cálculos, favoreceram a compreensão e resolução da questão. Isto se justifica com a resposta dada por um dos participantes, a qual se apresenta na Figura 07 a seguir:

Figura 07 - Resposta da primeira questão do questionário diagnóstico


Pode comer: Coxinha e acerola
" maracujá

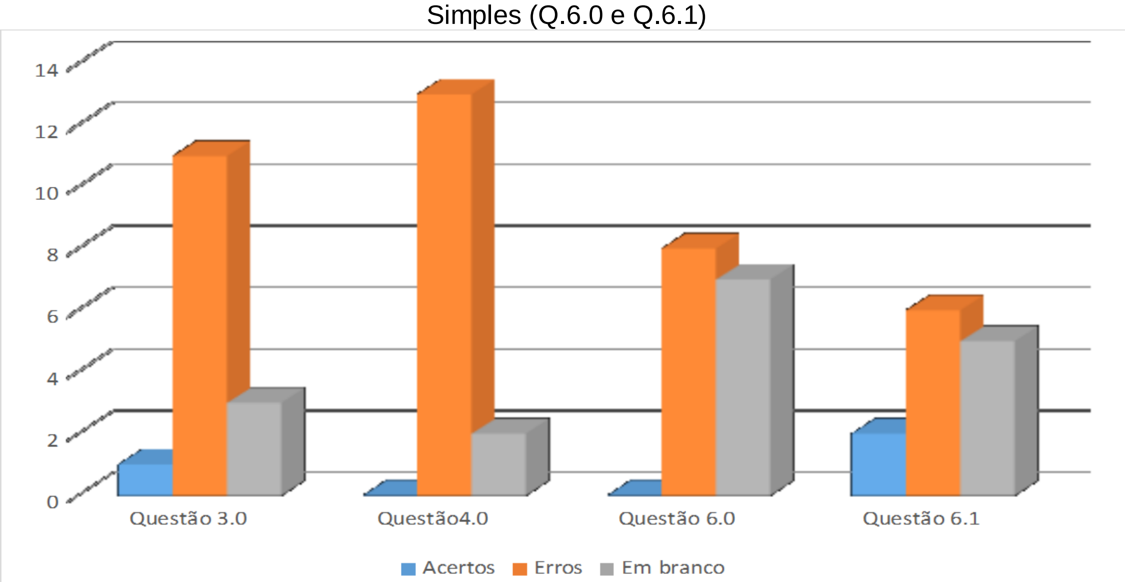
Pode fazer 6 formas, pois só tem 2 tipos de sucos para 3 tipos de salgados. Se multiplicarmos 2x3 resultará em 6 formas

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Nota-se que, na solução apresentada, o aluno utilizou a Zona de Desenvolvimento Proximal (Z.D.P.), conceito de Vigostsky, para solucionar a questão. Pois usou o nível real de desenvolvimento, o qual envolve aquilo que o aluno sabe ou é capaz de fazer sozinho. Nas demais questões, não houve acertos, analisando os registros das soluções, percebe-se respostas dadas apenas pelo produto entre dois números; outras com enumerações que permitiram encontrar algumas soluções, outras com respostas erradas que não possui justificativa; isso mostra o desconhecimento do tema em estudo.

No Gráfico 02, apresenta-se um panorama voltado para o rendimento dos alunos em estudo, relacionado às questões de Permutação Simples e Combinação Simples.

Gráfico 02 - Desempenho nas questões de Combinação (Q.3.0 e Q.4.0) e de Permutação Simples (Q.6.0 e Q.6.1)



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Analisando os dados do Gráfico 02, nota-se que a maioria dos alunos buscou resolver as questões, embora tivessem questões sem resposta. Ao observar os registros das respostas, constatou-se que foram apresentadas respostas incompletas no que se refere à enumeração dos casos possíveis; outras foram geradas aleatoriamente, sem justificativas. Isso demonstra o desconhecimento dos conceitos em estudo.

Nos dois gráficos, em todas as questões com exceção da primeira, o número de erros e de questões sem respostas superaram o número de acertos. Esse fato se justifica através das indicações apresentadas no questionário informativo, na Questão 09, em que todos não assinalaram a alternativa referente a “saberem resolver problemas simples de contagem”.

Quanto ao levantamento das dificuldades de aprendizagem, constatou-se: incompreensão do enunciado da questão, confusões em interpretações de enunciados; erros em operações envolvendo multiplicações e divisões; embaraços nas armações e enumerações dos elementos.

Considerando os objetivos traçados na introdução desse estudo e abordagens como a de Silva e Oliveira (2009), em que elas enfatizam ser importante valorizar o nível em que os alunos se encontram, suas habilidades e seus conhecimentos prévios. Compreendeu-se que os resultados delineados a partir das análises dos questionários (informativo e diagnóstico) foram de suma importância para a elaboração e sistematização da Sequência Didática, pois possibilitaram uma organização estruturada dos conteúdos a serem vivenciados e de seus níveis gradativos de dificuldades nas abordagens.

4.3 Descrição e análise dos resultados da sequência didática

Este tópico está dividido em três fases: na primeira, busca-se analisar os resultados acerca da primeira etapa da Sequência Didática, que se refere à investigação da evolução dos alunos sobre os conceitos e aplicações do Princípio Fundamental da Contagem e de Fatorial de um número natural. De forma análoga, na segunda fase, procura-se averiguar o desempenho em Arranjos Simples e Permutação Simples. E na terceira fase, analisa-se a última etapa da Sequência Didática, com foco na apreciação dos dados referentes à percepção de Combinações Simples.

Ressalta-se que as atividades de aprendizagem e os problemas geradores foram construídos e fundamentados no contexto social em que os alunos estão inseridos, como propõem Cardoso e Santos (2013, p. 05):

> Quando se trabalha com um modelo matemático que permite a formulação de problemas reais, provenientes do contexto social em que o aluno está inserido, constata-se um maior interesse tornando a aula agradável, pois existe diálogo entre professor e aluno. A interação entre o conhecimento do seu dia-a-dia, com as indagações lançadas pelo professor faz o aluno pensar produtivamente, tornando a Matemática viva.

Nessa perspectiva, a BNCC preconiza que, no Ensino Médio, os alunos devem desenvolver e mobilizar habilidades que serão úteis para resolver problemas ao longo de sua vida. Para isso, as situações problemas propostas precisam ter significado real para eles (BRASIL, 2017). Nesse sentido, além dos problemas geradores serem elaborados fundamentados no contexto social, algumas atividades propostas foram sistematizadas na forma de narrativa.

Todos os passos a serem vivenciados na Sequência Didática contribuem para a construção dessa explanação, que vai do momento inicial que é a leitura individual do Problema Gerador, juntamente com a aplicação das quatro etapas da Resolução de Problemas segundo Polya, até a formalização do conteúdo em estudo, apresentação de novas atividades e devolutiva[11] a partir da correção coletiva.

Justifica-se seguir esse caminho através da abordagem de Onuchic et al (2014), quando afirmam que, depois da formalização do conteúdo, novos problemas relacionados ao problema gerador devem ser propostos aos alunos. Pois eles possibilitam analisar se foram entendidos os elementos primordiais do conteúdo matemático vivenciado, bem como consolidar as aprendizagens delineadas nas etapas anteriores.

[11] Devolutiva a partir da correção coletiva ocorre quando o professor ao entregar a atividade corrigida, analisa coletivamente os resultados com a turma. Esse é um momento oportuno para verificar as dificuldades encontradas, as questões com maior ou menor índice de acerto e os tópicos de estudo que ainda precisam ser revisitados.

4.3.1 Descrição e análise da Sequência Didática – I etapa

No início da aplicação da primeira etapa, buscou-se motivar os alunos a utilizar as estratégias de resolução de problemas propostas por George Polya na realização das atividades. Como sugerem os PCN+ ao mencionar que a Resolução de Problemas é peça central para o ensino e aprendizagem em Matemática, uma vez que o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o aluno de forma ativa, está comprometido com o enfrentamento de desafios a ele propostos (BRASIL, 2002).

Então, cada aluno recebeu uma folha xerocopiada com o Problema Gerador, conforme está representado na Figura 08:

Figura 08 – Imagem do primeiro problema gerador

Problema Gerador

Uma alimentação saudável é benéfica tanto para o aspecto físico como mental... A ingestão diária de verduras, legumes, frutas e proteínas de baixa caloria são essenciais para manter uma boa alimentação. Os alimentos industrializados são ricos em gorduras saturadas, gorduras trans e sódio e pobres em vitaminas e minerais. No restaurante do Campus Juazeiro, foram oferecidos em um certo dia, os grupos de alimentos descritos na tabela abaixo:

Tabela nº. x: Grupos de alimentos na cantina do Campus

GRUPO		
A	**B**	**C**
Alface	**Arroz**	**Frango**
Cenoura	**Batata**	**Peixe**
	Feijão	

Fonte: Arquivo do pesquisador

Uma nutricionista recomendou a um aluno do Campus (Giovanni), que consumisse por refeição um alimento de cada grupo. De quantas maneiras diferentes esse aluno pode compor sua refeição, seguindo as orientações da nutricionista?

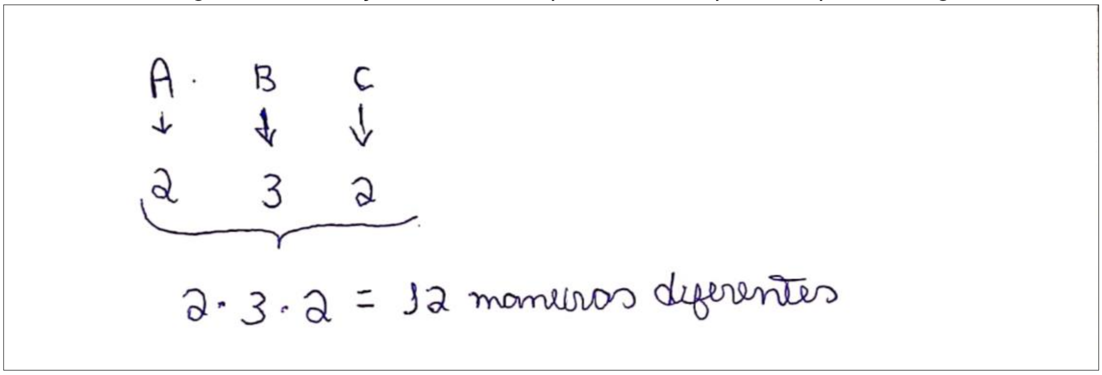
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Em seguida, foram dados dez minutos para lerem e resolverem individualmente o problema. Durante a resolução, vários alunos fizeram questionamentos na tentativa de obter uma solução para o problema, no entanto, a resposta dada pelo professor sempre foi com outra pergunta, buscando fazer com que eles conseguissem ver sua dúvida de outra forma. As indagações foram quase que na totalidade sobre multiplicações, se poderiam repetir os resultados, quais tipos de combinações de alimentos estariam corretos, entre outras. As perguntas devem ajudar “[...] discretamente, apenas indicando a direção geral, deixando muito para o estudante fazer” (POLYA, 2006, P. 3)

Para Trevizan e Brolezzi (2016), a aprendizagem só será efetiva se adquirida numa experiência pessoal. Assim como eles, acredita-se que uma proposta didática em que o aluno aprenda com sua própria atividade, promove o raciocínio matemático e, consequentemente, a aprendizagem.

Após todos resolverem e devolverem a folha com o problema proposto, o mesmo problema foi projetado na lousa, passando assim para o momento da plenária. Neste momento, foram disponibilizados outros dez minutos para discussão das fases segundo Polya a fim de chegarem a um consenso acerca da resposta certa. Nesse momento, alguns alunos foram convidados a expor suas ideias de resolução na lousa, estando certa ou não. A Figura 09 apresenta a solução encontrada pelo aluno D.

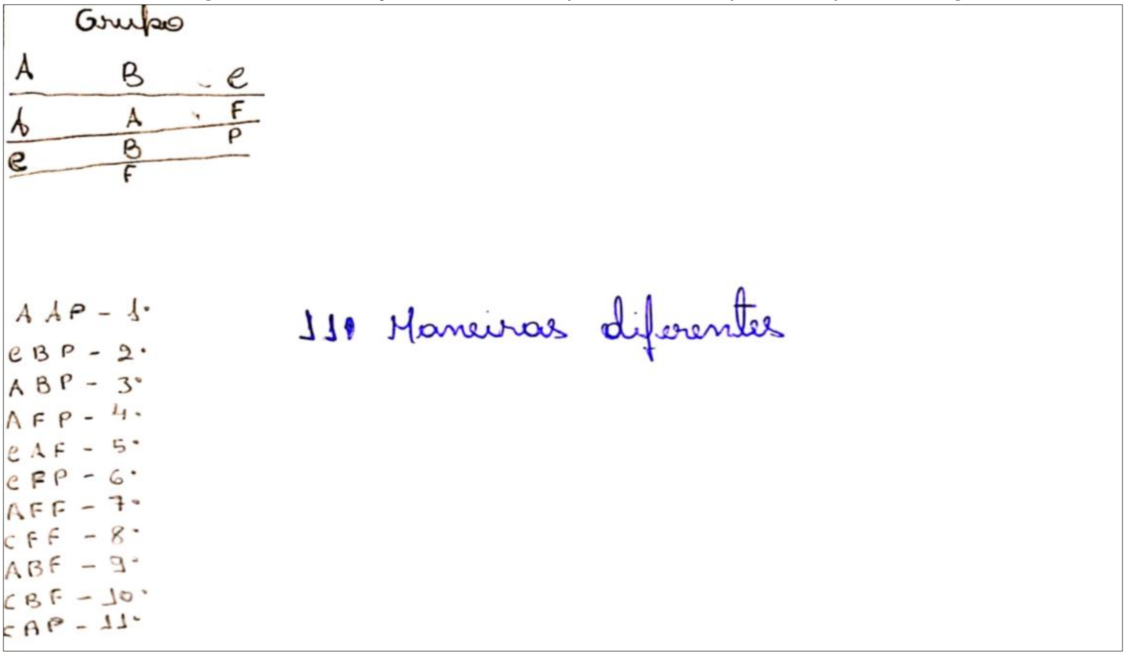
Figura 09 - Solução encontrada pelo aluno D, primeiro problema gerador



Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Nesse momento, ele contribuiu demonstrando, corretamente, como elaborou e executou seu plano na lousa, segundo os quatro passos sugeridos por Polya. A Figura 10 refere-se a tentativa do aluno E em encontrar a solução. Ele utilizou, como plano, a enumeração dos elementos; o procedimento está correto, mas ele acabou deixando de mencionar uma maneira de compor a refeição.

Figura 10 – Solução encontrada pelo aluno E, primeiro problema gerador

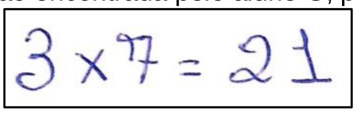


Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Na hora da plenária, o aluno E se posicionou comentando que tinha esquecido de uma maneira de compor a refeição, o pesquisador aproveitou o momento para enfatizar a importância da realização do retrospecto e das demais etapas, segundo Polya, em cada problema proposto.

Quatro alunos encontraram, como solução, o número 21, alguns se posicionaram descrevendo como raciocinaram, “somaram os 7 alimentos multiplicando depois por 3 que eram as categorias”. Dessa forma, estavam formando refeições com apenas um tipo de alimento, no entanto, o problema pedia que fosse com três alimentos, um de cada categoria. As respostas foram dadas similarmente. Apresenta-se a resposta do aluno G na Figura 11.

Figura 11 - Solução encontrada pelo aluno G, primeiro problema gerador



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Percebe-se, com as respostas similares dos quatro alunos, que houve equívocos. Tal fato pode ter ocorrido por falta de uma boa leitura e interpretação, além da aplicação do conceito de multiplicação fora do contexto do problema proposto. Handaya (2017) propõe que problemas com muitas informações devem ser lidos cuidadosamente mais de uma vez, buscando uma correta interpretação sendo solucionado passo a passo. Para transpor esse tipo de dificuldade, ele sugere que os alunos sejam habituados a ler e interpretar problemas.

Após os alunos chegarem a um consenso acerca da resposta certa do primeiro Problema Gerador, o pesquisador fez uma discussão a partir das respostas dadas pelos alunos do estudo do Princípio Fundamental da Contagem, buscando a aprendizagem e tentando suprimir as dificuldades apresentadas. Dessa forma, foram direcionadas perguntas à turma de modo que os alunos percebessem alguns erros cometidos. Acredita-se que, por meio desse diálogo, é possível conduzir a aula de maneira que eles mesmos digam qual é o erro conceitual ou procedimental, ocorrido. Entendendo o erro como uma ferramenta de aprendizagem.

Para melhor compreensão da estratégia de resolução de problemas, segundo Polya, para posteriormente fazer a sua aplicação durante a vivência da Sequência Didática, tomou-se como exemplo alguns problemas como o modelo encontrado no apêndice D.

Explorou-se a compreensão de problemas, enfatizando a importância de uma leitura atenta e da compreensão dos dados do problema. Superada essa fase, mostrou-se que deveria elaborar um plano de ação para solucionar um problema, fazendo uma ligação entre os dados do problema e o que ele pede de fato. A partir desse momento, o próximo passo seria executar o plano elaborado, verificando cada passo a ser realizado. Concluindo com a análise da solução encontrada e verificando os resultados, ou seja, fazendo o retrospecto.

Continuando a primeira etapa da Sequência Didática, retomou-se o estudo do PFC, seguidos da resolução de outros problemas com PFC e a formalização do conceito de Fatorial de um número Natural. Finalizada a formalização foi proposta uma atividade de aprendizagem (apêndice E) tendo quatro problemas, com o objetivo de ser resolvida individualmente, seguida pela devolutiva a partir da correção coletiva.

Ao entregar a atividade, o professor concedeu 30 minutos para solucioná-la. Em seguida, observou como os alunos respondiam. Nesse momento notou-se que realizavam a atividade sem solicitar a contribuição do professor. Após o término do encontro, todas as atividades foram recolhidas com o objetivo de realizar a devolutiva no encontro seguinte.

Iniciou-se o encontro subsequente devolvendo para os alunos as atividades realizadas no encontro anterior, enfatizando aspectos relacionados à aprendizagem e às dificuldades. Segundo Zabala (1998), a aprendizagem pode acontecer num processo de comparação, de revisão e de construção de esquemas de conhecimento dos conteúdos estudados.

Sendo assim, optou-se por fazer, nessa fase, uma devolutiva a partir da correção coletiva, buscando verificar as dificuldades encontradas e os tópicos de estudo que ainda necessitavam ser revisitados. Nessa perspectiva, a aluna M foi ao quadro e desenvolveu corretamente a solução do primeiro problema da atividade (Figura 12), aplicando, como plano, a Árvore de Possibilidades, não conhecida por ela e por outros colegas antes da formalização do conteúdo.

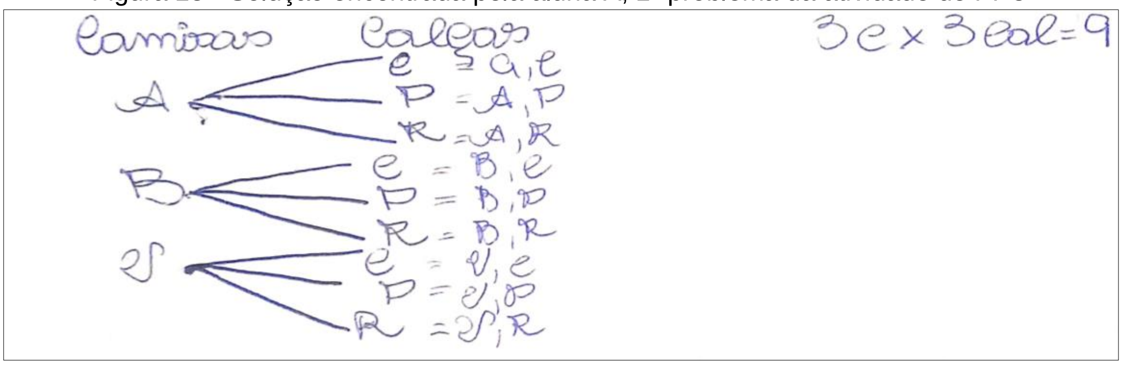
Figura 12 - Imagem do primeiro problema da atividade de PFC

1º. Giovanni precisa ir ao banco do Vale para abrir uma conta corrente. Após tomar banho, ele ficou na dúvida de qual roupa vestir, a dúvida surgiu entre 3 camisas de cores diferentes (azul, branca e verde) e 3 calças também de cores diferentes (cinza, preta e roxa). Quantas e quais são as opções que ele tem, sabendo que usará sempre uma calça e uma camisa?

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Outros alunos buscaram resolver o mesmo problema utilizando, como plano, a enumeração dos casos possíveis ou o Princípio Multiplicativo. Teve até quem resolvesse utilizar dois planos distintos, como se observa na Figura 13, a resposta da aluna A.

Figura 13 - Solução encontrada pela aluna A, 1º problema da atividade de PFC



Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Ela sinalizou ter elaborado os dois planos para facilitar o retrospecto. Todos os sujeitos compareceram nesse dia, apenas três erraram a solução do primeiro problema, dois somaram as peças de roupas encontrando seis como resposta e o terceiro cometeu erro no produto de 3 por 3 encontrando seis. Percebe-se, assim, que há dificuldades de interpretação e falta de atenção diante da verificação da resposta.

No segundo problema proposto (Figura 14), a maioria dos alunos perceberam que ficava inviável utilizar a árvore das possibilidades ou até enumerar os casos possíveis, devido ao grande número de casos favoráveis, chegando à conclusão de que a melhor forma de solucionar o problema seria aplicando, como plano, o Princípio Multiplicativo.

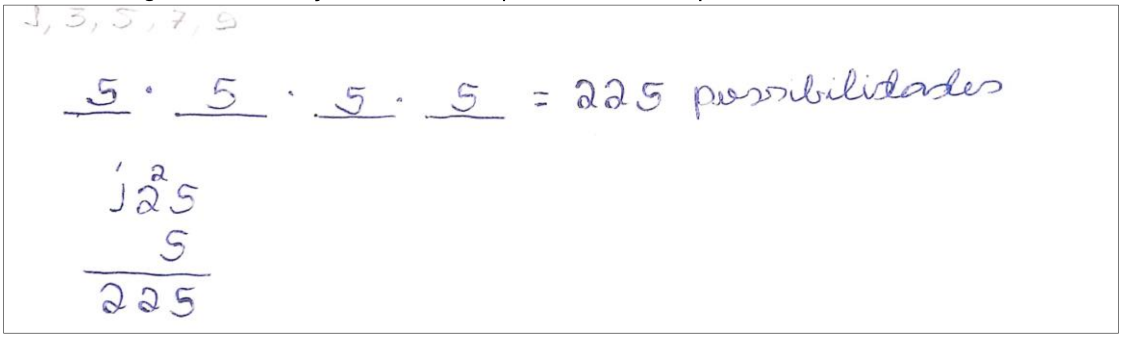
Figura 14 - Imagem do 2º problema da atividade de PFC

2º. Depois de entrar no banco do Vale e conversar com o gerente, Giovanni é encaminhado para outro setor, a fim de gerar uma senha. Sabendo que a referida senha tem que ter quatro dígitos e que Giovanni pretende preenchê-la apenas com algarismos ímpares, podendo haver repetição de algarismos. Quantas senhas no máximo ele poderá criar?

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Apenas dois participantes desenvolveram um plano diferente do princípio multiplicativo para resolver esse problema, os quais, sem sucesso, tentaram fazer uma árvore de possibilidades. Aos poucos, o pesquisador visualizava alguns objetivos serem alcançados, porém, dificuldades com relação à multiplicação ainda foi perceptível nesse momento, como se observa na resposta do aluno D na Figura 15:

Figura 15 - Solução encontrada pelo aluno D, 2º problema da ativ. de PFC



Fonte: Dados da pesquisa (2019)

O aluno D, ao perceber o erro cometido na multiplicação, comentou que precisa ser mais atencioso e que se tivesse realizado o retrospecto, o erro não tinha passado despercebido. Para Polya (2006), um bom resolvedor de problemas matemáticos tem, como a parte mais importante da sua atividade, o retrospecto da resolução completa, pois poderá verificar como trabalhou e a forma final da resolução, identificando aquilo que lhe trouxe dificuldade e o que lhe auxiliou.

Nesse momento de devolutiva, o pesquisador teve oportunidade de esclarecer os principais erros cometidos (multiplicações e confusões de operações) e as dificuldades de aprendizagem encontradas (interpretação dos problemas e contagens dos elementos), para solucionar os problemas propostos. Enfatizando a importância do entendimento do tópico em estudo (PFC), em meio ao processo de ensino e aprendizagem da AC e de sua aplicabilidade em situações práticas.

Depois da devolutiva, confrontando os resultados dessa atividade com o desempenho diante do problema gerador, avanços significativos foram observados. O principal foi a compreensão de como e quando deveriam aplicar o princípio multiplicativo. A aluna K, contribuindo com esse entendimento perguntou: “Então, professor, o melhor plano para se utilizar é o princípio multiplicativo, principalmente quando se tratar de contas grandes, né isso?”.

Constata-se que os alunos entenderam que elaborar planos como enumerar todas as possibilidades por exaustão, construir a árvore de possibilidades ou mesmo a tabela de dupla entrada serão estratégias inviáveis de execução em situações em que o número de possibilidades é elevado.

Alguns alunos ainda demonstraram uma certa resistência em utilizar as etapas de Polya, outros indagaram mencionando que não gostavam dessa metodologia em que tinham que resolver um problema antes da explicação do conteúdo por parte do professor. Percebe-se, com esses comentários, que esses alunos estavam acostumados com outras estratégias de resolução de problemas.

Nota-se, com a realização das atividades, que os erros de interpretação foram os mais comuns, apesar do avanço na compreensão de como aplicar o PFC. Assim como Pelizzari (2014), acredita-se que o hábito da leitura e interpretação, faz com que o aluno melhore o seu desempenho ao operacionalizar situações-problemas de forma exitosa. Sendo assim, incentivos de leituras e interpretações de outras situações-problemas com os conceitos estudados foram recomendados.

4.3.2 Descrição e análise da Sequência Didática – II etapa

Partindo do pressuposto de que, na primeira etapa, os alunos tenham compreendido, de forma satisfatória, o conceito de PFC e Fatorial de um número natural, avançou-se para a segunda etapa, com o objetivo de explorar o conceito de Arranjo Simples e de Permutação Simples. Iniciou-se essa etapa com a aplicação do segundo problema gerador (Figura 16), também de forma individual.

Figura 16 - Imagem do segundo problema gerador

O Problema Gerador

O Grêmio estudantil é uma organização importante dentro de uma instituição escolar. Ele permite que os alunos criem, discutam e fortaleçam várias possibilidades de ações no próprio espaço educacional, como também na sociedade. Os alunos do terceiro ano do Ensino Médio da sala de Giovanni, preocupados com algumas situações, resolveram reativar o grêmio estudantil. Começaram tentando constituir uma diretoria Pró-Grêmio, com o objetivo de conscientizar os pares sobre seus direitos e deveres.

Fonte: https://br.depositphotos.com/

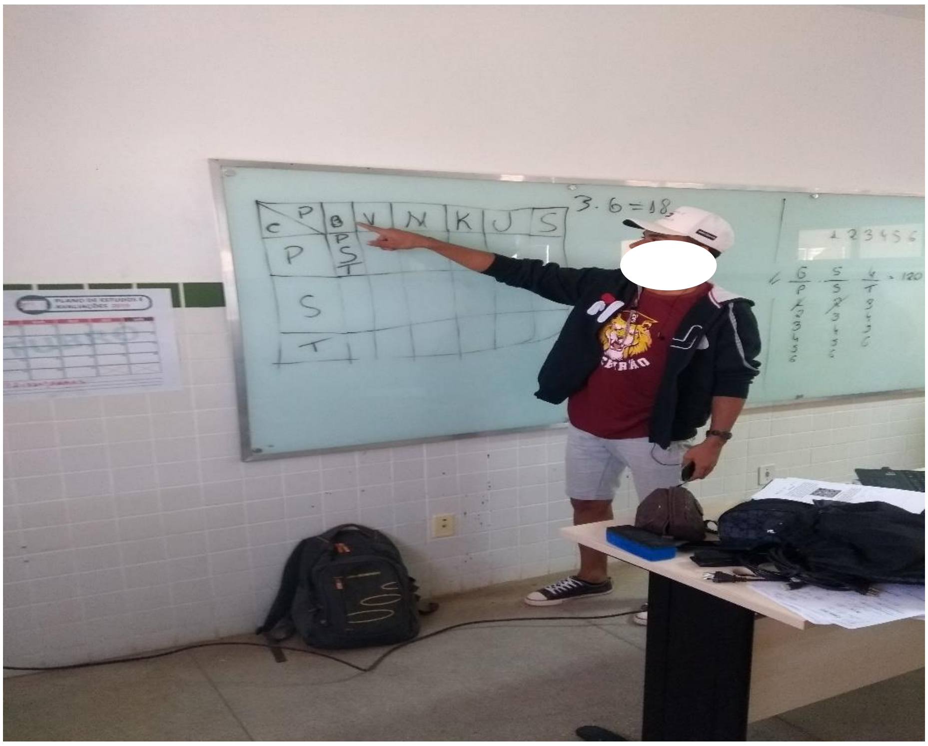
Conscientes e motivadas as alunas B, J, K, M, S e V, almejam fazer parte da suposta diretoria Pró-Grêmio. Sabendo que a referida diretoria deve ser formada por uma presidente, uma secretária e uma tesoureira. De quantas maneiras diferentes, será possível formar uma diretoria com as alunas supracitadas?

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Nesse dia, 14 alunos compareceram ao encontro, como estavam aos poucos se adaptando à metodologia de ensino proposta, logo se organizaram de forma individual e em fila. Sugeriu-se, então, que se fizesse uma leitura pausada e atenta do enunciado do problema proposto. Para isso, foi concedido 10 minutos para que todos pudessem ler e resolver o problema, o ambiente refletido pelos alunos era de um silêncio absoluto. Percebeu-se que, no percurso do tempo proposto para a realização da atividade, alguns participantes mostraram desejo em verbalizar indagações sobre o problema, porém, eles acabaram inibindo essa ação. Aos poucos, eles estavam compreendendo a metodologia e os objetivos desse estudo.

Passados os dez minutos, foi projetado, na lousa, o problema gerador proposto com o intuito de discutir e socializar as diversas respostas encontradas, buscando convergir para o consenso da resposta certa. Depois da leitura do enunciado pela aluna I, as tentativas de resolução do problema na lousa foram várias, com a aplicação de diferentes planos (árvore das possibilidades, enumeração, tabela de dupla entrada e o princípio multiplicativo), como se vê na Figura 17.

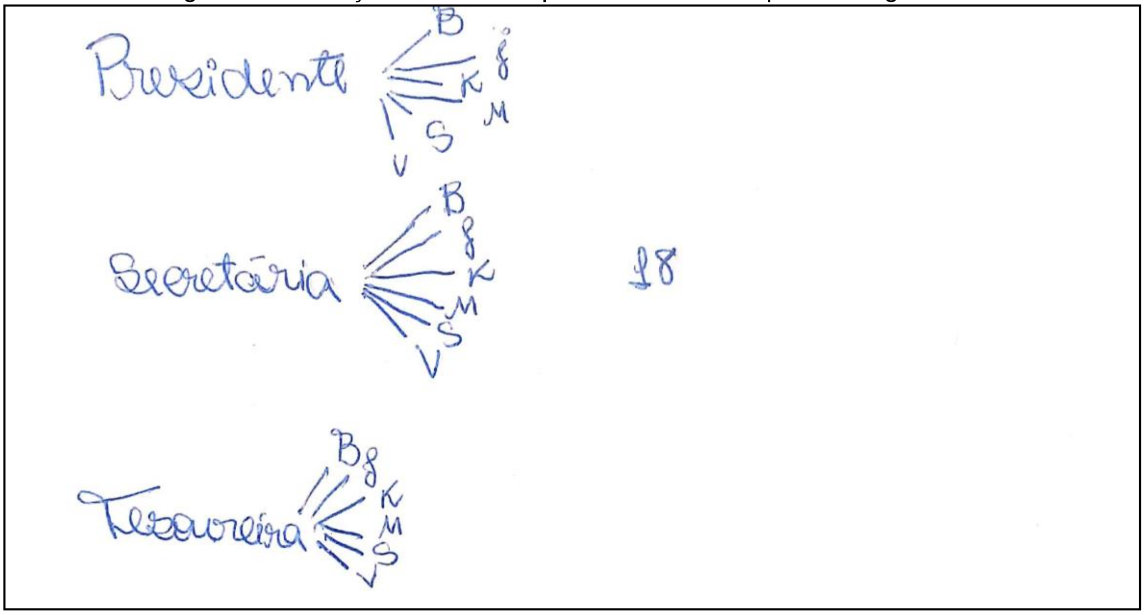
Figura 17 - Imagem de um momento da plenária do 2º problema gerador



Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Nesse momento de plenária, os alunos estavam mais à vontade para realizar qualquer questionamento, eles não demonstraram dificuldade de comunicação como a observada na primeira etapa, as participações passaram a fluir com grande naturalidade. Diante dessa realidade, as resoluções do segundo problema gerador e a plenária passaram a ser bem mais interativas. Na Figura 18, observa-se a resposta da aluna A, a qual buscou resolver o problema elaborando, como plano, a árvore das possibilidades.

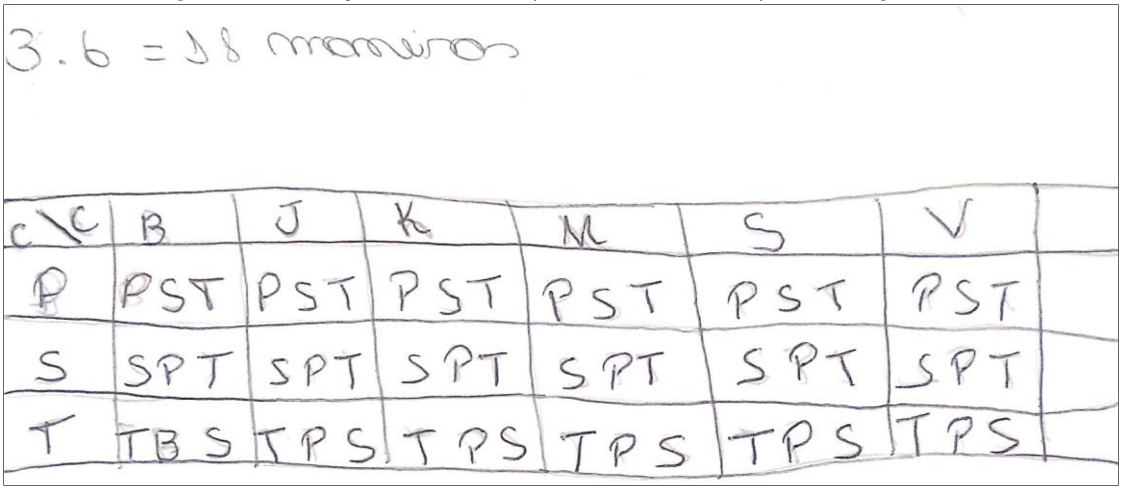
Figura 18 - Solução encontrada pela aluna A do 2º problema gerador



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A exposição dessa resposta na lousa gerou muita discussão entre os alunos, pois alguns discordaram do número de possibilidades encontradas, enquanto outros apoiaram, como foi o caso do aluno N. Ele apoiou a resposta da aluna A, mencionando que tinha encontrado a mesma resposta, chegando a elaborar, como plano, uma tabela de dupla entrada, a qual se vê na Figura 19.

Figura 19 - Solução encontrada pelo aluno N do 2º problema gerador

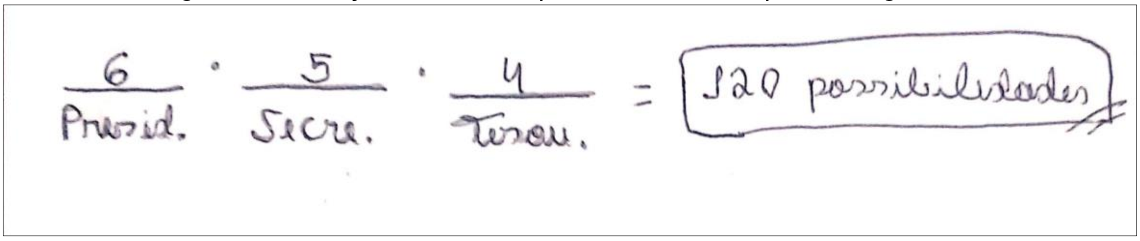


Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Nas duas situações anteriores, constata-se que houve erros de interpretação, pois os dois alunos entenderam que, como são três cargos a serem ocupados por qualquer uma das seis alunas candidatas, chegaram ao consenso de que a resposta seria dada pelo produto de 3 por 6, encontrando 18 casos possíveis.

Na Figura 20, tem-se a solução encontrada pelo aluno D, que utilizou, como plano, o Princípio Multiplicativo. Ao explicar na lousa a forma utilizada para solucionar o problema, alguns dos pares entenderam o caminho que deveriam ter percorrido. Na explicação, ele deixou claro que qualquer uma das 6 alunas poderiam ser escolhidas como presidente; realizada essa escolha, restariam 5 para a escolha da secretária e, por último, escolheria a tesoureira entre as 4 alunas restantes.

Figura 20 - Solução encontrada pelo aluno D do 2º problema gerador



Fonte: Dados da pesquisa (2019)

O tempo para registro das soluções na lousa e da plenária desse problema gerador durou em média 20 minutos, bem mais do que o tempo proposto (10 minutos), isto aconteceu porque a participação ativa dos alunos nas discussões em busca de um consenso foi unânime.

Os alunos envolviam-se, paulatinamente, com maior intensidade nas discussões, porém, percebeu-se que as dificuldades de interpretação ainda eram constatadas. Dos 14 participantes presentes, cinco resolveram o problema gerador corretamente, os outros 9 cometeram erros de interpretação, como os mencionados anteriormente. As ponderações entre eles ajudaram nas reflexões e colocações como: “Eu entendi como se faz agora” e “Realmente qualquer uma das seis poderia ser a presidente, após a escolha ficaria cinco como opção para secretária e assim vai”, foram relevantes.

Após as reflexões e a definição sobre um consenso da resposta certa, exibiu-se uma teleaula do Telecurso, iniciando a formalização do conceito de Arranjo Simples e de Permutação Simples. No percurso das explicações dos conceitos e resolução de problemas, priorizaram-se abordagens utilizando, como estratégia de solução, o PFC e, em seguida, abordagens utilizando as fórmulas. Como sugere Sturm (1999), ao apontar que o ensino de AC deve acontecer através de situações problema, tendo o PFC como recurso para resolver variados problemas de combinatória. Para ele, as fórmulas devem ser construídas e não ser tomadas, apenas, como um mero ponto de partida para a abordagem de cada tópico.

Em busca do fortalecimento da aprendizagem, após a formalização dos conceitos, foi aplicado individualmente uma atividade com quatro problemas (Apêndice F). O primeiro e o segundo versavam sobre o estudo de arranjo simples, ao passo que o terceiro e o quarto, sobre permutação simples. A opção por apresentar os problemas nessa configuração visou a fazer com que os alunos percebessem diferenças e estabelecessem, ao mesmo tempo, relações entre os conceitos envolvidos, bem como para que pudessem compreender a permutação como um caso particular de arranjo.

Com o transcorrer do projeto, percebeu-se o crescimento e um maior comprometimento dos alunos nos momentos vivenciados. Durante a aplicação dessa atividade, percebeu-se grande concentração, perguntas relacionadas a “como elaborar um plano” ou “como resolver o problema”, não aconteceram.

Todos entregaram suas atividades durante o intervalo recomendado (30 minutos).

Partindo para a observação e socialização dos resultados (devolutiva), constatou-se que os alunos, mesmo sabendo que o primeiro problema, Figura 21, se relacionava ao estudo dos arranjos simples, buscaram utilizar o PFC como estratégia de resolução.

Figura 21 - Imagem do 1º problema da atividade, arranjo simples


1º. Além de buscar reativar o Grémio estudantil, o terceiro ano buscou desenvolver algumas atividades a fim de arrecadar dinheiro para a festa de formatura. A primeira atividade desenvolvida foi um torneio interclasse, 5 equipes (A, B, C, D e E) se inscreveram. De posse dessas informações, de quantas maneiras diferentes, poderá ser formado com os três primeiros colocados o pódio?

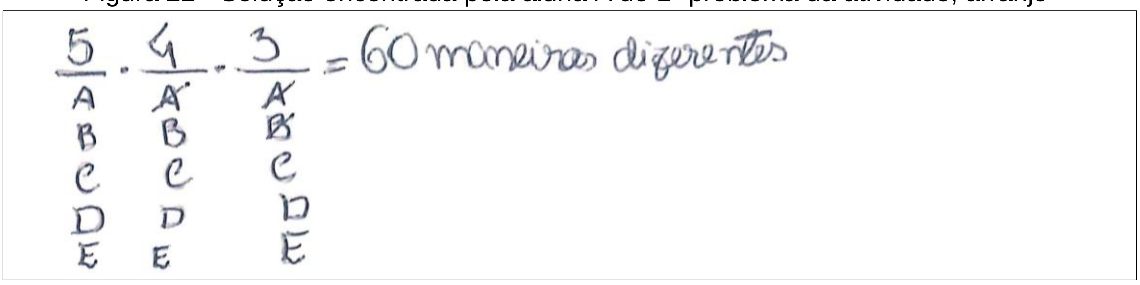
Fonte: https://atletasnow.com/como-ser-um-jogador-de-futebol/

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Constata-se o uso do PFC como estratégia de resolução ao observar soluções como a apresentada pela aluna A, Figura 22. Ela entendeu, interpretou e executou, corretamente, um plano a partir do princípio multiplicativo. Nota-se, também, que ela compreendeu, que nos casos de arranjos simples, o total de elementos do conjunto indicado são organizados em subconjuntos menores.

Dos quatorze participantes presentes, onze conseguiram resolver corretamente esse problema, aplicando, como plano, o princípio multiplicativo. Os outros três não tiveram êxito, visto que aplicaram o conceito de permutação de 5!, encontrando, como solução, o número 120. Percebe-se, mais uma vez, a presença da dificuldade de interpretação.

Figura 22 - Solução encontrada pela aluna A do 1º problema da atividade, arranjo


5 . 4 . 3 = 60 maneiras diferentes

A	A	A
B	B	B
C	C	C
D	D	D
E	E	E

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Durante a devolutiva, surgiram vários questionamentos como: “nos arranjos mudando a ordem dos elementos sempre aparecem novas possibilidades? ”, “nas permutações os elementos vão diminuindo até que o último elemento seja escolhido? ”.

Essas percepções foram fundamentais para que o pesquisador retomasse e enfatizasse a importância da compreensão de que os problemas propostos apresentavam certas características. As contribuições foram de grande relevância, visto que, a partir delas e das abordagens do pesquisador, várias dúvidas foram sanadas.

Utilizou-se o terceiro problema proposto, Figura 23, para explorar o campo das permutações simples e analisar o desempenho dos alunos nesse conteúdo.

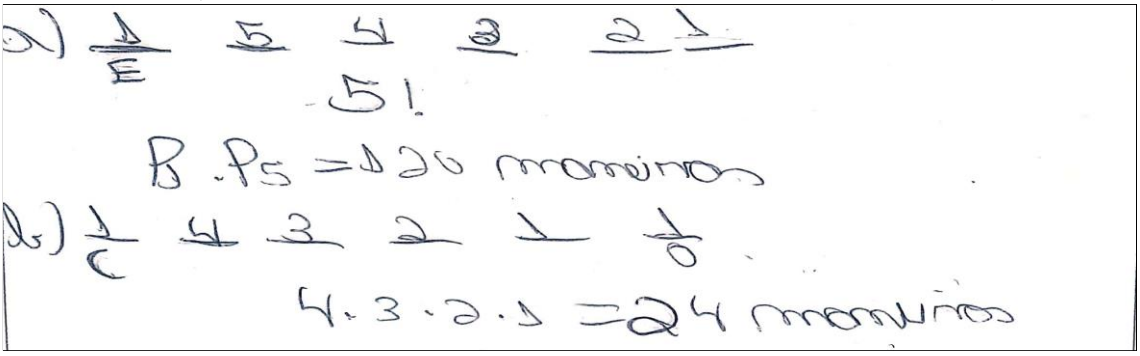
Figura 23 - Imagem do 3º problema da atividade, permutação

3º. Outra pergunta interessante mencionada no passa ou repassa foi sobre anagramas da palavra ESCOLA. Anagramas são palavras com ou sem sentido, por exemplo COLASE, OAECLS, LACOES, entre outros, são anagramas da palavra ESCOLA. O participante tinha que responder, quantos são os anagramas da palavra ESCOLA que: a) começam com a letra E e b) começam com a letra C e terminam com a letra O. Fundamentado nessas informações, ajude o participante, encontrando o número de anagramas da palavra ESCOLA, nas duas situações supracitadas.

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

De acordo com a resposta dada pelo aluno N, conforme figura 24, percebe-se que houve compreensão quanto à utilização de todos os elementos dos agrupamentos nos casos de permutação simples, ocorrendo apenas uma permuta nas posições ocupadas. Treze participantes tiveram esse mesmo entendimento, resolvendo corretamente o problema, somente um fez confusão nos cálculos, efetuando a permutação de 6!. Na ocasião, foi discutida, com ênfase, a importância de se considerar a permutação como um caso particular de arranjo, em que os elementos formam agrupamentos que se diferenciam apenas pela ordem.

Figura 24 - Solução encontrada pelo aluno N do 3º problema da atividade, permutação simples



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Particularidades como essas aplicadas pelos alunos A e N nos problemas supracitados, são essenciais no estudo dos conceitos de arranjo e permutação simples. Devido a essa relevância, tais particularidades foram amplamente exploradas durante a realização da devolutiva por parte do pesquisador com os alunos.

Mesmo com avanços na compreensão e elaboração de um plano para resolver problemas com arranjos e permutações, foi possível pontuar erros como: conhecimento do Princípio Multiplicativo, mas não sendo aplicado em situações possíveis e adequadas; utilização de forma equivocada do conceito de Permutação Simples e incompreensão do enunciado da situação-problema apresentada.

Com relação aos erros mencionados, sobretudo os recorrentes e que foram apresentados até o momento do percurso dessa Sequência Didática, foi realizada uma seleção e entregue, a cada aluno, na perspectiva de que pudessem analisá-los, identificando os pontos em que existiram equívocos.

Cada um dos erros listados reforça certa dificuldade à aprendizagem, contribuindo, de maneira contrária, para o bom desenvolvimento do aluno. Para Polya (2006), a resolução de problemas é uma habilitação prática como é a natação. Segundo o autor, adquire-se qualquer habilitação por imitação e prática.

Nessa perspectiva, durante a devolutiva, buscando tornar esse momento significativo para a aprendizagem e para a continuidade dessa Sequência Didática, à medida que cada problema estava sendo analisado, o pesquisador corrigia novamente, deixando clara a lógica da resposta certa e os critérios aplicados para a aferição. Observou-se, no fim dessa etapa, que uma maior atenção deveria ser direcionada na etapa seguinte, diante das dificuldades ainda apresentadas.

4.3.3 Descrição e análise da Sequência Didática – III etapa

A terceira e última etapa foi desenvolvida tendo como pressuposto a aplicação de problemas envolvendo a resolução de problemas com combinação simples, apoiado na utilização dos conhecimentos construídos nas etapas anteriores, os quais foram necessários para um bom desenvolvimento dessa fase, que, como as demais, teve o roteiro sugerido por Onuchic et al (2014) como procedimento metodológico, segundo o qual se propõe trabalhar o ensino através da resolução de problemas, segundo a heurística de George Polya.

Iniciaram-se os trabalhos com a proposição do terceiro Problema Gerador, Figura 25:

Figura 25 – Imagem do 3º Problema Gerador

Problema Gerador

Giovanni é um jovem consciente quanto aos seus direitos e deveres. Ele tem se dedicado muito para que aconteça a reativação do grêmio estudantil de sua escola. Mas, devido as grandes demandas assumidas, ele não estava se alimentado bem, pois o corre-corre estava demais. Essa realidade fez com que buscasse uma nutricionista e cumprisse as recomendações voltadas para uma dieta alimentar. Como ele está cursando a terceira série do Ensino Médio, outra preocupação surgiu, a necessidade de criar uma comissão que tratar-se das demandas relacionadas a organização da festa de colação de grau da sua turma. Em um certo dia de reunião, depois das colocações de Giovanni, cinco colegas da classe resolveram se candidatar (C, D, J, M e P), porém a turma decidiu que apenas três deles deveriam compor a comissão.

Fonte: https://br.freepik.com/vetores-premium

Diante dessa realidade, quantas comissões diferentes podem ser formadas com esses cinco estudantes para tratar dos assuntos referentes a festa de colação de grau da classe deles?

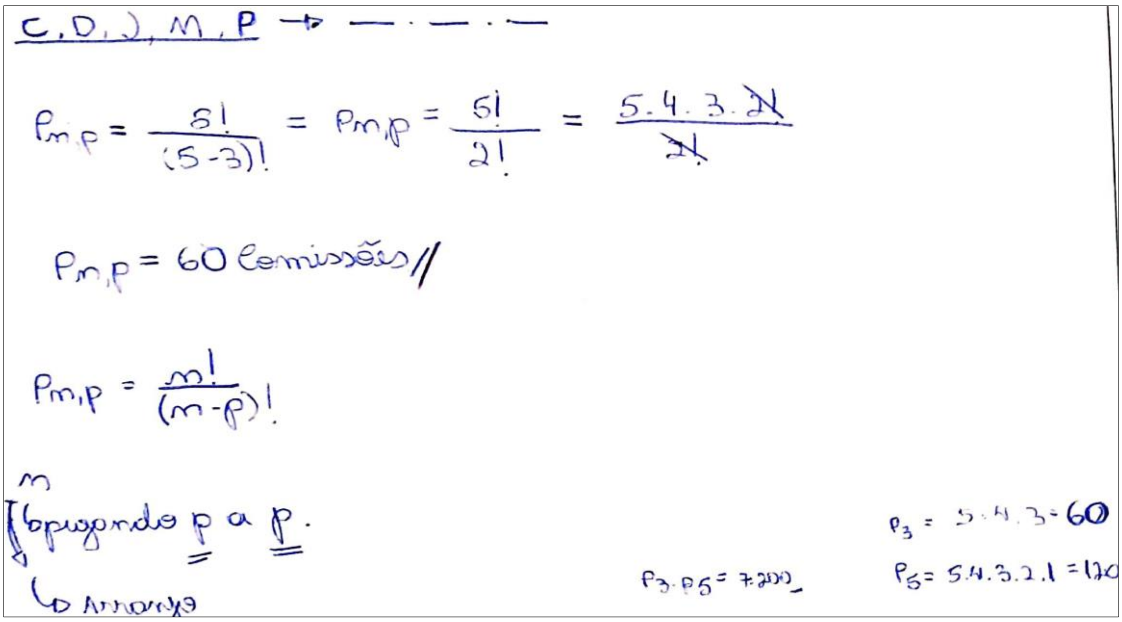
Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Assim como nas outras etapas, todos os participantes receberam uma folha com o enunciado do problema gerador, no percurso de dez minutos propostos, fizeram uma leitura cuidadosa, buscaram interpretar e solucionar o problema à luz dos quatro passos de Polya. Nesse momento, o silêncio e a concentração foram grandes, apesar de alguns participantes fazerem alguns comentários, como: “esse problema está muito fácil”, “com certeza existe alguma pegadinha”, e “esse enunciado é muito extenso, não precisava de tanto arrodeio [*sic*]”.

Até o final do tempo proposto, os 15 participantes resolveram e entregaram a folha com a possível resposta encontrada. Na sequência, o mesmo problema gerador foi projetado na lousa, a fim de que começasse a plenária. Dessa vez, o pesquisador leu o enunciado em voz alta e pausadamente. Essa releitura mais aprofundada contribuiu para que outros comentários surgissem, como: “realmente o problema estava muito fácil”, “tem ou não tem uma pegadinha, professor?”.

O pesquisador respondeu aos questionamentos pedindo contribuições para aqueles que quisessem expor sua resposta na lousa, muitos se prontificaram e acreditavam que tinham solucionado corretamente o problema. O aluno B colaborou mostrando seu raciocínio, elaborando o plano na Figura 26:

Figura 26 - Solução encontrada pelo aluno B do 3º problema gerador



C, D, J, M, P → — . — . —

$$P_{m,p} = \frac{5!}{(5-3)!} = P_{m,p} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.\cancel{2}}{\cancel{2}}$$

$P_{m,p} = 60$ Comissões //

$$P_{m,p} = \frac{m!}{(m-p)!}$$

m

Agrupando p a p.

↳ Arranjo

$P_3 = 5.4.3 = 60$

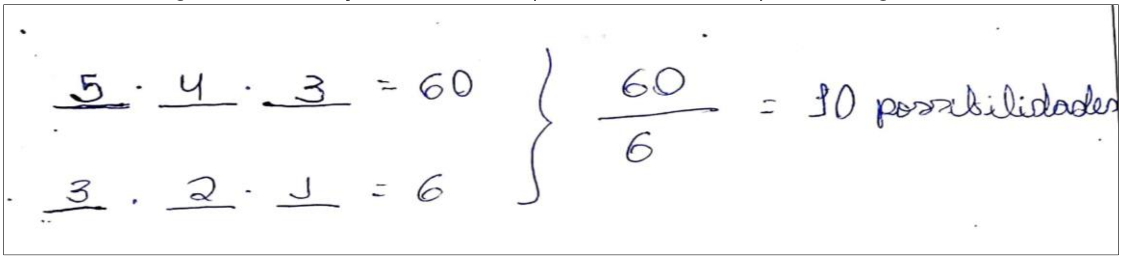
$P_5 = 5.4.3.2.1 = 120$

$P_3 . P_5 = 7200$

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Percebe-se que ele cometeu um equívoco ao aplicar a fórmula de arranjo simples, visto que a situação proposta é um problema de combinação simples, nesse caso, para solucioná-lo com êxito, deveria retirar as repetições. Além de ter feito confusão nas formas de representação das fórmulas de arranjo e permutação. A maioria dos alunos mencionou ter encontrado solução semelhante, 60 comissões, porém, aplicando o Princípio Multiplicativo. O pesquisador indagou perguntando se alguém tinha encontrado resposta diferente, logo o aluno D se prontificou a escrever, na lousa, a solução encontrada (representada na Figura 27):

Figura 27 - Solução encontrada pelo aluno D do 3º problema gerador



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Ao expor a solução na lousa, fez o seguinte comentário: “Inicialmente, o problema foi um pouco parecido com os demais, porém eu percebi que havia algumas particularidades nesse tipo de problema, por isso tive um pouco de dificuldade. Resolvi, porém, não sei se é dessa forma. Vi que para resolver eu deveria me atentar com as repetições entre os eleitos da comissão, porque a comissão formada, por exemplo, com C, P e D, é a mesma comissão formada por P, D e C”.

Dos 15 alunos, apenas o aluno D teve êxito ao encontrar a solução desse problema, os demais não perceberam ou não sabiam que a ordem dos elementos nos agrupamentos não produziria novas possibilidades. Dessa forma, percebeu-se que era preciso uma maior atenção por parte do pesquisador, nas abordagens em momentos como: formalização do conceito em estudo e devolutiva. Visto que, em se tratando de combinações, os alunos poderiam apresentar dificuldades diante da percepção de que a ordem dos elementos nos agrupamentos não geraria novas possibilidades.

Vale ressaltar que a participação dos alunos nas discussões foi positiva, visto que alguns até demonstraram certa insatisfação ao perceberem o erro cometido. Surgiram comentários como: “[…] é verdade, tem comissões se repetindo!”, “como pude errar essa questão, era muito fácil!” e “achei muito parecido com arranjo, na próxima não erro mais”.

Com isso, Zabala (1998) pressupõe que, para acontecer uma aprendizagem significativa, não basta que os alunos se encontrem frente a conteúdos, é essencial que, diante dos conteúdos, eles possam:

> [...] atualizar seus esquemas de conhecimento, compará-los com o que é novo, identificar semelhanças e diferenças e integrá-las em seus esquemas, comprovar que o resultado tem certa coerência etc. Quando acontece tudo isto [...] estão se estabelecendo relações não-arbitrárias entre o que já fazia parte da estrutura cognitiva do aluno e o que lhe foi ensinado. (ZABALA, 1998, p. 37)

Isso reforça que ao analisar os questionamentos supracitados pelos alunos, percebe-se que estavam atualizando seus esquemas de conhecimento, estabelecendo relações entre o que sabiam e o que estava sendo ensinado.

Após o consenso da resposta certa, iniciou-se a formalização do conceito de Combinações Simples com a exibição de uma teleaula do Telecurso, com o objetivo de habituar os alunos a aplicarem os conceitos estudados em seu cotidiano.

Dando continuidade a essa etapa da Sequência Didática, o pesquisador abordou o conceito de Combinação Simples, apontando diferenças entre os agrupamentos. Nesse momento, o aluno H pediu para o professor explicar, mais uma vez, a diferença entre arranjos e combinações. Então, esclareceu-se que os arranjos são caracterizados pela natureza e pela ordem dos elementos, enquanto as combinações são caracterizadas pela natureza dos elementos e exemplificou buscando sanar as dúvidas.

Para evitar que subconjuntos fossem contatos mais de uma vez, utilizou-se, como estratégia junto com o PFC, a divisão para eliminar os agrupamentos repetidos. Depois de algumas exemplificações, o pesquisador fez a demonstração da fórmula das combinações simples e a aplicou em outras situações-problema. Alguns alunos fizeram comentários acerca de qual plano de resolução adotariam, entre os dois estudados, por terem assimilado melhor.

Concluindo a formalização do conceito de combinação, o pesquisador ressaltou a importância de saber diferenciar os tipos de agrupamentos, para obter êxito ao aplicar os quatro passos de Polya. De acordo com Handaya (2017), o fato de não saber diferenciar os tipos de agrupamentos, até mesmo os mais básicos é uma das principais dificuldades de aprendizagem em combinatória.

Em seguida, buscando possibilitar uma aprendizagem satisfatória, sugeriu-se uma atividade com quatro problemas de combinação simples (apêndice G), a ser desenvolvida individualmente. Nesse momento da Sequência Didática todos sabiam da dinâmica a ser seguida. Houve grande silêncio, concentração e otimização do tempo proposto para realização da atividade, visto que todos a devolveram até o final do tempo estipulado que foi de 30 minutos.

Dando continuidade à terceira etapa da Sequência Didática, iniciou-se a devolutiva a partir das correções coletivas. O primeiro problema, Figura 28:

Figura 28 - Imagem do 1º problema da atividade, combinação simples

1º. Os cinco colegas da turma de Giovanni que se candidataram a fazer parte da comissão de formatura, são bons esportistas em várias modalidades. O professor de Educação física da turma, pretende escolher 2 deles para representar a escola em uma competição. De quantas maneiras o professor poderá fazer essa escolha?

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Ressalta-se que esse problema foi o mais discutido durante a devolutiva, isto porque houve erros de interpretação, de esquecimento de símbolo e de confusão no uso de fórmulas. A interação e participação nesse momento foram muito significativos diante da busca da aprendizagem. Na Figura 29, apresenta-se a solução encontrada pelo aluno C.

Figura 29 - Solução encontrada pelo aluno C do 1º problema da atividade, combinação simples

$$C_{n,p} = \frac{A_{m,p}}{p!}$$

$$A_{m,p} = \frac{m!}{(m-p)!}$$

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!}$$

$$A_{5,2} = \frac{5.4!}{3!}$$

$$A_{5,2} = \frac{5.4}{3.2.1}$$

$$A_{5,2} = \frac{20}{6}$$

$$A_{5,2} = 3,33$$

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Nota-se que o aluno C buscou utilizar, inicialmente, a fórmula das combinações simples, retirando as repetições nos agrupamentos. Porém, na sequência, cometeu equívoco aplicando somente a fórmula dos arranjos simples, sem retirar as repetições. No momento da socialização por parte do pesquisador, o aluno C mencionou que tinha interpretado errado, motivo do equívoco no uso das fórmulas.

Para Pereira (2013), a reflexão de uma atividade de maneira consciente diante da sua atuação é um fator importante para a aprendizagem. Em meio às abordagens e reflexões, o aluno D também se posicionou sobre o erro cometido, conforme a Figura 30.

Figura 30 - Solução encontrada pelo aluno D do 1º problema da atividade, combinação simples

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)\,p!} = \frac{5!}{(5-2)\,2!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2!}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2!}} = \boxed{20 \text{ possib.}}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Ele comentou que tinha deixado de usar o símbolo de fatorial, mesmo realizando o retrospecto, não tinha percebido o erro. De fato, ele buscou utilizar, como plano, a fórmula das combinações simples, porém, deixou de colocar o símbolo e calcular o fatorial do resultado da expressão (n – p). A aluna O contribuiu nas reflexões mencionando que preferiu utilizar o PFC como método para solucionar esse problema, disse que tinha encontrado o número dez como resposta e colocou sua solução na lousa, conforme Figura 31.

Figura 31 - Solução encontrada pela aluna O do 1º problema da atividade, combinação simples

$$C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2 \cdot 1} = 10$$

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Ao anotar a resposta na lousa ela comentou: “Utilizei, como plano, o PFC, tenho que escolher dois entre os cinco alunos, então tenho 5 opções para escolha do primeiro e quatro para escolha do segundo. Para representar a escola numa competição, por exemplo, escolhendo os alunos (A e B) ou (B e A), será a mesma coisa, por isso que dividi por 2!”. Percebe-se que ela eliminou corretamente as repetições nos agrupamentos; seu plano foi bem elaborado e executado. Segundo os PCN+, o ensino de Análise Combinatória deve conduzir o aluno a ser capaz de tomar decisões e de aplicar a estratégia mais condizente para contar todos os casos favoráveis em uma situação de combinatória (BRASIL, 2002).

A maioria dos alunos conseguiu identificar as diferenças entre os conceitos vivenciados nas etapas anteriores (Princípio Multiplicativo, Arranjo Simples e Permutação Simples) com o conceito de Combinação Simples apresentado nessa etapa da Sequência Didática. Porém, como foi mencionado anteriormente, erros de interpretação, de confusão na aplicação das fórmulas, esquecimento de símbolos, entre outros, ainda aconteceram nessa fase.

Diante dessa realidade, no momento da devolutiva, tais erros foram retomados pelo professor buscando contribuir no processo de ensino e aprendizagem. Segundo Gonçalves (2014), para que os professores, na condição de mediadores, possam obter melhores resultados nas suas práticas pedagógicas no ensino de Análise Combinatória, se faz necessário e imprescindível que saibam analisar os erros dos alunos, identificando em que momento do raciocínio combinatório eles cometeram equívocos.

Confrontando-se os dados obtidos nessa etapa com os dados da primeira, percebeu-se avanços, visto que todos os alunos buscaram resolver os problemas propostos, estando corretos ou não. Julga-se importante fazer essa ponderação porque foi perceptível a crescente participação no processo, fazendo um contraste com os dados coletados no questionário diagnóstico e no início da primeira etapa, em que alguns alunos mostraram certa resistência em resolver alguns problemas antes da explanação do conceito, entre tais problemas, destaca-se o primeiro problema gerador.

No decorrer da vivência dessa Sequência Didática, percebeu-se crescente comprometimento e desejo de realização das atividades propostas, também através do cuidado na busca pela resposta, mesmo pressionados pelo tempo e pela obrigatoriedade de entregar uma resposta, ainda que incerta e sem valer nota, foi visível esse cuidado. Com o tempo, notou-se que os alunos não davam respostas descompromissadas nos problemas geradores e nas atividades propostas, como aconteceu no questionário diagnóstico. Eles buscavam encontrar suas próprias respostas, seu próprio entendimento dos conceitos vivenciados.

Mesmo com os avanços mencionados, nessa etapa da Sequência Didática ainda ficou evidente que os alunos precisam recuperar conteúdos que não foram aprendidos em outros anos ou etapas do Ensino Básico e modificar seus hábitos de estudo. Exemplo claro, tem-se o fato de todos saberem o caminho a ser percorrido na aplicação da Sequência Didática, porém, na III etapa, apenas um aluno consegue executar corretamente um plano para solucionar o Problema Gerador. Isso mostra que pouco ou nenhum contato tiveram com o estudo de Combinação Simples antes do primeiro encontro dessa etapa.

Necessária é haver uma maior dedicação extraclasse para que o aprendizado de combinatória seja conscientemente fixado. Polya (2006) aponta que a Resolução de Problemas é uma habilitação prática, como é a natação. Para ele, adquire-se qualquer habilitação por imitação e prática, de modo que o aprendizado de resolução de problemas acontece com a prática de resolvê-los.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o desenvolvimento deste estudo pautado nas contribuições de uma sequência didática abordando Análise Combinatória, percebeu-se o quão é importante o professor refletir acerca do processo de ensino e aprendizagem, na medida em que ele pode contribuir com estratégias de ensino que ajudem os alunos a conceberem os conteúdos matemáticos de forma mais acessível.

Com o levantamento bibliográfico e a experiência do pesquisador, enquanto professor da Educação Básica, ficou mais evidente as principais dificuldades na aprendizagem de Análise Combinatória.

Nessa perspectiva, acreditou-se que a aplicação de uma Sequência Didática vivenciada segundo a metodologia da Resolução de Problemas de Combinatória poderia contribuir e facilitar o processo ensino-aprendizagem dos conceitos básicos de Análise Combinatória. As conclusões alcançadas a partir dos resultados coletados permitem inferir que essa pesquisa pode contribuir para solucionar a problemática apresentada.

Desde o início, buscando orientar esse estudo, teve-se como objetivo geral a proposição de uma Sequência Didática que auxiliasse na aprendizagem dos princípios básicos de Análise Combinatória, através da Resolução de Problemas. Assim, realizou-se o estudo com os alunos da terceira série do Ensino Médio do IFBA – Campus Juazeiro, pertencentes ao curso de Segurança do Trabalho.

Procurando aprofundar o campo da pesquisa por meio do levantamento bibliográfico, dos dados coletados e das análises. Constatou-se que o desenvolvimento de uma sequência de atividades ordenadas e articuladas, que se utiliza dos conhecimentos matemáticos para qualificar a compreensão dos alunos em relação aos princípios básicos de Análise Combinatória, favoreceu uma aprendizagem mais autônoma e mais próxima dos objetivos que se almejam nos documentos norteadores da educação básica.

Deste modo, delineou-se o primeiro objetivo específico do estudo: Identificar algumas dificuldades de aprendizagem, através da resolução de problemas com contagem. Logo, buscou-se construir um panorama das dificuldades de aprendizagem com os princípios básicos de AC. Para isso, aplicou-se um questionário informativo com a finalidade de coletar dados sobre o componente curricular de Matemática no processo de aprendizagem e um questionário diagnóstico objetivando coletar informações acerca da aprendizagem em AC por meio da Resolução de Problemas. Diante da aplicação e observação dos resultados desses instrumentos, pode-se constatar algumas dificuldades de aprendizagem, como: incompreensão do enunciado da questão, confusões em interpretações de enunciados; erros em operações envolvendo multiplicações e divisões; embaraços nas armações e enumerações dos elementos.

Com relação ao segundo objetivo específico (elaborar e aplicar uma sequência didática, envolvendo resolução de problemas, de modo a contribuir para a aprendizagem dos alunos), implementou-se a Sequência Didática a partir dos resultados apontados nos questionários, tendo em vista as dificuldades de aprendizagem apresentadas. Dessa forma, buscou-se levar em consideração os conhecimentos prévios dos alunos, elaborando atividades com níveis gradativos de dificuldades, visando a lograr resultados satisfatórios. A aplicação ou experimentação aconteceu em três etapas. Na primeira, como nas demais, os alunos tiveram contato, no princípio, com o problema gerador, em que o objetivo foi o de explorar um conceito a ser abordado no percurso da etapa, nesse caso, o Princípio Fundamental da Contagem. Na segunda, buscando aprofundar o estudo dos princípios básicos de AC, foram abordados os conceitos de Arranjo Simples e de Permutação Simples. Na terceira e última etapa, vivenciou-se o estudo das Combinações Simples. O planejamento e a vivência dessa Sequência Didática contribuíram para a promoção do conhecimento matemático e para a compreensão dos conteúdos abordados.

No terceiro e último objetivo específico (analisar as contribuições da sequência didática, na aprendizagem de Análise Combinatória, por meio da Resolução de Problemas), foram utilizados vários instrumentos para visualizar o desenvolvimento de cada aluno no desenrolar da pesquisa: anotações pessoais, observações, áudios, atividades entregues, filmagens. Como também questionamentos subjetivos por parte do professor, a fim de que os alunos apontassem, de forma escrita/oral, as dificuldades relacionadas às etapas da resolução de problemas e aos conceitos abordados. Outro fator importante para a análise das contribuições foi a estrutura da Sequência Didática, pois seu formato com abordagens dos conteúdos em etapas, favoreceu a compreensão do conteúdo a ser vivenciado na etapa seguinte.

Por último, a pergunta genérica apresentada no início como guiadora desse estudo: como uma sequência didática, envolvendo resolução de problemas pode contribuir para a aprendizagem de princípios básicos da Análise Combinatória?

Logo, destacaram-se as seguintes constatações: a) a superação da rejeição por alguns alunos em relação à nova abordagem, apresentação de um problema antes da formalização do conceito auxilia na aprendizagem; b) a participação ativa dos alunos nas plenárias contribuiu para o aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemática e da relevante construção de conhecimento sobre o conceito em estudo; c) as interações entre os alunos, nos momentos de busca do consenso da resposta certa para um problema, possibilitou a superação de dificuldades ou a uma percepção melhor, diante do confronto entre as respostas encontradas; d) a valorização das etapas da Sequência Didática fez com que os alunos se sentissem interessados para participar ativamente das atividades propostas; e) A aplicação de novos problemas relacionados ao problema gerador, após a fase de formalização do conceito, possibilitou consolidar aprendizagens construídas em fases anteriores e aprofundar o entendimento do conceito em estudo.

Fundamentado nas análises das atividades executadas antes das devolutivas, pode-se inferir que pouco utilizaram as fórmulas específicas de Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples, como plano para a resolução de problemas relacionados a esses tipos de agrupamentos. O uso do Princípio Multiplicativo como principal estratégia de resolução foi mais expressivo. Entende-se que essa realidade permitiu estabelecer relações entre os agrupamentos e o PFC o que possibilitou uma maior liberdade acerca da escolha das estratégias de resolução pelos alunos.

A Sequência Didática aplicada nessa pesquisa, utilizando como metodologia a Resolução de Problemas, no ensino da Análise Combinatória, apoiada nos quatro passos de George Polya, contribuiu para que os alunos se apropriassem dos conceitos básicos de Análise Combinatória de modo a lhes serem possibilitada a aprendizagem.

Espera-se que essa pesquisa possa contribuir com outras futuras investigações acerca do ensino e aprendizagem de AC e que a sequência didática contribua para o trabalho docente no processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória.

REFERÊNCIAS

ARAGÃO, J. W. M.; MENDES, M. A. H. **Metodologia Científica**. Salvador: UFBA, Faculdade de educação, Superintendência de Educação a Distância, 2017, 51p.

BABISNSKI, A. L. **Sequência Didática (SD):** Experiência no ensino da Matemática. 2017. 89f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade do Estado de Mato Grosso. Sinop, 2017.

BARROSO, J. M. **Conexões com a Matemática**. São Paulo: Moderna, 2010.

BICUDO, M. A. V. Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica*. In:* Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). **Filosofia da Educação Matemática**: Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. São Paulo: Editora UNESP, 2010, v.1, p. 23-47.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. (5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Matemática)**. Brasília: Ministério da Educação, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. BNCC - Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base. (Ensino Médio) Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC/SEB, 2017.

CABRAL, N. F. **Sequências Didáticas:** Estrutura e elaboração. Belém: SBEM/SBEM – PA, 2017.

CALDAS, S. D. T. **O Uso de Canções no Ensino-Aprendizagem da Matemática: Identificando os Conteúdos Conceituais, Procedimentais e Atitudinais**. 2013. XI ENEM. Curitiba: SBEM. Disponível em: https://cutt.ly/xhrfgaS Acesso em: 23 set. 2019.

CARDOSO, S. M. B; SANTOS, S. A. Os desafios da escola paranaense na perspectiva do professor: Contexto histórico e resolução de problemas em Álgebra e Geometria no 9º ano do Ensino Fundamental. Paraná: SEC, 2013

CAVALCANTI, L. B.; BRANCO J. C.; SANTOS L. M. S. **Arte de Resolver Problemas.** 2011. V Colóquio Internacional “Educação e Contemporaneidade”. São Cristovão, p. 03, 2011.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante Matemática**, v. 2. São Paulo: Edições SM, 2016.

CONCEIÇÃO, D. C.; PEREIRA. D. C.; SANTOS. M. L. S. O Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória: O Desempenho de Alunos de Belém do Pará*. In:* Encontro Nacional de Educação Matemática, 12, 2016, São Paulo. **Resumos...** São Paulo: SBEM, 2016.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática.** São Paulo: Ática, 2010.

DANTE, L. R. **Matemática:** Contexto & Aplicações, v. 2. São Paulo: Ática, 2010.

DO PRADO, M. Aparecida; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas/Teaching-Learning-Evaluation of Geometry through Problem Solving. **Acta Scientiae**, v. 12, n. 1, p. 24-42, 2010.

DORNELAS, A. C. B. Resolução de Problemas em Análise Combinatória: Um Enfoque Voltado para Alunos e Professores do Ensino Médio*. In:* Encontro Nacional de Educação Matemática, 7, 2004. Recife. **Resumos...** Recife: SBEM, 2004.

EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO. Inep. Disponível em: https://cutt.ly/Dhrdv82 Acesso em: 16 out. 2019.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. Disponível em: https://cutt.ly/chrfyz6 Acesso em: 16 de nov. 2019.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 5. Ed. São Paulo: Atlas, 2010. 184p.

GOMES, E. S. L.; LIMA, M. F.; SILVA, P. N. G. **Estudo e Pesquisa Monográfica**. João Pessoa: Universitária/UFPB, 2004.

GONÇALVES, R. R. S. **Uma Abordagem Alternativa para o Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio**. 2014. Dissertação de Mestrado – (SBM/IMPA). Rio de Janeiro 2014.

GUARDA roupas ... Disponível em: https://www.altoastral.com.br/10-dicas-look/. Acesso em: 15 maio 2018.

HANDAYA, A. Uma Reflexão sobre Dificuldade de Aprendizagem de Análise Combinatória. **Sinergia**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 13-17, jan./jun. 2017.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**, v. 2, 3 ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LIMA, A. B. M, org. **Ensaios sobre fenomenologia:** Husserl, Heidegger e Merleau-Ponty. Ilhéus: Editus, 2014.

LIMA, E. L.; CARVALHO P. C. P.; WAGNER E.; MORGADO A. C. **A Matemática do Ensino Médio**, Vol. 2. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. P. 137.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5 ed., São Paulo: Atlas, 2003.

MOL, R. S. Introdução à História da Matemática. Belo Horizonte: CAED – UFMG, 2013. Disponível em: https://cutt.ly/VhrfIVT Acesso em: 15 nov. 2019.

MORENO, A. C.; OLIVEIRA, E.; Brasil cai em ranking mundial de educação em matemática e ciências; e fica estagnado em leitura. **G1**, Rio de Janeiro, 03 dez. 2019. Educação. Disponível em: https://cutt.ly/UhrfJyM Acesso em: 25 de fev. 2020, 11:50.

MORGADO, A. C.; et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM 2006.

NUNES, A. I. B. L., SILVEIRA, R. N. **Psicologia da Aprendizagem,** 3 ed. Fortaleza: EdUECE 2015.

ONICHIC, L. L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, avanços e novas perspectivas. P. 73-98*. In:* **Boletim de Educação Matemática** (BOLEMA), v. 25, n. 41, dez. 2011. Universidade Estadual Paulista – Campus do Rio Claro. Ed. Comemorativa 25 anos. Disponível em: https://cutt.ly/Ehrgv9U Acesso em: 16 set. 2019 as 20:10 hs.

ONUCHIC, L. L. R.; et al. **Resolução de Problemas:** Teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

PAIVA, M. R**. Matemática,** v 2. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2010.

PAULA, M. A. S.; BARRETO, D. E. S. **Sequência Didática de Matemática com Livros Paradidáticos na Perspectiva de uma Avaliação Formativa e Reguladora.** XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo: SBEM, 2016. Disponível em: https://cutt.ly/8hrgR5j Acesso em: 23 de set. 2019 às 09:00 hs.

PELIZZARI, C. R**. A Importância de Interpretar Corretamente os Problemas no Ensino da Matemática.** Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE. Paraná: Secretaria de Educação 2014.

PEREIRA, A. C. O Ensino de Competências e a Graduação Superior Tecnológica: Conceitos e Associações. **Educ. & Tecnol.**, v. 18, n. 2, p. 9-23, maio/ago. 2013.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. 1945. Título em inglês: “Howto solve it: a new aspecto f mathematicalmethod”. Tradução de Heitor Lisboa Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

RIBEIRO, J. **Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia**. Vol. 2. São Paulo. Scipione, 2011. P 194

ROSSETTO, H. H. P. **Um resgate histórico**: a importância da História da Matemática. 2013. 38 folhas. Monografia de Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2013.

SANTOS, P. F. **Uma Abordagem da Análise Combinatória sem o uso abusivo de fórmulas**. 2013. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013.

SILVA, A. P. B.; OLIVEIRA, M. M. **A Sequência Didática Interativa como proposta para formação de professores de Matemática**. VII Enpec (Encontro Nacional de Pesquisas em Educação em Ciências). 2009. Florianópolis 8 de nov. 2009. Disponível em: https://cutt.ly/NhrgNKc Acesso em 22 de set. 2019.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, I. S. V. **Matemática:** Ensino Médio, v. 2, 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SOUZA, A. C. P. **Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino – Aprendizagem – Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.** 2010. Dissertação de Mestrado. São Carlos, 2010.

SOUZA, J. R.; GARCIA, J. S. R. **Contato Matemática**, v. 2. São Paulo: FTD, 2016.

STURM, W. **As Possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa.** 132p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) -Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Campinas, 1999.

TAVARES, C. S.; BRITTO, F. R. M. Contando a história da contagem. **Revista do Professor de Matemática**, SBM, v. 57, p. 33-40, 2005.

TREVIZAN, W. A.; BROLEZZI, A. C. **Como ensinar análise combinatória.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

ZABALA, A. **A prática educativa:** Como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A – ROTEIRO DE QUESTIONÁRIO INFORMATIVO

[Questionário Informativo]

OBJETIVO: Coletar informações sobre o componente curricular de matemática no processo de aprendizagem.

1. Qual seu sexo?
(A) masculino (B) feminino (C) outro

2. Marque a alternativa que corresponde a sua faixa etária.
(A) De 15 a 16 anos
(B) De 17 a 18 anos
(C) De 19 a 20 anos.
(D) Acima de 20 anos

3. Você já reprovou de ano em algum momento de sua trajetória estudantil?
(A) Nunca reprovei de ano **(Siga para a questão nº 06)**
(B) Sim, uma vez.
(C) Sim, duas vezes.
(D) Sim, mais de duas vezes.

4. Na sua concepção, quais os motivos que o/a tenha levado a reprovação?

(Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)	**Não**	**Sim**
4.1 Conteúdos difíceis de compreender.	(A)	(B)
4.2 Alguns problemas familiares	(A)	(B)
4.3 Metodologia de ensino não adequada	(A)	(B)
4.4 Algum(ns) problema(s) de saúde	(A)	(B)
4.5 Ausência de materiais didáticos que auxiliassem na compreensão dos conteúdos.	(A)	(B)
4.6 Desinteresse para com os estudos e desmotivação	(A)	(B)
4.7 Dificuldade de organizar meus estudos	(A)	(B)

4.8 Problemas de relacionamento com colegas de turma	(A)	(B)
4.9 A falta de perspectiva de vida.	(A)	(B)
4.10 Sobrecarga de atividades e disciplinas	(A)	(B)
4.11 Outro. Qual?		

5. Qual(is) da(s) disciplina(s) a seguir contribuiu(ram) para sua reprovação?

(A) Matemática
(B) Física
(C) Química
(D) Biologia
(E) Português
(F) Inglês
(G) Espanhol
(H) Artes
(I) Sociologia
(J) Filosofia
(K) Geografia
(L) História

6. No componente curricular de matemática do Ensino Médio, indique qual(is) tópicos/conteúdo(s) estudou?

(A) Estudo dos Conjuntos e Conjuntos numéricos
(B) Funções (Função Afim e Função Quadrática)
(C) Sequências (PA e PG)
(D) Geometria Plana
(E) Geometria Espacial
(F) Análise Combinatória (Contagem)
(G) Tópicos de Estatística
(H) Probabilidade

7. De acordo com os conteúdos assinalados na questão anterior, indique o(s) tópicos/conteúdos que foi(ram) abordado(s) na sala de aula por meio de situações problemas:

(A) Estudo dos Conjuntos e Conjuntos numéricos
(B) Funções (Função Afim e Função Quadrática)
(C) Sequências (PA e PG)
(D) Geometria Plana
(E) Geometria Espacial
(F) Análise Combinatória (Contagem)
(G) Tópicos de Estatística
(H) Probabilidade

8. Qual(is) da(s) alternativa(s) a seguir melhor caracteriza (m) a sua relação com os conteúdos propostos de acordo com a resolução de problemas?

(A) Tinha dificuldades em resolver, devido não ter uma boa base.

(B) Tinha dificuldades em resolver, por que não tem afinidade com a Matemática
(C) Resolvia parcialmente, com muito esforço
(D) Resolvia grande parte, por que tem facilidades com a Matemática

9. Qual dos itens a seguir define a sua percepção acerca do conteúdo matemático de análise combinatória?
(A) Não faço nem ideia do que se trata
(B) Já ouvi falar, mas não tenho noções
(C) Já ouvi falar e tenho noções básicas
(D) Sei resolver problemas simples de contagem.
(E) Sei resolver problemas diversos de contagem

10. Como você analisa o desempenho acerca da resolução de problemas ao estudar os conteúdos matemáticos?
(A) Ruim, pois não consegue interpretar e resolver enunciados.
(B) Regular, pois as vezes compreende e consegue resolver enunciados
(C) Bom, visto que compreende e consegue resolver vários enunciados.
(D) Ótimo, visto que sempre compreende e consegue resolver os enunciados.

APÊNDICE B – ROTEIRO DE QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

[Questionário Diagnóstico]

OBJETIVO: *Coletar informações acerca da aprendizagem em análise combinatória por meio da resolução de problemas.*

Prezado,

Este questionário é parte da realização de uma pesquisa. Peço que responda de acordo com as informações apresentas.

Agradeço a sua participação!

Atenciosamente,

Everaldo dos Santos Gonçalves

INFORMATIVO

Essa sequência acontece num contexto fictício, onde o aluno Giovanni, do Campus Juazeiro – BA, defronta – se constantemente com a necessidade de fazer contagens indiretas. Porém, refere –se a situações em que qualquer aluno (a) possa viver ou já tenha vivido no cotidiano.

Com muita atenção e calma busque resolver cada situação problema proposta a seguir:

QUESTÃO 1.0: Giovanni faz a terceira série do Ensino Médio. É um aluno dedicado aos estudos. No que se refere ao lanche no Campus, sempre preferiu aqueles vendidos pela lanchonete particular ao invés dos oferecidos pela cantina da Instituição. Em um certo dia na lanchonete particular havia três tipos de salgados (coxinha, pastel e empada) e dois tipos de sucos (acerola e maracujá). De quantas maneiras Giovanni pode fazer um lanche com um tipo de salgado e um de suco?

QUESTÃO 2.0: No mesmo dia Giovanni foi ao banco do Vale para abrir uma conta corrente, visto que foi inserido em uma das modalidades de bolsas e auxílio pelo PAAE (Programa de Assistência e Apoio ao Estudante). Como a senha da nova conta tem que ter quatro dígitos numéricos e pode haver repetições, quantas senhas podem ser criadas por Giovanni?

QUESTÃO 2.1: E se o funcionário do banco que atendeu Giovanni, dissesse que a senha tinha que ser formada por quatro dígitos numéricos diferentes. Quantas senhas distintas ele poderia criar?

QUESTÃO 3.0: Como Giovanni está na terceira série do ensino médio, a sua turma resolveu criar uma comissão para organizar uma festa de colação de grau. Seis colegas se candidataram (A, B, C, D, E e F), porém a turma definiu que apenas três formariam a comissão. Diante dessa realidade, quantas comissões podem ser formadas?

QUESTÃO 4.0: Após escolher os membros da comissão, a turma começou a trabalhar em prol da festa. De início planejaram vender, num certo dia no Campus, salada de frutas. Eles conseguiram grande quantidade de cinco tipos de frutas (banana, goiaba, maçã, pera e uva), mas resolveram fazer saladas utilizando apenas três tipos de frutas. Nessas condições, quantos tipos diferentes de saladas podem ser feitas?

QUESTÃO 5.0: Ainda com foco em busca de fundos para a realização da festa no final do ano letivo, a comissão organizou um campeonato de xadrez entre os alunos do Campus. O pódio será formado pelos três melhores, com medalha de ouro, prata e bronze. Depois de vários jogos e algumas eliminações, restaram oito alunos na competição. Com esses oito finalistas, quantos pódios diferentes podem ser formados?

QUESTÃO 6.0: Enquanto o campeonato de xadrez acontecia, Giovanni por gostar muito de Matemática, ficou mentalizando e rascunhando os anagramas da palavra XADREZ. Anagramas são palavras com ou sem sentido, por exemplo AEDRXZ, DRAEXZ, entre outros, são anagramas da palavra XADREZ. Fundamentado nessas informações, ajude Giovanni a encontrar o total de anagramas da palavra XADREZ.

QUESTÃO 6.1: Em um certo momento de raciocínio pela busca dos anagramas da palavra XADREZ, Giovanni começa a pensar diferente, fixando a letra X como a primeira do anagrama e Z como a última. Sendo assim, quantos anagramas ele poderia formar, nessa segunda situação?

APÊNDICE C – GABARITO DO QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

GABARITO DO QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

A seguir apresenta-se um comentário geral relacionado aos problemas utilizados no questionário diagnóstico.

QUESTÃO 1.0: Giovanni faz a terceira série do Ensino Médio. É um aluno dedicado aos estudos. No que se refere ao lanche no Campus, sempre preferiu aqueles vendidos pela lanchonete particular ao invés dos oferecidos pela cantina da Instituição. Em um certo dia na lanchonete particular havia três tipos de salgados (coxinha, pastel e empada) e dois tipos de sucos (acerola e maracujá). De quantas maneiras Giovanni pode fazer um lanche com um tipo de salgado e um de suco?

Possíveis respostas:

Por enumeração dos elementos:

coxinha e suco de acerola	coxinha e suco de maracujá
pastel e suco de acerola	pastel e suco de maracujá
empada e suco de acerola	empada e suco maracujá

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Pelo princípio multiplicativo:

3	**2**

Possib. de salgados x Possib. de sucos

Portanto: 3 x 2 = 6 possibilidades de fazer o lanche

A questão 1.0 foi construída com o objetivo de verificar se os alunos conseguiriam desenvolver o raciocínio combinatório por meio da enumeração de seus elementos, por um diagrama ou pelo princípio multiplicativo.

QUESTÃO 2.0: No mesmo dia Giovanni foi ao banco do Vale para abrir uma conta corrente, visto que foi inserido em uma das modalidades de bolsas e auxílio pelo PAAE (Programa de Assistência e Apoio ao Estudante). Como a senha da nova conta tem que ter quatro dígitos numéricos e pode haver repetições, quantas senhas podem ser criadas por Giovanni?

Possível resposta:

Pelo (P.F.C):

10	10	10	10

nº de possibilid. nº de possibilid. nº de possibilid. nº de possibilid.

Portanto: 10 x 10 x10 x 10 = 10.000 senhas podem ser criadas

Questão 2.1: E se o funcionário do banco que atendeu Giovanni, dissesse que a senha tinha que ser formada por quatro dígitos numéricos diferentes. Quantas senhas distintas ele poderia criar?

Possíveis respostas:

Pelo Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.)

10	9	8	7

nº de possibilid. nº de possibilid. nº de possibilid. nº de possibilid.

Portanto, como não pode haver repetição elimina-se um elemento a avançar uma casa: 10 x 9 x 8 x 7 = 5.040 tipos de senhas distintas

Por Arranjo Simples

Tem-se que n = 10 e p = 4, então:

$A_{n,p} = A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!} =$ 10.9.8.7 = 5.040 tipos de senhas distintas.

As questões 2.0 e 2.1 foram desenvolvidas com o intuito de constatar se os alunos possuíam habilidades em resolver problemas com Princípio Multiplicativo ou Arranjo Simples.

QUESTÃO 3.0: Como Giovanni está na terceira série do ensino médio, a sua turma resolveu criar uma comissão para organizar uma festa de colação de grau. Seis colegas se candidataram (A, B, C, D, E e F), porém a turma definiu que apenas três formariam a comissão. Diante dessa realidade, quantas comissões podem ser formadas?

Possíveis respostas:

Pelo Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.)

$$\frac{6}{possibilidades} \text{ x } \frac{5}{\text{possibilidades}} \text{ x } \frac{4}{possibilidades} = 120.$$

Os agrupamentos ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA, entre outros, representam a mesma comissão. Então, cada agrupamento está sendo repetido seis vezes. Logo, tem-se como resultado final:

$\frac{120}{6} =$ 20 comissões podem ser formadas

Por Combinação Simples

Tem-se que n = 6 e p = 3, logo:

$C_{n,p} = C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!3.2.1} = \frac{120}{6} =$ 20 comissões podem ser formadas.

QUESTÃO 4.0: Após escolher os membros da comissão, a turma começou a trabalhar em prol da festa. De início planejaram vender, num certo dia no Campus, salada de frutas. Eles conseguiram grande quantidade de cinco tipos de frutas (banana, goiaba, maçã, pera e uva), mas resolveram fazer saladas utilizando apenas três tipos de frutas. Nessas condições, quantos tipos diferentes de saladas podem ser feitos?

Possíveis respostas:

Pelo Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.)

$$\frac{5}{possibilidades} \text{ x } \frac{4}{\text{possibilidades}} \text{ x } \frac{3}{possibilidades} = 60.$$

As combinações uva, pera, maçã; uva, maçã, pera; pera, uva, maçã; pera, maçã, uva; maçã, uva, pera e maçã, pera e uva, entre outras, representam a mesma salada. Então, cada agrupamento está sendo repetido seis vezes. Logo, tem-se como resultado final:

$\frac{60}{6} =$ 10 tipos diferentes de saladas podem ser feitos.

Por Combinação Simples

Tem-se que n = 5 e p = 3, logo:

$C_{n,p} = C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3!}{3!2.1} = \frac{20}{2} = 10$ tipos de saladas diferentes podem ser feitas.

O objetivo da construção das questões 3.0 e 4.0 foi de averiguar se os alunos têm noção de como resolver situações onde o modelo dos agrupamentos é formado por subconjuntos em que a ordem e a escolha dos elementos não geram novas possibilidades.

QUESTÃO 5.0: Ainda com foco em busca de fundos para a realização da festa no final do ano letivo, a comissão organizou um campeonato de xadrez entre os alunos do Campus. O pódio será formado pelos três melhores, com medalha de ouro, prata e bronze. Depois de vários jogos e algumas eliminações, restaram oito alunos na competição. Com esses oito finalistas, quantos pódios diferentes podem ser formados?

Possíveis respostas:

Pelo Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.)

Como se trata de um pódio, tem-se:

$\frac{8}{1^{\underline{o}}\ lugar}$ x $\frac{7}{2^{\underline{o}}\ \text{lugar}}$ x $\frac{6}{3^{\underline{o}}\ lugar}$ $=$336 pódios diferentes.

Por Arranjo Simples

Tem-se que n = 8 e p = 3, portanto:

$A_{n,p}= A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8.7.6.5!}{5!} =$8.7.6 = 336 pódios diferentes**.**

A questão 5.0 foi desenvolvida com finalidade análoga da questão 2.1, que foi de constatar se os alunos possuíam habilidades em resolver problemas com Princípio Multiplicativo ou Arranjos Simples.

QUESTÃO 6.0: Enquanto o campeonato de xadrez acontecia, Giovanni por gostar muito de Matemática, ficou mentalizando e rascunhando os anagramas da palavra XADREZ. Anagramas são palavras com ou sem sentido, por exemplo AEDRXZ, DRAEXZ, entre outros, são anagramas da palavra XADREZ. Fundamentado nessas informações, ajude Giovanni a encontrar o total de anagramas da palavra XADREZ.

Possíveis respostas:

Pelo Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.)

Como se trata de anagramas da palavra XADREZ, tem-se:

$\frac{6}{1^{\underline{a}}\ letra}$ x $\frac{5}{2^{\underline{a}}\ \text{letra}}$ x $\frac{4}{3^{\underline{a}}\ letra}$ x $\frac{3}{4^{\underline{a}}\ letra}$ x $\frac{2}{5^{\underline{a}}\ \text{letra}}$ x $\frac{1}{6^{\underline{a}}\ letra}$ $=$720 anagramas.

Por Permutação Simples

Como a permutação de n elementos sem repetição é igual a n!, tem-se:

P_n= n! = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720 anagramas

QUESTÃO 6.1: Em um certo momento de raciocínio pela busca dos anagramas da palavra XADREZ, Giovanni começa a pensar diferente, fixando a letra X como a primeira do anagrama e Z como a última. Sendo assim, quantos anagramas ele poderia formar, nessa segunda situação?

Possíveis respostas:

Pelo Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.)

Já que a letra “X” fica fixa na primeira posição e a letra “Z” na última, só teremos permutação de quatro letras, portanto:

$\frac{1}{1^{\underline{a}}\ letra\ x}$ x $\frac{4}{3^{\underline{a}}\ \text{letra}}$ x $\frac{3}{4^{\underline{a}}\ letra}\ x\ \frac{2}{5^{\underline{a}}\ letra}$ x $\frac{1}{6^{\underline{a}}\ \text{letra}}$ x $\frac{1}{2^{\underline{a}}\ letra\ z} =$24 anagramas.

Por Permutação Simples

Como a permutação de n elementos sem repetição é igual a n!, tem-se:

P_n= n! = 4! = 4.3.2.1 = 24 anagramas

As questões 6.0 e 6.1 foram elaboradas com a finalidade de examinar o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos por meio do Princípio Multiplicativo ou por Permutação Simples.

APÊNDICE D – APLICAÇÃO DOS QUATRO PASSOS SEGUNDO POLYA

Exemplo Matemático

Para realização de um trabalho escolar, uma turma foi dividida em grupos de seis alunos. Se num dia de reunião de grupo, um aluno trocar um aperto de mão com todos seus colegas do grupo, quantos apertos de mão teve ao todo?

1ª etapa: compreender o problema

Antes de resolver o problema é preciso compreendê-lo, fazendo uma leitura atenta e respondendo a questões tais como: O que se pede no problema? Tem alguma palavra que eu não conheço? Quais são os dados e as condições do problema?

Dados do problema proposto

- Grupos com seis alunos
- Cada aluno dar um aperto de mãos aos demais

2ª etapa: elaborar um plano

Nesta etapa, é elaborado um plano de ação para solucionar o problema, fazendo uma ligação entre os dados do problema e o que ele pede de fato. Nessa fase pode-se fazer perguntas como: Já resolveu um problema como esse antes? É possível traçar um ou mais caminhos em busca da resposta?

Plano a: representação do problema dramatizando a situação.

Os seis alunos se cumprimentaram de verdade e marcaram a quantidade de apertos de mão no total.

Plano b: fazer uma lista

O primeiro cumprimenta 5 alunos, o segundo cumprimenta 4, o terceiro cumprimenta 3 e assim por diante, até o penúltimo cumprimentar o último.

Plano c: representação algébrica

Elaborar uma equação que modele a situação do problema.

3ª etapa: Executar o plano

Nessa etapa, é executado o plano elaborado, verificando cada passo a ser realizado.

Execução do plano b: fazer uma lista

Tomando-se como exemplo seis alunos (André, Bruno, Carlos, Damião, Edson e Fábio).

André	**Bruno**	**Carlos**	**Damião**	**Edson**	**Fábio**
Bruno	Carlos	Damião	Edson	Fábio	
Carlos	Damião	Edson	Fábio		
Damião	Edson	Fábio			
Edson	Fábio				
Fábio					

Considerando que o aluno que está na parte superior de cada coluna cumprimenta os demais da mesma coluna, tem-se:

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 \text{ apertos de mão}$$

Execução do plano c: representação algébrica

X = o número total de apertos de mão.

Como são seis alunos, cada um deu 5 apertos de mão nos demais, mas os apertos de mão estão sendo contado duas vezes, por que entre uma dupla de alunos só ocorreu um aperto de mão, logo tem-se que o dobro de apertos de mão é igual ao número de alunos multiplicado pelo número de apertos de mão de cada aluno.

$$2.\text{X} = 6.5$$

$$\text{X} = \frac{30}{2}$$

$$\text{X} = 15 \text{ apertos de mão}$$

4ª etapa: Fazer o retrospecto ou verificação

Nessa etapa, é analisada a solução encontrada e verificado os resultados.

Como são seis alunos, cada um cumprimentou os demais com um aperto de mão e entre uma dupla de alunos ocorreu apenas um aperto de mão, tem-se que o número de apertos de mão é igual a metade do produto entre o número de alunos e o número de apertos de mão de cada aluno, ou seja, metade do produto de 6 vezes 5 que é igual a 15. Após a apresentação desse exemplo, outros também foram desenvolvidos na lousa pelo professor.

APÊNDICE E – COMPETÊNCIAS E HABILIDADES-SEQUÊNCIA DIDÁTICA.

A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Colégio:______________________________________

Área do conhecimento: Matemática e suas tecnologias.

Tempo pedagógico: 9 encontros / 900 minutos aproximadamente.

Conteúdos: Princípios básicos de Análise Combinatória.

Competências:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e atuar no mundo, reconhecendo também que a Matemática, independentemente de suas aplicações práticas, favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da capacidade de produzir argumentos convincentes.

Solucionar situações-problema por meio da identificação de informações ou variáveis relevantes e possíveis estratégias para resolvê-las.

Habilidades:

Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

Identificar os dados relevantes e as relações envolvidas em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções.

Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabela.

Compreender e identificar situações do cotidiano que envolvam a ideia de conjunto, subconjunto e elementos de um conjunto.

Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

APÊNDICE F – I ETAPA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA – PRIMEIRA ETAPA

Princípio Fundamental da Contagem e Fatorial.

Tempo pedagógico: 3 encontros / 300 minutos aproximadamente.

Público: 3ª série do Ensino Médio

Objetivos: Desenvolver o pensamento combinatório por enumeração, por meio de diagrama de árvore e por meio de uma tabela de dupla entrada; compreender e aplicar o princípio fundamental da contagem; reconhecer o fatorial como o produto dos n números naturais consecutivos de n até 1, com $n \geq 2$; compreender as etapas para resolução de problemas.

Material Necessário:

Computador, datashow, caderno para anotações, pendrive com os slides, impressões, lousa branca, pincel para lousa branca, apagador, Caixa de som.

Desenvolvimento

Momento I:

Nessa Situação Didática I, será apresentado aos alunos as quatro etapas para a resolução de um problema, segundo George Polya, em seguida eles receberão impresso uma atividade com um problema gerador, que deverá ser resolvido individualmente. De acordo com Onichic et al (2014), uma das etapas apontadas para Resolução de Problemas é a seleção ou elaboração de um problema, denominado “Problema Gerador”, cujo objetivo é de introduzir um novo princípio ou conceito matemático, nesse caso o estudo do Princípio Fundamental da Contagem. Depois de todos devolverem a atividade proposta (no máximo 10 minutos). O mesmo problema, através de slides, será projetado na lousa, e serão feitos questionamentos por parte do professor. Nessa fase, o professor, será apenas um mediador, ou seja, deixará que os alunos exponham suas ideias e os direcionará para o conceito desejado.

Problema Gerador

Uma alimentação saudável é benéfica tanto para o aspecto físico como mental... A ingestão diária de verduras, legumes, frutas e proteínas de baixa caloria são essenciais para manter uma boa alimentação. Os alimentos industrializados são ricos em gorduras saturadas, gorduras trans e sódio e pobres em vitaminas e minerais. No restaurante do Campus Juazeiro, foram oferecidos em um certo dia, os grupos de alimentos descritos na tabela abaixo:

Tabela 02: Grupos de alimentos na cantina do Campus

	GRUPO	
A	**B**	**C**
Alface	**Arroz**	**Frango**
Cenoura	**Batata**	**Peixe**
	Feijão	

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Uma nutricionista recomendou a um aluno do Campus (Giovanni), que consumisse por refeição um alimento de cada grupo. De quantas maneiras diferentes esse aluno pode compor sua refeição, seguindo as orientações da nutricionista?

Momento II:

Nessa etapa o professor fará uma apresentação formal, organizada e estruturada em linguagem Matemática dos conceitos e procedimentos construídos através da resolução de problemas. Ele poderá utilizar as soluções propostas pelos alunos para formalizar a resolução do problema gerador, do conceito de Princípio Fundamental da Contagem e de Fatorial. Utilizando exemplificações e a exposição do algoritmo.

Momento III:

Após a exposição de exemplos diversos (formalização dos conceitos), será entregue e depois recolhida, uma atividade a ser resolvida de forma individual e em sala de aula, a fim de valorizar a experiência pessoal de cada aluno.

Atividade de Aprendizagem

1º. Giovanni precisa ir ao banco do Vale para abrir uma conta corrente. Após tomar banho, ele ficou na dúvida de qual roupa vestir, a dúvida surgiu entre 3 camisas de cores diferentes (azul, branca e verde) e 3 calças também de cores diferentes (cinza, preta e roxa). Quantas e quais são as opções que ele tem, sabendo que usará sempre uma calça e uma camisa?

2º. Depois de entrar no banco do Vale e conversar com o gerente, Giovanni é encaminhado para outro setor, a fim de gerar uma senha. Sabendo que a referida senha tem que ter quatro dígitos e que Giovanni pretende preenchê-la apenas com algarismos ímpares, podendo haver repetição de algarismos. Quantas senhas no máximo ele poderá criar?

3º. Enquanto conversava com o funcionário que lhe auxiliaria nos passos para a abertura da nova conta, Giovanni resolve mudar a senha, gerando-a ainda com algarismos ímpares, porém diferentes, ou seja, sem repetições de algarismos. Nessas condições, quantas senhas no máximo ele poderá gerar?

4º. Resolvido as pendências no Banco do Vale, Giovanni volta para sua casa. Como ele gosta de Matemática, foi se divertir resolvendo a seguinte situação problema: Quantos números entre 2.000 e 6.000 podem ser formados usando apenas os algarismos 1, 2, 3, 5 e 6, sem os repetir? Qual solução Giovanni encontrou?

Momento IV:

Nessa fase, uma aula após a aplicação da atividade, o professor realizará a devolutiva dela, a partir da correção coletiva, a fim de despertar funções que estão na zona de desenvolvimento proximal do aluno. Conceito de Vygotsky, que está relacionada à distância entre o que o aluno sabe ou consegue fazer só, daquilo que ele pode vir a aprender com a contribuição de outras pessoas, conhecido como desenvolvimento potencial.

Avaliação:

Serão feitos questionamentos subjetivos por parte do professor, a fim de que os alunos apontem de forma escrita/oral as dificuldades que tiveram relacionadas as etapas da Resolução de Problemas e referente ao conteúdo abordado. Eles também serão avaliados de acordo com as realizações das atividades; a participação ativa, suas contribuições diante do desenvolvimento das atividades propostas, entre outros.

APÊNDICE G – II ETAPA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA – SEGUNDA ETAPA

Arranjos Simples e Permutação Simples.

Tempo pedagógico: 3 encontros / 300 minutos aproximadamente.

Público: 3ª série do Ensino Médio

Objetivos: Identificar a natureza dos problemas de contagem (Arranjo simples e permutação simples); compreender e aplicar os conceitos e as fórmulas de permutação e arranjo simples; resolver situações-problema que envolvam (arranjo e permutação) para construção de argumentações; compreender as etapas para resolução de problemas.

Material Necessário:

Computador com software de apresentação e de exibição de vídeo, datashow, caderno para anotações, pendrive com os slides e o vídeo, impressões, lousa branca, pincel para lousa branca, apagador, Caixa de som.

Desenvolvimento

Momento I:

Nessa Situação Didática II, será apresentado aos alunos as quatro etapas para a resolução de um problema, segundo George Polya, em seguida eles receberão impresso uma atividade com um problema gerador, que deverá ser resolvido individualmente. De acordo com Onichic et al (2014), uma das etapas apontadas para Resolução de Problemas é a seleção ou elaboração de um problema, denominado "Problema Gerador", cujo objetivo é de introduzir um novo princípio ou conceito matemático, nesse caso o estudo de Arranjos Simples e Permutação

Simples. Depois de todos devolverem a atividade proposta (no máximo 10 minutos). O mesmo problema, através de slides, será projetado na lousa, e serão feitos questionamentos por parte do professor. Nessa fase, o professor, será apenas um mediador, ou seja, deixará que os alunos exponham suas ideias e os direcionará para o conceito desejado.

O Problema Gerador

O Grêmio estudantil é uma organização importante dentro de uma instituição escolar. Ele permite que os alunos criem, discutam e fortaleçam várias possibilidades de ações no próprio espaço educacional, como também na sociedade. Os alunos do terceiro ano do Ensino Médio da sala de Giovanni, preocupados com algumas situações, resolveram reativar o grêmio estudantil. Começaram tentando constituir uma diretoria Pró-Grêmio, com o objetivo de conscientizar os pares sobre seus direitos e deveres.

Fonte: https://br.depositphotos.com/

Conscientes e motivadas as alunas B, J, K, M, S e V, almejam fazer parte da suposta diretoria Pró-Grêmio. Sabendo que a referida diretoria deve ser formada por uma presidente, uma secretária e uma tesoureira. De quantas maneiras diferentes, será possível formar uma diretoria com as alunas supracitadas?

Momento II:

Nessa etapa o professor fará uma apresentação formal, organizada e estruturada em linguagem Matemática dos conceitos e procedimentos construídos através da resolução de problemas. Ele poderá utilizar as soluções propostas pelos alunos para formalizar a resolução do problema gerador, do conceito de Arranjos Simples e do conceito de Permutação Simples. Para enaltecer a compreensão do conceito de Permutação Simples, será exibido a teleaula de número 49 do Telecurso, que está disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=uxICDUCWYFM. Em seguida haverá outras exemplificações e a exposição dos algoritmos.

Momento III:

Após a exposição de exemplos diversos (formalização dos conceitos), será entregue e depois recolhida, uma atividade a ser resolvida de forma individual e em sala de aula, a fim de valorizar a experiência pessoal de cada aluno.

Atividade de Aprendizagem

1º. Além de buscar reativar o Grémio estudantil, o terceiro ano buscou desenvolver algumas atividades a fim de arrecadar dinheiro para a festa de formatura. A primeira atividade desenvolvida foi um torneio interclasse, 5 equipes (A, B, C, D e E) se inscreveram. De posse dessas informações, de quantas maneiras diferentes, poderá ser formado com os três primeiros colocados o pódio?

Fonte: https://atletasnow.com/como-ser-um-jogador-de-futebol/

2º. A segunda atividade desenvolvida foi uma “manhã de entretenimento e conhecimento”, em que iria acontecer várias atividades envolvendo danças, jogos de tabuleiros e o jogo de perguntas e respostas, também conhecido como passa ou repassa. Uma das perguntas, no passa ou repassa foi para encontrar quantos e quais são os números formados por dois algarismos distintos que podem ser escritos com os algarismos 0, 2, 4, 6 e 9? Quais foram as supostas respostas encontradas por um aluno que respondeu corretamente?

3º. Outra pergunta interessante mencionada no passa ou repassa foi sobre anagramas da palavra ESCOLA. Anagramas são palavras com ou sem sentido, por exemplo COLASE, OAECLS, LACOES, entre outros, são anagramas da palavra ESCOLA. O participante tinha que responder, quantos são os anagramas da palavra ESCOLA que: a) começam com a letra E e b) começam com a letra C e terminam com a letra O. Fundamentado nessas informações, ajude o participante, encontrando o número de anagramas da palavra ESCOLA, nas duas situações supracitadas.

4º. Entre tantas ações em prol da formatura, os alunos idealizaram fazer uma rifa com sete DVDs diferentes que ganharam como patrocínio de alguns professores. Quatro eram de música clássica e três de música popular brasileira, no dia do sorteio uma aluna organizou os objetos, colocando-os lado a lado em um porta-DVDs. Em quantas sequências diferentes esses DVDs podem ser dispostos de modo que os de música clássica fiquem juntos e os de música popular também fiquem juntos?

Fonte: https://www.datasupriweb.com.br/

Momento IV:

Nessa fase, uma aula após a aplicação da atividade, o professor realizará a devolutiva da mesma, a partir da correção coletiva, a fim de despertar funções que estão na zona de desenvolvimento proximal do aluno. Conceito de Vygotsky, que está relacionada à distância entre o que o aluno sabe ou consegue fazer só, daquilo que ele pode vir a aprender com a contribuição de outras pessoas, conhecido como desenvolvimento potencial.

Avaliação:

Serão feitos questionamentos subjetivos por parte do professor, a fim de que os alunos apontem de forma escrita/oral as dificuldades que tiveram relacionadas as etapas da Resolução de Problemas e referente ao conteúdo abordado. Eles também serão avaliados de acordo com as realizações das atividades; a participação ativa, suas contribuições diante do desenvolvimento das atividades propostas, entre outros.

APÊNDICE H – III ETAPA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA – TERCEIRA ETAPA

Combinação Simples.

Tempo pedagógico: 3 encontros / 300 minutos aproximadamente.

Público: 3ª série do Ensino Médio

Objetivos: Resolver Problemas de Contagem utilizando noções de Combinação Simples; aprender a organizar, combinar e permutar um conjunto e subconjunto de elementos de maneiras diferentes, com e sem importância de ordem; habituar os alunos a trabalharem com possibilidades e condições que poderão ser colocadas em prática em seu cotidiano; compreender as etapas para resolução de problemas.

Material Necessário:

Computador com software de apresentação e de exibição de vídeo, datashow, caderno para anotações, pendrive com os slides e o vídeo, impressões, lousa branca, pincel para lousa branca, apagador, Caixa de som.

Desenvolvimento

Momento I:

Nessa Situação Didática III, será apresentado aos alunos as quatro etapas para a resolução de um problema, segundo George Polya, em seguida eles receberão impresso uma atividade com um problema gerador, que deverá ser resolvido individualmente. De acordo com Onichic et al (2014), uma das etapas apontadas para Resolução de Problemas é a seleção ou elaboração de um problema, denominado “Problema Gerador”, cujo objetivo é de introduzir um novo princípio ou conceito matemático, nesse caso o estudo de Combinação Simples. Depois de todos devolverem a atividade proposta (no máximo 10 minutos). O mesmo problema, através de slides, será projetado no quadro, e serão feitos questionamentos por parte do professor. Nessa fase, o professor, será apenas um mediador, ou seja, deixará que os alunos exponham suas ideias e os direcionará para o conceito desejado.

Problema Gerador

Giovanni é um jovem consciente quanto aos seus direitos e deveres. Ele tem se dedicado muito para que aconteça a reativação do grêmio estudantil de sua escola. Mas, devido as grandes demandas assumidas, ele não estava se alimentado bem, pois o corre-corre estava demais. Essa realidade fez com que buscasse uma nutricionista e cumprisse as recomendações voltadas para uma dieta alimentar. Como ele está cursando a terceira série do Ensino Médio, outra preocupação surgiu, a necessidade de criar uma comissão que tratar-se das demandas relacionadas a organização da festa de colação de grau da sua turma. Em um certo dia de reunião, depois das colocações de Giovanni, cinco colegas da classe resolveram se candidatar (C, D, J, M e P), porém a turma decidiu que apenas três deles deveriam compor a comissão.

Fonte: https://br.freepik.com/vetores-premium

Diante dessa realidade, quantas comissões diferentes podem ser formadas com esses cinco estudantes para tratar dos assuntos referentes a festa de colação de grau da classe deles?

Momento II:

Nessa etapa o professor fará uma apresentação formal, organizada e estruturada em linguagem Matemática dos conceitos e procedimentos construídos através da resolução de problemas. Ele poderá utilizar as soluções propostas pelos alunos para formalizar a resolução do problema gerador, do conceito de Combinação Simples. Para contribuir na compreensão do conceito de Combinação Simples, será exibido a teleaula de número 51 do Telecurso, que está disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=C3dkp0a5o2Y. Em seguida haverá outras exemplificações e a exposição dos algoritmos.

Momento III:

Após a exposição de exemplos diversos (formalização dos conceitos), será entregue e depois recolhida, uma atividade a ser resolvida de forma individual e em sala de aula, a fim de valorizar a experiência pessoal de cada aluno.

Atividade de Aprendizagem

1º. Os cinco colegas da turma de Giovanni que se candidataram a fazer parte da comissão de formatura, são bons esportistas em várias modalidades. O professor de Educação física da turma, pretende escolher 2 deles para representar a escola em uma competição. De quantas maneiras o professor poderá fazer essa escolha?

2º. Depois de escolhida a comissão de formatura, algumas ações foram desenvolvidas e efetivadas. A primeira foi a ideia de fazer saladas de frutas para serem vendidas na hora do intervalo. Sabendo que eles dispõem das seguintes espécies de frutas {abacaxi, banana, goiaba, laranja, maçã, pera e uva}, quantos tipos de saladas diferentes podem ser feitos, contendo três tipos dessas frutas?

Fonte: https://br.depositphotos.com/stock-photos/frutas.html

3º. As seis moças da turma de Giovanni são muito carismáticas, gostam de cumprimentar todo mundo da escola, elas sonham com o dia da grande festa de formatura. Num certo dia de reunião com todos os formandos, sabe-se que as seis chegaram primeiro e que se cumprimentaram com um aperto de mão. Quantos apertos de mão no total elas trocaram?

Fonte: https://pt.dreamstime.com/ilustração

4º. A turma de Giovanni, hoje é formada por 15 alunos, sendo 9 homens e 6 mulheres. Retomando a história da criação de uma comissão para viabilizar ações em prol da formatura. Pergunta-se, quantas comissões poderiam ser formadas, caso fosse necessário a escolha de dois homens e de duas mulheres?

Momento IV:

Nessa fase, uma aula após a aplicação da atividade, o professor realizará a devolutiva da mesma, a partir da correção coletiva, a fim de despertar funções que estão na zona de desenvolvimento proximal do aluno. Conceito de Vygotsky, que está relacionada à distância entre o que o aluno sabe ou consegue fazer só, daquilo que ele pode vir a aprender com a contribuição de outras pessoas, conhecido como desenvolvimento potencial.

Avaliação:

Serão feitos questionamentos subjetivos por parte do professor, a fim de que os alunos apontem de forma escrita/oral as dificuldades que tiveram relacionadas as etapas da Resolução de Problemas e referente ao conteúdo abordado. Eles também serão avaliados de acordo com as realizações das atividades; a participação ativa, suas contribuições diante do desenvolvimento das atividades propostas, entre outros.

ANEXO A – FOTOS

Figura 32 - Imagem de um momento da plenária da 1ª etapa da SD.

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

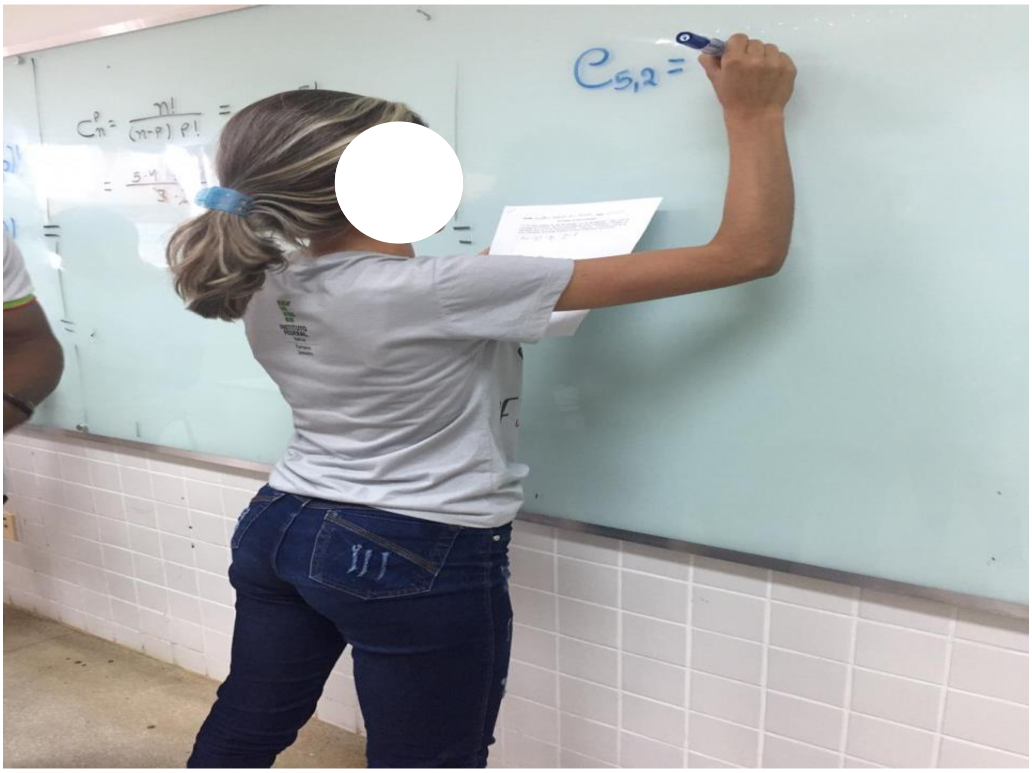
Figura 33 - Imagem de um momento da plenária da 2ª etapa da SD

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Figura 34 - resolução do problema gerador da 3ª etapa da SD

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Figura 35 - Imagem da resolução do 1º problema da atividade da 3ª etapa da SD



Fonte: Dados da pesquisa (2019).