UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

EWANDO JOSÉ DE SOUSA

PROBLEMAS DO LIVRO "MATEMÁTICA LÚDICA" DE LEON BATTISTA ALBERTI E UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO NA SALA DE AULA

JUAZEIRO - BA
2023

EWANDO JOSÉ DE SOUSA

PROBLEMAS DO LIVRO "MATEMÁTICA LÚDICA" DE LEON BATTISTA ALBERTI E UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO NA SALA DE AULA

Trabalho apresentado à Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, *Campus* Juazeiro, como requisito da obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Fábio Henrique de Carvalho

JUAZEIRO - BA
2023

Sousa, Ewando José

S725p Problemas do livro “Matemática Lúdica” de Leon Battista Alberti e uma proposta de aplicação na sala de aula / Ewando José de Sousa. Juazeiro - BA, 2023.

xii, 91 f. : il. ; 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, 2023.

Orientador: Prof. Me. Fábio Henrique de Carvalho.

1. Matemática - Estudo e Ensino. 2. Leon Battista Alberti. I. Título. II. Carvalho, Fábio Henrique. III. Univasf .

CDD 510.07

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Márcio Pataro. CRB - 5/1369

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

EWANDO JOSÉ DE SOUSA

PROBLEMAS DO LIVRO "MATEMÁTICA LÚDICA" DE LEON BATTISTA ALBERTI E UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO NA SALA DE AULA

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Aprovado em: 21 de Julho de 2023.

Banca Examinadora

gov.br Documento assinado digitalmente
FABIO HENRIQUE DE CARVALHO
Data: 18/08/2023 11:59:16-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Fábio Henrique de Carvalho, UNIVASF \PROFMAT

gov.br Documento assinado digitalmente
LINO MARCOS DA SILVA
Data: 19/08/2023 14:09:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Lino Marcos da Silva, UNIVASF \PROFMAT

gov.br Documento assinado digitalmente
EVANILSON LANDIM ALVES
Data: 25/08/2023 14:19:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Evanilson Landim Alves, UPE \LIC. MAT.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus, minha esposa, minha filha, minha mãe, meu pai, meus enteados, sobrinhos e irmãos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me fornecer força durante todas as dificuldades enfrentadas no curso e na vida.

À minha esposa, Leinha, por ser minha parceira na vida e no curso, sempre acreditando em mim e me incentivando a estudar.

Aos meus pais, Titica e Zé Filho, por serem minha base, inspiração e apoio constante na vida.

À minha filha, Ingridy Vitória, por ser uma fonte de motivação e a quem desejo ser um exemplo.

À minha irmã, Érica, e ao meu irmão, Elino, por me ajudarem e compreenderem os desafios do estudo e trabalho, estando ao meu lado nas lutas da vida.

Aos meus sobrinhos, Enzo, Isadora, Luis Davi, Eloah, e aos meus enteados, Luma e Luiz Henrique, por serem uma fonte de motivação e a quem desejo ser um exemplo.

A todos os familiares e amigos que sempre me apoiam em minha vida pessoal e profissional, especialmente minha Vovó Belinha, que sempre me apoia em minhas escolhas do dia a dia.

Aos amigos de curso, em especial Erik, Joefson, Jovenilson e Olímpio, pelo apoio, companheirismo e humildade ao compartilhar conhecimentos nos grupos de estudo.

Ao meu orientador, Me. Fábio Henrique, e aos professores do curso pelo auxílio no meu aprendizado. De forma indireta, expresso meu agradecimento a todos os professores virtuais, essenciais na transmissão de conhecimento durante os estudos.

À SBM, ao IMPA e à UNIVASF, por proporcionar o programa PROFMAT, nos dando um aprendizado de qualidade e nos tornando professores mais capacitados para o ensino da Matemática.

“Para aprender Matemática (ou qualquer outra matéria) não há alternativas mágicas que substituam o trabalho persistente, o esforço, a dedicação e a vontade de progredir.”

Elon Lages Lima

RESUMO

No ensino da matemática é salutar a apresentação de aplicações de seus conteúdos ao cotidiano, não apenas os problemas fictícios, mas também os problemas reais, que estejam presentes na vida dos alunos. Com base nisso, será realizada a tarefa de analisar alguns dos problemas da obra histórica de Leon Battista Alberti, intitulada "Matemática Lúdica", visando criar um material didático que possa auxiliar os professores da Educação Básica. No estudo, foi utilizada uma obra que apresenta técnicas para solucionar problemas matemáticos. Nesse sentido, foram selecionadas algumas técnicas para analisar e expor os conceitos matemáticos presentes em cada uma delas, tais como Medidas, Áreas e Semelhança, que constituem bases fundamentais para a resolução dos problemas estudados. Com base nisso, podem-se criar aulas práticas que incentivem a participação ativa dos alunos e tornem os conteúdos mais relevantes para suas vidas? Para abordar essa questão, utilizou-se a aplicação de um problema em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, analisando a viabilidade prática das técnicas estudadas. Essa abordagem permitiu estabelecer conexões com situações do mundo real, destacando a utilidade e aplicabilidade dos conceitos matemáticos na vida cotidiana dos alunos. Foi identificado que a maioria dos estudantes obteve um maior conhecimento com a aplicação real do conteúdo envolvido.

Palavras-chave: Matemática Lúdica, Leon Battista Alberti. Medidas. Áreas e Semelhança. Aplicações.

ABSTRACT

In mathematics education, it is beneficial to present applications of its contents to everyday life, not only fictional problems but also real-life issues that are present in students' lives. Based on this, the task of analyzing some problems from the historical work of Leon Battista Alberti, entitled "Ludic Mathematics", will be carried out, aiming to create educational material that can assist teachers in Basic Education. In the study, a work that presents techniques for solving mathematical problems was used. In this regard, some techniques were selected to analyze and present the mathematical concepts present in each of them, such as Measurements, Areas, and Similarity, which constitute fundamental bases for solving the studied problems. Based on this, can practical lessons be created to encourage active student participation and make the contents more relevant to their lives? To address this question, the application of a problem in a 2nd-year high school class was used to analyze the practical viability of the studied techniques. This approach allowed establishing connections with real-world situations, highlighting the utility and applicability of mathematical concepts in students' daily lives. It was identified that the majority of students gained a better understanding with the real-life application of the content involved.

Keywords: Ludic Mathematics, Leon Battista Alberti. Measurements. Areas and Similarity. Applications.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho aborda a análise de alguns dos problemas da obra *Matemática Lúdica* de Leon Battista Alberti, intitulada *Ludi rerum mathematicarum* (Traduzida para o Português como Matemática Lúdica), publicada por volta de 1452, cuja data certa não é conhecida, pois o manuscrito original está perdido até hoje. O estudo foi realizado em uma edição apresentada, traduzida e comentada por Pierre Souffrin e traduzida para o Português por André Telles. Por não ser uma edição original, não há uma rigorosa noção do texto original, o que resulta em erros que são apresentados e comentados pelo autor dessa edição.

A referida obra foi dedicada ao príncipe Meliaduse, marquês d'Este, em atendimento tardio ao pedido deste para a solução dos referidos problemas. Texto de (Alberti, 2006) ao príncipe:

> Vossa paciência talvez tenha sido compensada pelo prazer que espero sintais ao conhecer as coisas bastante divertidas que aqui encontrareis reunidas, ou até mesmo ao pô-las em prática e delas se servir. Empenhei-me em descreve-las mui claramente; devo porém salientar que se trata de matérias bem sutis, cuja exposição não dispensa o leitor de um esforço de atenção. [...] encontrareis [aqui] coisas notabilíssimas (ALBERTI, 2006, p. 28).

O livro encontra-se dividido em duas partes: a Primeira Parte contém problemas que envolvem medidas com menor dimensão, tais como altura de torre, largura de rio e profundidade de poço. Já a Segunda Parte trata de problemas que envolvem grandes medidas, como, por exemplo, grande profundidade de água, medição de tempos, cálculo de áreas de grandes campos, elaboração do mapa de uma cidade, cálculo de grandes distâncias, entre outros.

Lendo a obra, percebe-se a importância dos problemas para a Educação Básica, onde eles podem ser aplicados, estabelecendo uma boa relação entre teoria e prática. Isso despertou o interesse em resgatar essa obra histórica, a fim de proporcionar uma contribuição relevante para o ensino da matemática. Dessa forma, é possível oferecer aulas práticas, lidando com problemas reais e utilizando materiais simples presentes na vida do aluno.

O trabalho consiste em um estudo de alguns dos problemas apresentados nessa obra histórica, a qual apresenta procedimentos para a resolução de problemas da época, que mantêm sua relevância para os problemas atuais. Serão analisados três problemas da Primeira Parte do livro e dois da Segunda Parte, alguns dos quais estão divididos em casos. Um desses problemas foi selecionado para propor uma aplicação em sala de aula.

A escolha dos problemas foi feita pela relação com o cotidiano do aluno e também pela correspondência dos conteúdos matemáticos de cada problema com a Educação Básica. Para garantir a aplicação correta das técnicas propostas por (Alberti, 2006) , é essencial realizar uma revisão completa, englobando a parte teórica matemática e todos os detalhes necessários para evitar erros.

Produzir um material didático para apoiar os professores da Educação Básica, tanto do anos finais do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio, é o objetivo deste trabalho, uma vez que os conteúdos abordados na Seção 1 estão presentes nessas modalidades de ensino. Os professores podem abordar esses problemas de forma prática em sala de aula, a fim de tornar o aprendizado mais atraente e significativo para os alunos. A partir do estudo, o trabalho pode ser aplicado com as adequações necessárias para diferentes níveis de aprendizagem, atendendo às necessidades dos alunos.

Torna-se possível desenvolver este trabalho e aplicá-lo aos alunos da Educação Básica, uma vez que esses procedimentos são viáveis em outras situações cotidianas, podendo auxiliá-los no desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, resolução de problemas e aplicação dos conhecimentos adquiridos em sala de aula. A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018) destaca que a aprendizagem em Matemática envolve a compreensão dos significados dos objetos matemáticos e suas aplicações, por meio das conexões que os alunos estabelecem com diversos componentes e com o cotidiano.

No que diz respeito à estrutura desse trabalho, na primeira seção serão apresentados os saberes de Medidas, Áreas e Semelhança. Tais conteúdos fazem-se imprescindíveis para o desenvolvimento dos problemas propostos. E nesta seção, terá início com Medidas, na qual se compreenderá o conceito, tanto para medidas "comensuráveis" quanto para as "incomensuráveis", considerando que toda medida detém um erro tão pequeno quanto se deseje. Durante o desenvolvimento das técnicas, far-se-ão as devidas aproximações, adequando-as ao propósito de cada procedimento. Em seguida, será abordado Áreas, onde se demonstrarão as fórmulas para calcular Áreas das principais figuras planas que emergem nos problemas do livro como vastos campos. Além disso, será apresentada a definição geral de Área, entendendo que essa medida é apropriada para qualquer figura plana, não somente para as figuras poligonais. Por fim, será tratado o tema de Semelhança, cuja abordagem é a mais geral possível, aplicando-se a uma ampliação ou redução de figuras planas, poligonais e não poligonais, bem como para figuras espaciais. Com o conhecimento desse tema, estudar-se-ão as deduções dos três casos de Semelhança de Triângulos, pois são essenciais para o estudo.

Na Seção 2, serão apresentados três problemas da primeira parte do livro de (Alberti, 2006) . No procedimento do Problema 1, será medida a altura de uma torre, uma vez que é necessário conhecer a sua distância até o observador. Esse problema será dividido em dois casos, quando é possível ou não medir uma parte da torre. Nos outros dois problemas, serão analisadas formas de calcular a largura de um rio e a altura de uma torre, mesmo sem conhecer a sua distância até o observador e apenas com o topo visível. Esses procedimentos são aplicações claras da teoria dos casos de Semelhança de Triângulos.

Na terceira seção, haverá dois problemas da segunda parte do livro. No Problema 1 serão estudados os procedimentos relacionados com agrimensura; assim, será abordado como calcular a área de vários formatos de campos enormes. Como os campos têm formas variadas, esse problema será dividido em cinco casos, permitindo estudar cada caso de forma detalhada. Cada um dos casos representa uma aplicação direta do conteúdo sobre as Áreas de Figuras Planas. Diante de um campo de formato desconhecido, é possível dividi-lo em várias figuras conhecidas, como retângulos, triângulos, segmentos circulares e setores circulares, chegando assim à área aproximada desse campo.

No Problema 2, será apresentado o procedimento de como calcular grandes distâncias, percebendo essa distância. Essa distância também pode ser calculada pelo procedimento do Problema 2 da Seção 2, mas nesse caso, será apresentada uma nova forma de proceder. Esse problema também é uma aplicação dos casos de Semelhança de Triângulos.

Na quarta seção do material, será exposta a aplicação do Problema 3 da Seção 1 em uma turma do 2º ano do Ensino Médio. Essa etapa será fundamental para colocar em prática a proposta do trabalho, utilizando o material de apoio que foi elaborado.

O principal objetivo é explorar a efetividade do material didático e sua capacidade de aprimorar o aprendizado. Deseja-se compreender se a aplicação prática dos conteúdos pode contribuir para uma melhor assimilação dos assuntos pelos alunos.

Conforme (Lima, 2007) :

> As aplicações constituem para muitos alunos de nossas escolas, a parte mais atraente (ou menos cansativa) da Matemática que estudam. Se forem formuladas adequadamente, em termos realísticos, ligados a questões e fatos da vida atual, elas podem justificar o estudo, por vezes árido, de conceitos e manipulações, despertando o interesse da classe. Encontrar aplicações significativas para a matéria que está expondo é um desafio e deveria ser uma preocupação constante do professor. Elas devem fazer parte das aulas, ocorrer em muitos exercícios e ser objeto de trabalhos de grupo (LIMA, 2007, p. 144).

Relacionar os problemas ao meio tem como objetivo demonstrar a importância de cada conteúdo e suas aplicações práticas, uma vez que cada definição e dedução apresentadas na Seção 1 possuem uma aplicação concreta e relevante para a realidade. Observa-se que a teoria e a prática são partes integrantes do mesmo processo, e que ambas são cruciais para a compreensão plena e a aplicação efetiva dos conceitos estudados.

Considerando os procedimentos de Alberti e os objetivos que se deseja alcançar, destaca-se a importância da obra histórica *Matemática Lúdica* para a Educação Básica. Essa obra mostra uma aplicação contextualizada e materializada dos conteúdos envolvidos nesses problemas, ou seja, através de uma aplicação de uma aula prática utilizando materiais simples, é possível vivenciar a matemática e proporcionar “um olhar diferenciado” dos alunos para os problemas que serão estudados e, consequentemente, para os conteúdos correlacionados.

1 MEDIDAS, ÁREA E SEMELHANÇA

1.1 MEDIDAS

A matemática juntamente com o ato de trabalhar com medidas ainda é um desafio para muitos estudantes apesar de atualmente ter muitos meios para ajudar a medir as várias grandezas (distâncias, alturas, pesos, tempo, entre outras).

Na verdade, o processo de medir é próprio do ser humano e sua abordagem é de grande importância. O conteúdo de medidas é trabalhado nos anos iniciais e nos anos finais do Ensino Fundamental mas, também, é de grande importância no Ensino Médio.

Considerando que é muito relevante saber o que significa medir, busca-se por meio de uma análise dos procedimentos descritos na obra histórica Matemática Lúdica, produzida por Leon Battista Alberti (1404 – 1472) em meados do século XV, entender toda a teoria matemática que embasa cada problema.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) enfatizam que ao adquirir conhecimentos sobre esse tema, os estudantes têm a oportunidade de desenvolver habilidades que os levam a refletir sobre o conceito de medição e compreender que toda medida possui uma margem de erro, isto é, uma certa imprecisão, mesmo que insignificante. Essa percepção auxilia os alunos a compreenderem que a imprecisão é uma parte intrínseca do processo de medição.

Conforme as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 2022) :

> A Geometria, na perspectiva das medidas, pode se estruturar de modo a garantir que os alunos aprendam a efetuar medições em situações reais com a precisão requerida ou estimando a margem de erro. Os conhecimentos sobre perímetros, áreas e volumes devem ser aplicados na resolução de situações-problema (BRASIL, 2022, p. 124).

(Alberti, 2006) mostra os diferentes procedimentos, como medir a altura de uma torre, medir a largura de um rio, medir grandes distâncias, entre outros. Ao qual há uma exigência da utilização desses conceitos usando métodos e instrumentos simples para realizar medições.

Ao medir, faz-se a comparação de grandezas de mesma espécie. Apenas se toma uma grandeza como padrão e a compara com outra grandeza na qual se deseja medir.

Nessa comparação de medidas, ocorrem dois casos: Segmentos Comensuráveis ou Segmentos Incomensuráveis. Segmentos Comensuráveis são aqueles que podem ser medidos com a unidade padrão previamente estabelecida, enquanto os Incomensuráveis são aqueles que não podem ser medidos com essa unidade.

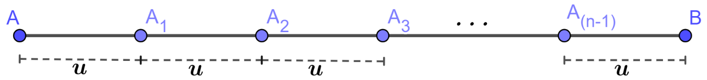
1.1.1 Segmentos Comensuráveis

Dados um segmento AB qualquer, um segmento unitário u fixado e A_1 como um ponto situado em AB, tal que AA_1 e A_1B são congruentes ao segmento u. Nesse caso, pode-se expressar $\overline{AB} = 2\overline{u}$, ou, por conveniência, denotamos $\overline{AB} = 2$.

Consideram-se dois pontos A_1 e A_2 situados em AB, de tal maneira que os segmentos AA_1, A_1A_2 e A_2B sejam congruentes ao segmento u. Nesse caso, pode-se afirmar que $\overline{AB} = 3\overline{u}$ e, portanto, $\overline{AB} = 3$.

Generalizando, supõe-se que existem $n-1$ pontos $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}$ situados em $\overline{AB}$, de modo que os segmentos AA_1, A_1A_2, A_2A_3, $\cdots$, $A_{n-1}B$ sejam todos congruentes ao segmento unitário u. Nesse caso, pode-se afirmar que $\overline{AB} = n \cdot \overline{u}$ e, portanto, $\overline{AB} = n$. Desse modo, temos: $\overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \cdots + \overline{A_{n-1}B} = n$. Veja Figura 1.1:

Figura 1.1 – Segmentos Comensuráveis



Fonte: O Autor

De fato $\overline{AB} = n$, pois, $\overline{AB}$ é dividido em n segmentos congruentes a u.

Com base nisso, a seguinte pergunta se apresenta: o que acontece se o segmento AB não conter um número inteiro de vezes o segmento unitário u?

Então, considera-se um segmento w menor que o segmento u, de forma que $\overline{w}$ caiba n vezes em $\overline{u}$ e m vezes em $\overline{AB}$, onde $m,\ n \in \mathbb{N}$.

Portanto, temos:

$$\overline{w} = \frac{1}{n}, \text{ pois, } \overline{u} = 1 \Rightarrow \overline{AB} = m \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{m}{n}.$$

Observe a Figura 1.2:

Figura 1.2 – Segmentos Comensuráveis

Fonte: O Autor

Conclui-se que $\overline{w}$ é um submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{u}$ e, portanto, $\overline{AB}$ e $\overline{u}$ são segmentos comensuráveis. Isso significa que $\overline{AB}$ possui medida inteira ou fracionária.

1.1.2 Segmentos Incomensuráveis

Em relação ao caso anterior, fica a dúvida se sempre se encontrará um segmento w que caiba n vezes em um segmento u e m vezes em $\overline{AB}$.

Um exemplo claro para mostrar que nem sempre os segmentos são comensuráveis é o seguinte:

Considera-se um quadrado de lado 1 e sua diagonal com medida d:

A partir do Teorema de Pitágoras, temos: $d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$.

Suponha-se que a diagonal d e o lado do quadrado são comensuráveis, então, $d = \frac{m}{n}$. Logo:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2,$$

que é um absurdo, pois, m^2 e n^2 são quadrados perfeitos, ou seja, possuem seus fatores primos uma quantidade par de vezes, uma vez que m^2 possui uma quantidade ímpar do fator 2, posto isso, $2n^2$ não pode ser igual a m^2.

Portanto, nesse caso, a diagonal de um quadrado e o seu lado são incomensuráveis, ou melhor, a diagonal de um quadrado é um número irracional. Compreende-se de forma intuitiva o que é um número irracional, pois não é tão simples, ou seja, define-se a medida de um segmento AB que é incomensurável com o segmento unitário u. Conforme mencionado por (Lima, 2011) , a distinção entre um número racional e um número irracional é notável. Enquanto um número racional pode ser representado precisamente como a razão p/q de dois números inteiros, um número irracional é caracterizado pela compreensão de seus valores aproximados, que, por sua vez, são representados por números racionais.

Ao dividir dois números inteiros $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$, há dois casos a considerar: a divisão é finita ou infinita periódica. Mas como pode ser garantida a existência de um período na divisão infinita? A resposta é que, na divisão $\frac{p}{q}$, sempre há $q-1$ restos possíveis. Portanto, em algum momento, esses restos irão se repetir, obtendo assim o período desse número. Por essa razão, o segmento AB com medida $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros e $q \neq 0$, será sempre comensurável com o segmento u, o que indica que será um número racional.

À vista disso, dado o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), tem-se que o conjunto dos números irracionais é o conjunto dos números reais menos o conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) , isto é,

$$\textit{Irracionais} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

Desse modo, os irracionais completam os racionais na reta real, quer dizer, as frações não integram todas as medidas de segmentos de retas.

Quando se trata de medidas, o valor é expresso por um número racional, pois sempre se trata de uma aproximação, seja por falta ou por excesso. Por exemplo, sabe-se que o número π é irracional, então:

$$3 < \pi < 4;$$
$$3,1 < \pi < 3,2;$$
$$3,14 < \pi < 3,15;$$
$$3,141 < \pi < 3,142;$$
$$3,1415 < \pi < 3,1416,$$

e assim por diante.

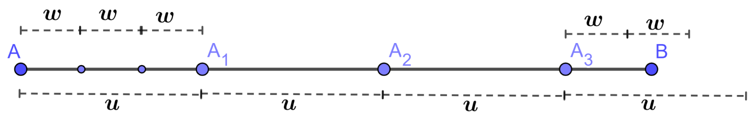
Desse modo, os números $\{3;\ 3,1;\ 3,14;\ 3,141; \cdots\}$ são aproximações por falta e os números $\{4;\ 3,2;\ 3,15;\ 3,142; \cdots\}$ são aproximações por excesso do número irracional π, uma vez que esses números são racionais. Pode-se notar que, ao medir um segmento retilíneo equivalente à metade do comprimento de uma circunferência de raio 1 com algum instrumento, não se encontrará uma medida exata de π, mas sim uma medida aproximada, com algum erro. Conforme mencionado por (Lima, 2011) , esse erro pode ser tão pequeno quanto desejado.

Dado isso, será analisado agora as aproximações para um segmento qualquer, contanto que sua medida seja incomensurável com o segmento unitário.

Considera-se AB um segmento incomensurável com o segmento unitário u, ou seja, a medida de $\overline{AB}$ é um número irracional. Serão estimados os valores aproximados de $\overline{AB}$, por falta e por excesso.

Se w é um segmento que cabe n vezes em um segmento unitário u e m vezes em $\overline{AB}$, e ainda sobra algo, então podemos concluir que $m+1$ segmentos iguais a w têm, em conjunto, uma medida maior que $\overline{AB}$. Como segue a Figura 1.3:

Figura 1.3 – Segmentos Incomensuráveis



Fonte: O Autor

Como $w = \frac{1}{n}$, então,

$$\frac{m}{n} < \overline{AB} < \frac{m+1}{n},$$

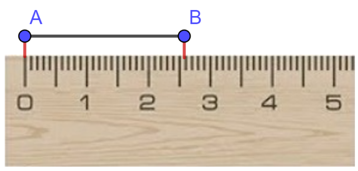
em que, $\frac{m}{n}$ é uma aproximação por falta e $\frac{m+1}{n}$ é uma aproximação por excesso.

Nota-se que $\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n} = \frac{1}{n}$, ou seja, o erro é inferior a $\frac{1}{n}$, tanto por falta como por excesso.

Veja-se um exemplo disso aplicado a um instrumento de medida bastante utilizado, para se compreender melhor essas aproximações.

Na Figura 1.4, tem-se um pedaço de régua em centímetros:

Figura 1.4 – Pedaço de uma Régua



Fonte: O Autor

Considera-se $\overline{u} = 1\,cm$ e $\overline{w} = 1\,mm$. Assim, $\overline{w} = \frac{1}{10}\,mm$. Conclui-se que $\overline{AB}$ contém 25 segmentos congruentes a $\overline{w}$ e ainda sobra um pedaço. No entanto, se tivesse $25+1$ segmentos congruentes a $\overline{w}$, teria-se um segmento maior que $\overline{AB}$. Então,

$$\frac{25}{10} < \overline{AB} < \frac{25+1}{10} \Rightarrow 2,5 < \overline{AB} < 2,6.$$

Observa-se que $2,6 - 2,5 = 0,1\,cm$, ou seja, o erro é de 1 décimo de centímetro para mais ou para menos.

Em cada procedimento dos problemas de (Alberti, 2006) , o objetivo é reduzir os erros de medidas e obter resultados mais precisos.

1.2 ÁREAS

Nesta seção, serão abordadas as Áreas, correspondentes à medida de superfícies planas. Será explorada a medida de área para as principais figuras planas, uma vez que os problemas da Seção 3 são aplicações diretas desses conceitos. Cada área será cuidadosamente definida, e suas fórmulas correspondentes serão deduzidas. Além disso, será apresentada uma definição geral de área aplicável a qualquer figura plana, independentemente de ser poligonal ou não.

1.2.1 Área do Quadrado

Será adotado como medida padrão um quadrado de lado medindo 1 unidade de comprimento, denominado de unidade de área.

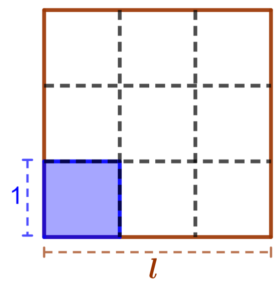
Será denotada por A_Q a área do quadrado e por l a medida do seu lado.

Há três casos a serem considerados para a medida l do lado do quadrado.

1.2.1.1 O lado l é um Número Natural

Como l é natural, então a unidade de área cabe um número inteiro de vezes dentro de cada lado, ou seja, cabe l vezes em cada lado. Veja Figura 1.5:

Figura 1.5 – Quadrado unitário contido no quadrado de lado l natural



Fonte: O Autor

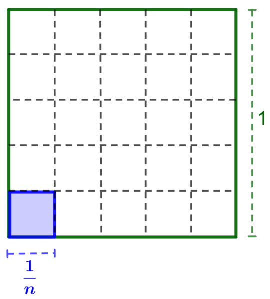
Assim sendo, a área $A_Q = l \cdot l$, logo, $A_Q = l^2$.

1.2.1.2 O lado l é um Número Racional

Considerando que l é um número racional, nota-se que $l = \frac{m}{n}$, em que m e n são números naturais.

Nesse caso, será feita a divisão da unidade de área em quadrados menores, cujos lados medem $\frac{1}{n}$. Conforme ilustra a Figura 1.6:

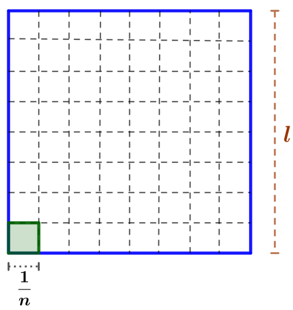
Figura 1.6 – Quadrado de lado $\frac{1}{n}$ contido no quadrado unitário



Fonte: O Autor

Sendo assim, é possível encaixar n^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$ no interior da unidade de área. Os quadrados de lado $\frac{1}{n}$ se encaixarão no interior de um quadrado de lado $l = \frac{m}{n}$. Como segue na Figura 1.7:

Figura 1.7 – Quadrado de lado $\frac{1}{n}$ contido no quadrado de lado l racional



Fonte: O Autor

Considerando que $l = \frac{m}{n}$, é possível encaixar m quadrados de lado $\frac{1}{n}$ na base e m desses quadrados na altura, como ilustrado na Figura 1.7. Dessa forma, o quadrado de lado l fica dividido em m^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$.

Como cabem n^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$ no interior da unidade de área, então o quadrado de lado $\frac{1}{n}$ terá área $\frac{1}{n^2}$.

A partir disso, tem-se que:

$$A_Q = m^2 \cdot \frac{1}{n^2}, \text{ assim, } A_Q = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = l^2.$$

Adiante, será exposto um exemplo para compreendermos melhor esse processo:

Considera-se um quadrado de lado $5,34$, ou seja, $l = \frac{534}{100}$. Então, verifica-se que o quadrado menor terá lado $\frac{1}{100}$. Sendo assim, é possível encaixar 100^2 quadrados de lado $\frac{1}{100}$ no interior da unidade de área. Portanto, obtém-se que sua área será $\frac{1}{100^2}$.

Considerando que l é igual a $\frac{534}{100}$, é possível inserir 534^2 quadrados de lado $\frac{1}{100}$ em seu interior. Consequentemente, tem-se:

$$A_Q = 534^2 \cdot \frac{1}{100^2}, \text{ assim, } A_Q = \frac{534^2}{100^2} = \left(\frac{534}{100}\right)^2 = 5,34^2.$$

1.2.1.3 O lado l é um Número Irracional

Neste caso, será mostrado que:

Para todo b,

$$\begin{cases} \texttt{se: } b < l^2 & \Rightarrow \quad b < A_Q \\ \texttt{se: } b > l^2 & \Rightarrow \quad b > A_Q \end{cases}$$

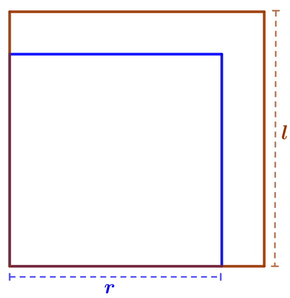
Então, tem-se que $A_Q = l^2$.

Demonstração:

1ª Parte:

Tem-se r como um número racional, em que $\sqrt{b} < r < l$. Considera-se R como a área de um quadrado de lado r. Observa-se a Figura 1.8:

Figura 1.8 – Quadrado de lado r racional contido no quadrado de lado l irracional



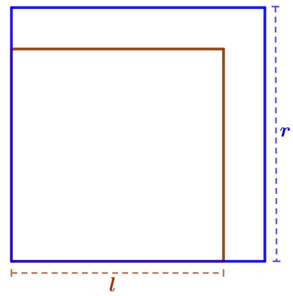
Fonte: O Autor

Uma vez que $\sqrt{b} < r$, conclui-se que $b < r^2$, e, portanto, $b < R < A_Q$. Consequentemente, pode-se afirmar que $b < A_Q$.

2ª Parte:

Admitindo-se r como um número racional em que $\sqrt{b} > r > l$. Suponha-se R como a área de um quadrado de lado r, conforme ilustrado na Figura 1.9:

Figura 1.9 – Quadrado de lado l irracional
contido no quadrado de lado r racional



Fonte: O Autor

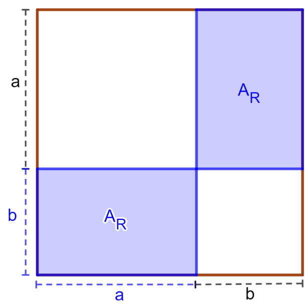
Se $\sqrt{b} > r$, então conclui-se que $b > r^2$, o que implica em $b > R > A_Q$. Isso permite afirmar que $b > A_Q$.

A partir das 1ª e 2ª partes, conclui-se que $A_Q = l^2$, para qualquer valor positivo de l pertencente ao conjunto dos números reais.

1.2.2 Área do Retângulo

Considera-se um quadrado de lado $(a + b)$. Esse quadrado pode ser subdividido em dois retângulos iguais de lados a e b, juntamente com dois quadrados diferentes, um de lado a e outro de lado b. De acordo com a Figura 1.10:

Figura 1.10 – Retângulo de lados a e b
contido em um quadrado de lado $(a + b)$



Fonte: O Autor

Tomando A_R como a área do retângulo de lados a e b. A seguir, será determinada a sua área.

Dessa forma, compreende-se que a área do quadrado com lado $(a+b)$ é:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2A_R \iff$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2A_R \iff$$
$$A_R = ab$$

.

Com isso, conclui-se que $A_R = ab$.

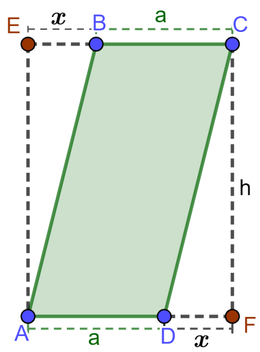
Pode-se utilizar esse processo para demonstrar que $A_R = ab$, aproveitando o fato de que a área de um quadrado é conhecida. Além disso, pode-se aplicar a mesma ideia utilizada para deduzir a área do quadrado para encontrar a área do retângulo.

1.2.3 Área do Paralelogramo

Considera-se um paralelogramo $ABCD$ contido em um retângulo $AECF$.

Supõe-se um retângulo com lados $a+x$ e h, e um paralelogramo com lado a e altura h. Observa-se a Figura 1.11:

Figura 1.11 – Paralelogramo de lado a e altura h contido em um retângulo de lados $(a+x)$ e h



Fonte: O Autor

Pode-se observar que os triângulos AEB e CFD são congruentes e retângulos, uma vez que possuem lados correspondentes iguais, ou seja, $\overline{DF} = x = \overline{BE}$, $\overline{FC} = h = \overline{AE}$ e $\overline{DC} = \overline{AB}$. Ao unir esses dois triângulos, forma-se um retângulo com lados x e h, cuja área é dada por xh.

Será denominado de A_P a área do paralelogramo $ABCD$ e de A_R a área do retângulo $AECF$. Com isso, obtém-se:

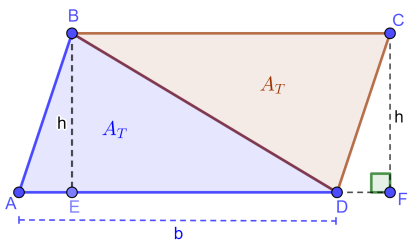
$$A_P = A_R - xh$$
$$\Rightarrow A_P = (a + x)h - xh$$
$$\Rightarrow A_P = ah + xh - xh$$
$$\Rightarrow A_P = ah$$

Assim, constata-se que a área do paralelogramo é o produto da base pela altura.

1.2.4 Área do Triângulo

Considera-se $ABCD$ um paralelogramo de base $b = \overline{AD}$ e altura $h = \overline{BE}$. Será denominado de A_P sua área, conforme apresentado na Figura 1.12:

Figura 1.12 – Representação geométrica da área de um triângulo



Fonte: O Autor

Na Figura 1.12, ao traçar o segmento $\overline{BD}$, é possível observar a formação de dois triângulos congruentes, ou seja, $\triangle ABD$ é congruente a $\triangle CDB$, pois possuem lados correspondentes iguais: $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ e $\overline{BC}$ é comum a ambos os triângulos.

Será considerado A_T como a área do triângulo ABD, a qual é igual à área do triângulo CDB. Então:

$$A_T = \frac{A_P}{2} = \frac{bh}{2}.$$

Está-se considerando a base $b = \overline{AD} = \overline{BC}$ como a base dos triângulos ABD e CDB. Sendo h a altura do paralelogramo, h também é a altura dos dois triângulos de base b.

A partir de qualquer triângulo, é possível construir um paralelogramo com um triângulo congruente ao anterior. Portanto, a área de um triângulo será sempre a metade da área de um paralelogramo.

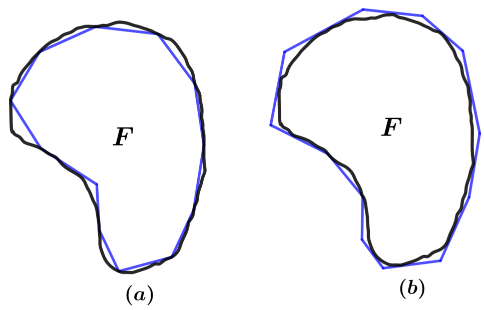
1.2.5 Definição Geral de Área

Prosseguir-se-á agora com a definição geral para a área de uma figura plana qualquer, uma vez que ainda não se sabe como calcular a área de um círculo ou de outras figuras planas conhecidas.

Conforme (Roque, 2012) argumenta, Arquimedes propôs uma abordagem em que ele procurava cercar a figura com duas outras formas cujas áreas se alteravam e se aproximavam da área da figura original, sendo uma dessas áreas crescente e a outra decrescente. No caso do círculo, por exemplo, ele utilizou polígonos inscritos e circunscritos para envolver a área, aumentando o número de lados desses polígonos para que suas áreas se aproximassem da área da circunferência. Isso levou à conclusão de que Arquimedes empregava um método indireto para calcular a área de figuras curvilíneas

Seja F uma figura plana arbitrária, sabe-se que sua área (A_F) deve ser um número real não-negativo. Observa-se a Figura 1.13:

Figura 1.13 – Figura poligonal inscrita e circunscrita em uma figura não poligonal



Fonte: O Autor

Na figura (a), tem-se um polígono P inscrito na Figura F. Seja A_P a sua área. Com essa condição, obtém-se:

$$A_P \leq A_F$$

Nota-se que, dado um número real $x < A_F$, sempre haverá um polígono P inscrito em F, tal que,

$$x < A_P \leq A_F.$$

Na figura (b), tem-se um polígono P' circunscrito na Figura F. Será denotada por $A_{P'}$ a sua área. Dessa maneira, obtém-se:

$$A_F \leq A_{P'}.$$

É evidente que, dado um número real $y > A_F$, sempre haverá um polígono P' circunscrito em F, de modo que,

$$A_F \leq A_{P'} < y.$$

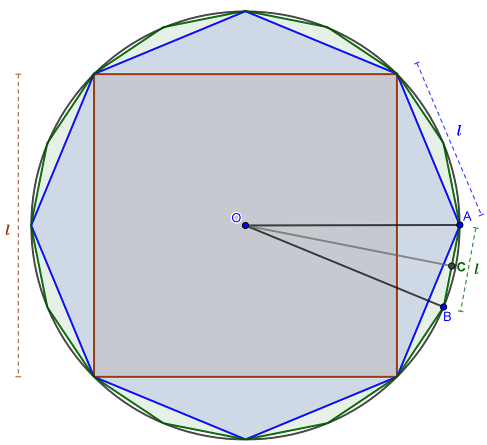
Pode-se concluir que a área de uma figura plana arbitrária é um número real não negativo, cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos inscritos e cujas aproximações por excesso são as áreas dos polígonos circunscritos.

1.2.6 Área do Círculo

Considera-se um círculo c de centro O e raio r. Será denotada por A_C a sua área.

Admite-se P um polígono regular inscrito no círculo c, tendo n lados de medida l. Observa-se a Figura 1.14:

Figura 1.14 – Círculo circunscrito em figuras poligonais regulares



Fonte: O Autor

No polígono P de n lados, pode-se dividi-lo em triângulos congruentes a partir do centro O e de cada lado l. Na Figura 1.14, o triângulo ABO exemplifica essa divisão, em que $\overline{AB} = l$ e C é o ponto médio de $\overline{AB}$. A altura em relação à base $\overline{AB}$ é denominada apótema de P e é representada por $\overline{OC}$, pois $\overline{OA} = \overline{OB} = r$.

Seja $\overline{OC} = a$ e será denotada por A_P a área do polígono P. Desse modo, obtém-se:

$$A_P = n \cdot \frac{la}{2}.$$

Sendo assim, à medida que n cresce, nota-se que nl (perímetro de P) se aproxima cada vez mais do comprimento de c ($2\pi r$) e o apótema se aproxima de r. Pode-se concluir que:

$$A_C = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} \Rightarrow A_C = \pi r^2.$$

O Número π:

Para demonstrar que a área de uma circunferência de raio r é πr^2, utiliza-se o comprimento $2\pi r$. A seguir, é apresentada uma breve explicação sobre o número π, que é muito importante para a matemática.

Sejam $\{C_1\}$ uma circunferência de comprimento c e diâmetro d, e $\{C_2\}$ outra circunferência de comprimento c' e diâmetro d', então,

$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}.$$

O valor constante de $\frac{c}{d}$ é aproximadamente $3,141592$, o qual é representado pela letra grega π.

Sendo r o raio de C_1, tem-se que $d = 2r$. Então:

$$\frac{c}{2r} = \pi \Rightarrow c = 2\pi r.$$

De acordo com (Lima, 2012) , há outra definição para o número π, que o descreve como a área de um círculo de raio 1. Por exemplo, se o raio do círculo mede 1 cm, sua área é $\pi\,\mathrm{cm}^2$. Também é possível afirmar que π é o comprimento de uma circunferência de diâmetro 1.

No século III a.C., a fração $\frac{22}{7}$ era usada como uma aproximação para π, pois é a melhor fração simples que se aproxima desse número irracional.

1.3 SEMELHANÇA

Primeiramente, será abordada a questão da semelhança de forma geral, uma vez que esse conceito é bastante intuitivo no que se refere tanto à figuras planas quanto à figuras espaciais.

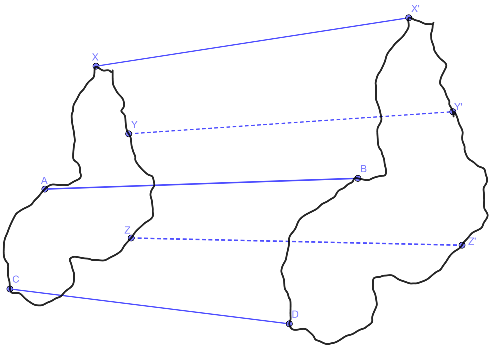
Conforme afirmam os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (Brasil, 1998) :

> O conceito de semelhança está presente no estudo de escalas, plantas, mapas, ampliações de fotos, fotocópias como também quando se verifica, por exemplo, se as medidas das partes do corpo humano se mantêm proporcionais entre um representante jovem e um representante adulto.
> Esse conceito poderá ser desenvolvido e/ou aprofundado também pela análise de alguns problemas históricos, como os procedimentos utilizados pelos antigos egípcios para determinar a altura de suas pirâmides. Outras fontes interessantes de problemas são as que envolvem a noção de semelhança de triângulos e as medidas de distâncias inacessíveis (BRASIL, 1998, p. 125).

Posto isso, nota-se a importância de cada problema do livro de (Alberti, 2006) que será analisado nesse trabalho, uma vez que em praticamente todos eles será utilizada a Semelhança para realizar os procedimentos, fornecendo embasamento para os cálculos necessários para chegar a um resultado com precisão. Destarte, fica evidente que no trabalho será utilizada a Semelhança de Triângulos, sobre a qual será abordada de forma detalhada a seguir e que tal fato é uma consequência da definição geral de Semelhança que segue adiante.

Dadas duas figuras F e F', do plano ou do espaço, diz-se que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança k, em que k é um número real positivo, quando existe uma correspondência biunívoca $\varphi : F \rightarrow F'$ tal que, para quaisquer X e Y pertencentes a F e seus correspondentes $X' = \varphi(X) \in F'$ e $Y' = \varphi(Y) \in F'$, tem-se $\overline{X'Y'} = k, \overline{XY}$. A Figura 1.15 ilustra esse fato:

Figura 1.15 – Duas figuras não poligonais semelhantes



Fonte: O Autor

Diz-se, então, que X e X' são homólogos.

Se F é semelhante a F', com razão k, logo F' é semelhante a F, em que a razão é $\frac{1}{k}$.

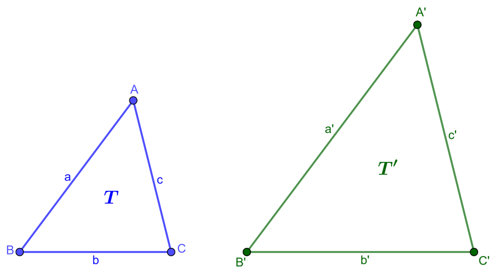
1.3.1 Semelhança de Triângulos

A definição de Semelhança de Triângulos se resume à definição geral de Semelhança apresentada anteriormente, cujo tema será de grande importância para fundamentar o estudo dos problemas de Leon Battista.

Tendo como base a definição semelhança, prossegue-se com a definição de Semelhança de Triângulos.

Consideram-se dois triângulos semelhantes, $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$. Observa-se a Figura 1.16 representativa:

Figura 1.16 – Dois Triângulos Semelhantes



Fonte: O Autor

Seja T o triângulo ABC e T' o triângulo $A'B'C'$.

Para T, são adotados $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ e $\overline{AC} = c$. Para T', são adotados $\overline{A'B'} = a'$, $\overline{B'C'} = b'$ e $\overline{A'C'} = c'$.

A partir da definição de semelhança, pode-se afirmar que existe uma função $\varphi : T \to T'$, tal que $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$, em que $k > 0$ representa a razão de semelhança. Essa relação também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k \quad \text{ou} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{1}{k}.$$

1.3.1.1 Casos de Semelhança de Triângulos

Os casos a seguir estabelecem os critérios suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. Tais casos são usualmente conhecidos como Casos de Semelhança de Triângulos.

São três casos de semelhança, nos quais considera-se ABC e $A'B'C'$ como dois triângulos do plano. No triângulo $\triangle ABC$, são denotados $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ e $\overline{AC} = c$, enquanto no triângulo $\triangle A'B'C'$, são denotados $\overline{A'B'} = a'$, $\overline{B'C'} = b'$ e $\overline{A'C'} = c'$.

Caso *LLL* (Lado Lado Lado)

Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos do plano tais que:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k.$$

Então, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ e, em particular, $\begin{cases} \angle A &= \angle A' \\ \angle B &= \angle B' \\ \angle C &= \angle C' \end{cases}$.

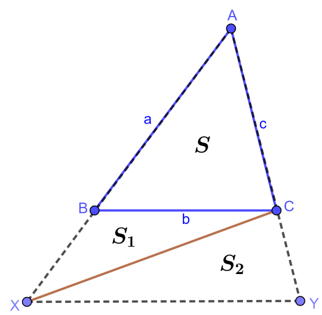
Demonstração:

Será mostrado que, se $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$, então, $\begin{cases} \angle A &= \angle A' \\ \angle B &= \angle B' \\ \angle C &= \angle C' \end{cases}$.

Como $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$, então, $\begin{cases} a' &= ak \\ b' &= bk \\ c' &= ck \end{cases}$.

Do triângulo ABC, é prolongado o lado AB e é marcado o ponto X. Em seguida, é prolongado o lado AC e é marcado o ponto Y de tal forma que $\overline{AX} = ak$ e $\overline{AY} = ck$. Dessa maneira, $\overline{AX} = a'$ e $\overline{AY} = c'$. Observa-se a Figura 1.17:

Figura 1.17 – Caso **LLL** de Semelhança de Triângulos



Fonte: O Autor

A seguir, será mostrado que $\overline{XY} = b'$. Denominam-se S, S_1 e S_2 as áreas dos triângulos ABC, BXC e CXY, respectivamente.

Como os triângulos ABC e BXC possuem mesma altura, então:

$$\frac{S}{a} = \frac{S+S_1}{a'} = \frac{S+S_1}{ak} \Rightarrow S+S_1 = Sk. \tag{1.1}$$

De maneira equivalente, os triângulos AXC e AXY apresentam a mesma altura, então:

$$\begin{aligned} \frac{S+S_1}{c} &= \frac{S+S_1+S_2}{c'} = \frac{S+S_1+S_2}{ck} \\ \Rightarrow & S+S_1+S_2 = (S+S_1)k = Sk+S_1k. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ao subtrair a equação 1.1 da equação 1.2, obtém-se:

$$S_2 = kS_1$$

Como $\frac{\overline{AX}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{AC}} = k$, pode-se aplicar a recíproca do Teorema de Tales para concluir que $\overline{BC} \parallel \overline{XY}$ (O segmento BC é paralelo ao segmento XY). Seja h a distância entre $\overline{BC}$ e $\overline{XY}$, tem-se então:

$$\begin{aligned} S_2 = kS_1 &\iff \frac{\overline{XY}h}{2} = k\frac{\overline{BC}h}{2} \\ &\iff \overline{XY} = k\overline{BC} = kb = b' \\ &\iff \overline{XY} = b'. \end{aligned}$$

Portanto, os triângulos AXY e $A'B'C'$ são congruentes, o que significa que possuem ângulos iguais, ou seja, $\angle A = \angle A'$, $\angle X = \angle B'$ e $\angle Y = \angle C'$.

Como $\overline{BC} \parallel \overline{XY}$, tem-se que $\angle B = \angle X = \angle B'$ e $\angle C = \angle Y = \angle C'$. Conclui-se, então, que:

$$\begin{cases} \angle A &= \angle A' \\ \angle B &= \angle B' \\ \angle C &= \angle C' \end{cases}.$$

Caso *AA* (Ângulo Ângulo)

Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos do plano tais que:

$$\begin{cases} \angle A &= \angle A' \\ \angle B &= \angle B' \end{cases}.$$

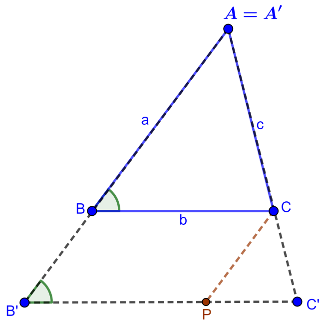
Então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ e, em particular, $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$.

Demonstração:

Será mostrado que, se $\begin{cases} \angle A & = & \angle A' \\ \angle B & = & \angle B' \end{cases}$, então $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$.

Considerando que $\angle A = \angle A'$, os triângulos ABC e $A'B'C'$ podem ser representados pela Figura 1.18:

Figura 1.18 – Caso **AA** de Semelhança de Triângulos



Fonte: O Autor

Uma vez que $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ devido a $\widehat{B} = \widehat{B'}$, é possível aplicar o Teorema de Tales, obtendo:

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}.$$

Seja P um ponto em $\overline{B'C'}$, tal que $\overline{CP} \parallel \overline{AB'}$, formando assim um paralelogramo $B'BCP$.

Como $\overline{CP} \parallel \overline{AB'}$, pelo Teorema de Tales, obtêm-se:

$$\frac{c'}{c} = \frac{b'}{\overline{B'P}} = \frac{b'}{b} \text{ , pois, } \overline{B'P} = \overline{BC} = b.$$

Assim sendo, é possível alcançar a seguinte conclusão:

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} = \frac{b'}{b}.$$

Caso *LAL* (Lado Ângulo Lado)

Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos do plano tais que:

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} \quad \text{e} \quad \angle A = \angle A'.$$

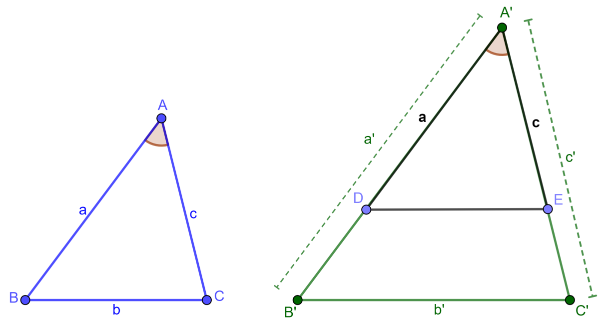
Assim, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ e, em particular, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ e $\frac{b'}{b} = k$.

Demonstração:

Será mostrado que, se $\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} = k$ e $\angle A = \angle A'$, então $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ e $\frac{b'}{b} = k$.

Consideram-se os triângulos ABC e $A'B'C'$ representados na Figura 1.19, tais que $\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} = k$ e $\angle A = \angle A'$.

Figura 1.19 – Caso **LAL** de Semelhança de Triângulos



Fonte: O Autor

Considerando que D e E são pontos de $\overline{A'B'}$ e $\overline{A'C'}$, respectivamente, com $\overline{A'D} = \overline{AB}$ e $\overline{A'E} = \overline{AC}$, pode-se afirmar que:

$$\frac{a'}{\overline{A'D}} = \frac{c'}{\overline{A'E}} \iff \frac{a'}{\overline{a}} = \frac{c'}{\overline{c}}.$$

Portanto, usando a recíproca do Teorema de Tales, conclui-se que $\overline{DE} \parallel \overline{B'C'}$.

Como $\overline{DE} \parallel \overline{B'C'}$, tem-se que $\angle B' = \angle D$ e $\angle C' = \angle E$.

Portanto, pelo **Caso LAL** de congruência de triângulos, obtém-se $\triangle A'DE \equiv \triangle ABC$. Isso implica que $\angle D = \angle B$ e $\angle E = \angle C$.

Logo, constata-se que $\angle B' = \angle B$ e $\angle C' = \angle C$. Além disso, pelo **Caso AA** de semelhança de triângulos mencionado anteriormente, tem-se:

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC, \quad \text{consequentemente,} \quad \frac{c'}{c} = k.$$

Dessa forma, conclui-se os três casos de semelhança de triângulos.

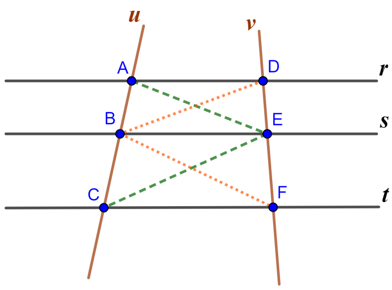
1.3.1.2 O Teorema de Tales

Conforme analisado anteriormente, nos Casos de Semelhança de Triângulos, foi citado o Teorema de Tales, havendo a necessidade de acrescentar ao material a dedução desse teorema tão importante para a matemática. Será realizada a demonstração desse teorema por meio de Áreas.

O Teorema de Tales afirma que se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, então os segmentos correspondes são proporcionais.

Considere r, s e t três retas paralelas e, u e v, duas retas transversais. Observe a Figura 1.20:

Figura 1.20 – Representação geométrica do Teorema de Tales



Fonte: O Autor

Em que, A, B e C são os pontos de interseção de u com r, s e t, respectivamente. E os pontos D, E e F são a interseção de v com r, s e t, nessa ordem.

Será demonstrado que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

Demonstração:

Considerando A como a representação da área de um triângulo qualquer. Por exemplo, A_{ABE} representando a área do triângulo ABE.

Ao observar a Figura 1.20 e por meio do triângulo AEC e sua ceviana EB, tem-se:

$$\frac{A_{AEB}}{A_{BEC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}, \tag{1.3}$$

pois, os triângulos AEB e BEC são de mesma altura.

Analisando o triângulo DBF e sua ceviana BE, tem-se:

$$\frac{A_{DBE}}{A_{EBF}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}, \tag{1.4}$$

em razão dos triângulos AEB e BEC serem de mesma altura.

Pelos triângulos ABE e DBE, tem-se:

$$A_{AEB} = A_{DBE}, \tag{1.5}$$

pois, são triângulos de mesma base e possuem a mesma altura, em função de r e s serem paralelas.

Observando os triângulos BEC e EBF, tem-se:

$$A_{BEC} = A_{EBF}. \tag{1.6}$$

Como, s e t são paralelas e os triângulos são de mesma base, então, possuem a mesma altura.

Das equações 1.5, 1.6 e 1.4, tem-se:

$$\frac{A_{AEB}}{A_{BEC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}. \tag{1.7}$$

Das equações 1.7 e 1.3, obtêm-se:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

É exposto, assim, que os segmentos correspondentes são proporcionais.

Na primeira parte deste documento, foram abordados os conceitos de Medidas, Áreas e Semelhança. Essa base de conhecimento será fundamental para enfrentar os problemas apresentados no livro de (Alberti, 2006) , os quais serão abordados nas seções 2 e 3. Esses problemas envolvem o cálculo de diversas medidas, como alturas, áreas e distâncias. É imprescindível destacar que a capacidade de identificar triângulos semelhantes desempenhará um papel crucial na solução dessas questões.

Ao estabelecer conexões entre esses tópicos abordados e a prática educativa, promove-se um ambiente de aprendizagem que desenvolve habilidades essenciais para a vida do aluno. A aplicação dos conceitos de Medidas, Áreas e Semelhança em situações práticas proporciona aos alunos a oportunidade de aprimorar sua capacidade de resolução de problemas do cotidiano, preparando-os para enfrentar desafios futuros de forma mais eficiente e consciente.

(Skovsmose, 2000) destaca que ao relacionar os conteúdos matemáticos com problemas reais, é possível estimular reflexões sobre a matemática e suas aplicações práticas. Essa abordagem também envolve a transição entre diferentes ambientes de aprendizagem, o que pode engajar os alunos em ações e reflexões mais significativas.

2 PROBLEMAS DA PRIMEIRA PARTE

2.1 PROBLEMA 1 - MEDIR COM A VISTA A ALTURA DE UMA TORRE

Nesse primeiro problema da Primeira Parte do livro, Leon Battista Alberti é apresentada a situação-problema de como medir a altura de uma torre, dividindo em dois casos. No primeiro caso, tem-se o conhecimento da distância até a torre e pode-se medir diretamente uma parte dela, e no segundo, não é possível medir diretamente uma parte dela.

2.1.1 *Como proceder se podemos conhecer sua distância e medir diretamente uma parte dela*

A seguir, apresenta-se o procedimento que (Alberti, 2006) propôs na época para realizar o primeiro caso:

> Se quiser medir a altura de uma torre situada numa praça apenas olhando-a da outra extremidade, proceda da seguinte maneira. Finque uma flecha no chão, bem verticalmente, distancie-se um pouco, seis ou oito pés, e dali vise o topo da torre tomando a flecha como mira; coloque uma marca com um pouco de cera no lugar preciso em que seu olhar encontra a flecha, e chamemos *A* essa marca de cera. Depois, do mesmo lugar em que tinha mirado o topo da torre, mire sua base e, novamente, ali onde seu olhar encontra a flecha, coloque uma marca de cera, e chamemos essa segunda marca de *B*. Finalmente, aponte o olhar para algum lugar da torre que conheça e do qual possa facilmente medir a posição até a base da torre com sua flecha, como por exemplo o pórtico de entrada, ou algum buraco, ou algo parecido situado bem embaixo. Assim como fez mirando o topo e depois a base da torre, faça enfim uma terceira marca de cera no lugar em que seu olhar encontra a flecha. Feito isso, chamemos *C* essa terceira marca, como na FIGURA 1 (ALBERTI, 2006, p. 29).

Figura 2.1 – Figura 1 do Livro Matemática Lúdica

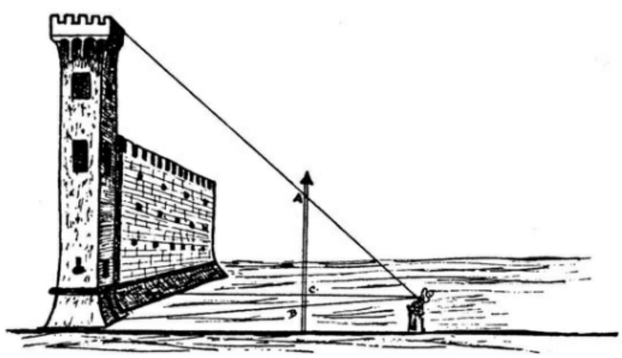


FIG. 1

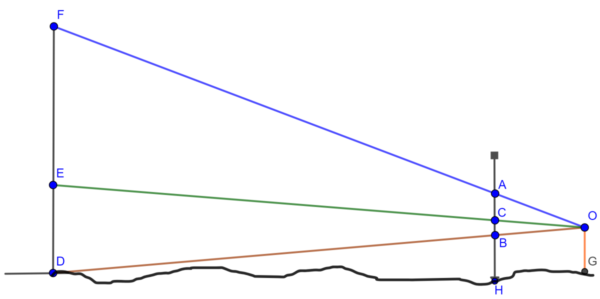
Fonte: Livro Matemática Lúdica

> Digo que a parte da flecha que está entre a marca de cera *B* e a marca *C* cabe na parte da flecha situada entre o ponto A e o ponto *B* tantas vezes quanto a parte inferior da torre, já conhecida, cabe na parte superior cuja altura é desconhecida. E para captar mais claramente e na prática esse procedimento, examinemos isto com um exemplo numérico. Caso a torre tenha 100 pés de altura e o pórtico, 10, o senhor encontrará a mesma relação sobre a flecha, isto é, do mesmo modo que essa parte da torre, 10, cabe 9 vezes na parte superior, maior, e é a 10ª parte da torre inteira, assim a parte *AC* da flecha será tal que, dividida em 9 partes, conterá 9 vezes *BC*, que é a 10ª parte de AB considerada integralmente. Ao proceder desta forma, nunca incorrerá em erro, contanto que zele para manter o olho sempre no mesmo lugar para colocar as marcas. Pode fazer a mesma coisa suspendendo um fio de chumbo à sua frente e marcando suas miradas com pérolas, como lhe mostrei algumas vezes (ALBERTI, 2006, p. 30).

Como se está trabalhando com problemas reais, a torre pode situar-se em qualquer tipo de terreno. Sendo assim, o terreno entre o observador e a torre não necessariamente é horizontal nem plano; ele pode ser inclinado ou também irregular. O que se precisa é o acesso à base da torre e a capacidade de ver essa base de onde se quer calcular sua distância. Isso garante a importância desse método, pois se encaixa muito bem na maioria das condições reais de relevo.

Pode-se representar geometricamente esse problema de Alberti por exemplificação da Figura 2.2:

Figura 2.2 – Representação Geométrica do Problema $2.1.1$



Fonte: O Autor

Pela Figura 2.2, têm-se as informações a seguir:

- o ponto F representa o topo da torre;
- o ponto E indica o local em que o observador direciona seu olhar para marcar o ponto C na flecha, que é um objeto verticalmente fixado no solo, como uma estaca ou objeto pontiagudo;
- o ponto D representa a base da torre;
- ao alinhar a visão com o topo da torre (ponto F), o observador marca o ponto A na flecha;

- ao focar o olhar na base da torre, o observador marca o ponto B na flecha;
- o ponto H representa a base da flecha;
- o ponto O representa a altura dos olhos do observador;
- e o ponto G representa os pés do observador.

Com base no texto de (Alberti, 2006) e na análise da Figura 2.2, são levantadas algumas observações e informações relevantes para o desenvolvimento do procedimento, tais como:

- Para determinar a localização do ponto E de forma precisa, é necessário conhecer a distância entre ele e o ponto D. Por essa razão, o problema explicitamente menciona a importância de se ter acesso à base da torre, pois é lá que a marcação será feita e o cálculo dessa medida será efetuado;
- Conforme mencionado no texto, é necessário que a flecha seja vertical, ou seja, paralela à torre ($\overline{AH} \parallel \overline{FD}$). Para atingir essa verticalidade, pode-se utilizar uma ferramenta comum chamada "prumo", utilizada por pedreiros em construções;
- o ponto O, que representa o olho do observador, deve ser fixo no decorrer das marcações na flecha;
- e, também, que não necessariamente os pontos G, H e D devem ser colineares, pois o solo raramente será plano, isso facilita na execução desse procedimento. O relevante é que o observador consiga ver a base da torre.

Seguindo com esses dados, serão aplicadas as propriedades matemáticas necessárias:

- Com $\overline{AH} \parallel \overline{FD}$ e pela transversal $\overline{DO}$, então $\angle CBO = \angle EDO$ e $\angle COB$ é comum aos triângulos COB e EOD. Logo, pelo caso AA de Semelhança de Triângulos, temos $\triangle COB \sim \triangle EOD$.
- Com $\overline{AH} \parallel \overline{FD}$ e pela transversal $\overline{EO}$, assim, $\angle ACO = \angle FEO$ e $\angle AOC$ é comum aos triângulos AOC e FOE. Portanto, $\triangle AOC \sim \triangle FOE$.

Assim sendo, pela Semelhança dos Triângulos, $\triangle COB \sim \triangle EOD$ e $\triangle AOC \sim \triangle FOE$, tem-se:

$$\begin{gathered}\underbrace{\frac{\overline{OC}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \qquad e \qquad \frac{\overline{OC}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{EF}}} \\ \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{EF}} \Rightarrow \overline{EF} = \frac{\overline{CA}.\overline{DE}}{\overline{BC}}\end{gathered} \tag{2.1}$$

Como propôs (Alberti, 2006) , as distâncias $\overline{CA}$, $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ são conhecidas. Assim sendo, utilizando essa proporção, será possível encontrar $\overline{EF}$, que é desconhecida. Dessa forma, será descoberta a altura da torre, ou seja,

$$\overline{FD} = \overline{DE} + \overline{EF}.$$

Ao final do texto, é apresentado um exemplo por Leon Battista para melhor explicar o procedimento; esse exemplo será relacionado com o que acabou de ser estudado.

Com os dados fornecidos, será determinada a altura desconhecida $\overline{FD}$. A seguir estão os dados do exemplo:

- $\overline{BC} = 10$ pés;
- $\overline{CA} = 9 \cdot \overline{BC}$.

Aplicando esses valores na equação 2.1, obtém-se:

$$\overline{EF} = \frac{9 \cdot \overline{BC} \cdot 10}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{EF} = 9 \cdot 10 = 90 \text{ pés}.$$

Portanto, a altura $\overline{FD}$ da torre é dada por:

$$\overline{FD} = \overline{DE} + \overline{EF} \Rightarrow \overline{FD} = 10 + 90 = 100 \text{ pés}.$$

exatamente o valor encontrado por Leon Battista. Como 1 pé equivale a $0,3048$ metros, então $\overline{FD} = 30,48$ metros.

Nota-se, assim, ao decorrer da resolução do problema, que a proposta inicial dada é que se deva conhecer a distância entre o observador e a torre, mas observa-se que não é necessário calcular essa medida. Quando Alberti diz conhecer essa distância, está-se referindo a ter acesso à base e também conseguir enxergar essa base de onde se deseja calcular sua distância.

2.1.2 *Como proceder se podemos conhecer a distância da torre, mas não medir diretamente nenhuma parte dela*

Estudar-se-á o segundo caso em que (Alberti, 2006) propõe calcular a altura de uma torre, no qual se deve conhecer a sua distância, mas não se pode medir nenhuma parte dela. Segue abaixo o procedimento:

> O senhor pode calcular da mesma forma a altura de uma torre da qual não consegue medir diretamente nenhuma parte, caso lhe seja possível se aproximar até sua base. Finque no chão uma flecha, como disse anteriormente, afaste-se um pouco e, com o olho à flor do solo, vise o topo da torre utilizando a flecha como mira; coloque uma marca de cera no lugar em que seu olhar encontra a flecha. Chamemos *A* o topo da flecha, *B* sua base, *C* a marca de cera que o senhor colocou e *D* a posição de seu olho, como na FIGURA 2 (ALBERTI, 2006, p. 31).

Figura 2.3 – Figura 2 do Livro Matemática Lúdica

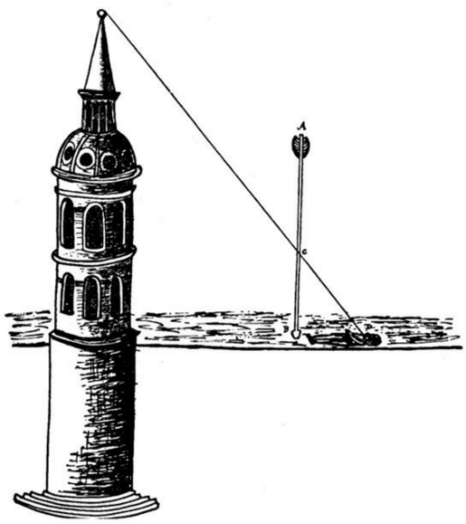


FIG. 2

Fonte: Livro Matemática Lúdica

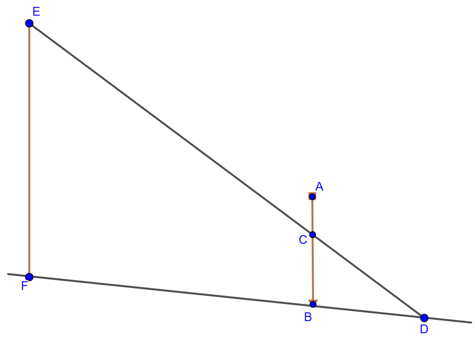
> Digo que a parte da flecha que está entre *C* e *B* cabe na distância de *B* a *D*, isto é, a distância de seu olho à base da flecha, tantas vezes quanto a altura da torre cabe na distância de seu olho até a base da torre. No caso, por exemplo, de a torre ter 100 pés de altura, e que seu olho esteja 1.000 pés distante da base da torre, o senhor descobrirá em sua flecha que a mira está analogamente situada, isto é, do mesmo modo que 100 cabe 10 vezes em 1.000, assim *CB* cabe dez vezes em *DB*. Então, ao medir quantas vezes *CB* cabe em *DB*, saberá com esse número sem o menor erro quantas vezes a altura da torre cabe na distância que separa seu olho da base dessa torre. E poderá, de modo similar, fazer a mesma coisa com o fio de chumbo, marcando o ponto *C* com uma pérola (ALBERTI, 2006, p. 32).

Neste caso, não é necessário medir partes específicas da torre. No entanto, é importante ter acesso à base da torre para medir a distância até a posição do observador. Portanto, é necessário encontrar um local o mais plano possível entre o observador e a torre, a fim de calcular essa distância. O local não precisa ser necessariamente horizontal, todavia é importante que seja aproximadamente plano.

Outro aspecto importante a considerar é o posicionamento do olho do observador ao nível do solo. Para obter maior precisão, é possível encostar a lateral do rosto no solo, permitindo que um dos olhos fique o mais próximo possível do solo, possibilitando, assim, a visualização da torre.

A representação geométrica desse problema pode ser visualizada na Figura 2.4:

Figura 2.4 – Representação Geométrica do Procedimento $2.1.2$



Fonte: O Autor

Com base na Figura 2.4, tem-se as seguintes informações:

- o ponto E representa o topo da torre;
- o ponto F representa a base da torre;
- o ponto A representa o topo da flecha;
- ao direcionar o olhar para o ponto E, que corresponde ao topo da torre, é marcado o ponto C na flecha;
- o ponto B representa a base da flecha;
- e o ponto D representa o olho do observador.

Ao observar a Figura 2.4, nota-se algumas informações importantes a serem consideradas para a execução do procedimento de (Alberti, 2006) .

- a flecha deve ficar na vertical, consequentemente paralela à torre, isto é, $\overline{AB} \| \overline{EF}$;
- o ponto D, que representa o olho do observador, deve ser fixo no desenrolar do procedimento;

- os pontos F, B e D devem ser colineares, para isso precisamos procurar um espaço entre F e D o mais plano possível, como foi dito anteriormente.

Continuando com esses recursos, serão aplicadas as propriedades matemáticas fundamentais conforme indicado a seguir:

Com o segmento $\overline{FD}$ sendo transversal às retas paralelas AB e EF ($\overline{AB} \parallel \overline{EF}$), tem-se que $\angle EFD = \angle CBD$ e $\angle FDE$ é comum aos triângulos DBC e DFE. Portanto, pelo Caso AA de Semelhança de Triângulos, pode-se concluir que $\triangle DBC \sim \triangle DFE$. Então:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FD}} \Rightarrow \overline{EF} = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{FD}}{\overline{BD}}. \tag{2.2}$$

À vista disso, pode-se determinar o comprimento de $\overline{EF}$, uma vez que as distâncias de $\overline{CB}$, $\overline{FD}$ e $\overline{BD}$ são conhecidas.

Como no caso anterior, Leon Battista propõe um exemplo para melhor explicar o procedimento. Segue abaixo os dados do exemplo:

- $\overline{FD} = 1000$ pés;
- $\overline{BD} = 10 \cdot \overline{CB}$.

Vai-se proceder à determinação da altura da torre, representada por $\overline{EF}$, que é desconhecida.

Aplicando os valores dados na Equação 2.2, tem-se:

$$\overline{EF} = \frac{\overline{CB} \cdot 1000}{10 \cdot \overline{CB}} \Rightarrow \overline{EF} = 100 \text{ pés } = 30,48 \; \texttt{metros},$$

conforme mencionado por Leon Battista no texto do problema.

2.2 PROBLEMA 2 - MEDIR A LARGURA DE UM RIO

Neste problema, (Alberti, 2006) apresenta um procedimento para medir a largura de um rio. Esse procedimento é significativo, pois utilizando dessa mesma técnica é possível calcular as distâncias em linhas retas visíveis. No entanto, no Problema 2 da Seção 3, será abordado outro procedimento para calcular distâncias em linhas retas visíveis.

A seguir, estão apresentadas as instruções fornecidas no texto:

> Meça a largura de um rio, a partir da margem, como se segue. Tome posição num lugar bem plano, finque na terra uma flecha, como disse anteriormente, e chamemos essa flecha *AB*. Faça uma marca de cera nela, precisamente na altura dos olhos, e chame *C* esta marca. Depois afaste-se dessa flecha *AB* cerca de uma braça, e finque ali de maneira semelhante uma segunda flecha, e seja *DE* esta segunda flecha; coloque mais uma marca de cera exatamente na altura dos olhos sobre a flecha *DE* e chame-a *F*. Coloque o olho precisamente contra esta marca *F* e mire algo de perceptível na outra margem do rio no alinhamento da flecha *AB*, como um arbusto, ou algum local ou uma pedra; chamemos esse objeto *G*. Ali onde seu olhar, na mirada, encontra a flecha *AB*, coloque uma outra marca de cera e chame-a *H*, como podemos ver na FIGURA 4 (ALBERTI, 2006, p. 33-34).

Figura 2.5 – Figura 4 do Livro Matemática Lúdica

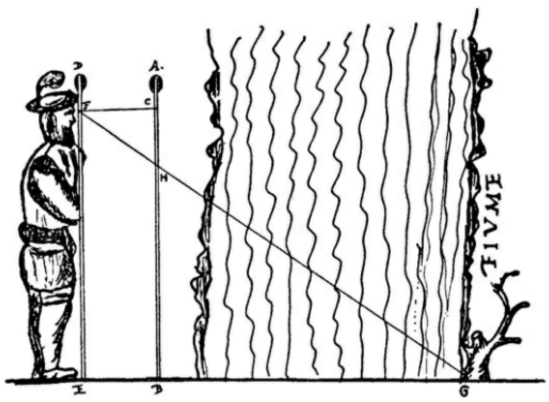


FIG. 4

Fonte: Livro Matemática Lúdica

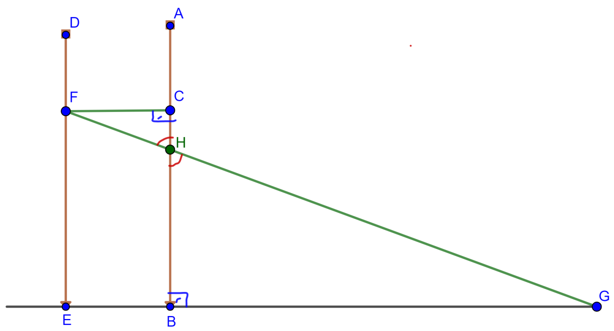
> Digo que, caso meça a distância entre as duas marcas na primeira flecha, isto é, a distância *CH* sobre *AB*, ela caberá tantas vezes na distância que separa as duas flechas, ou seja, *CF*, quanto *HB* cabe em BG, isto é, a distância que separa a primeira flecha do arbusto visado. Tomemos um exemplo numérico. Sejam 30 passos a largura do rio, e seja 1 passo a distância *CB*, e 1 passo também a distância *FE*. A distância do ponto *H* ao ponto *C* será tal que caberá em *FC* tantas vezes quanto *HB* cabe em *BC*, ou seja, 30 vezes, e se *HC* cabe em *CF* 30 vezes, então *FE* caberá em *EQ* também 30 vezes, de modo que a largura do rio seja 30 vezes como a de seu olho a seus pés (ALBERTI, 2006, p. 34-35).

Neste caso, para calcular a largura de um rio, é necessário encontrar uma área plana nivelada com o rio, conforme mencionado na citação, à margem do mesmo onde o observador está localizado. Isso é feito com o objetivo de posicionar as duas flechas citadas no texto. As flechas devem ser fincadas a uma distância de aproximadamente uma braça (cerca de $2,2$ metros) da outra, de modo que esse comprimento seja perpendicular à margem do rio.

Caso não seja possível encontrar uma área nivelada, pode-se preparar a região por meio de escavações até atingir o objetivo desejado. Utilizando ferramentas comumente utilizadas por pedreiros, como uma “mangueira de nível” e um aparelho chamado “nível”, é possível garantir que essa área fique nivelada com o rio. Em seguida, podem-se posicionar as duas flechas e prosseguir com o procedimento.

Dessa forma, é possível representar esse problema geometricamente por meio da Figura 2.6:

Figura 2.6 – Representação Geométrica do Procedimento 2.2



Fonte: O Autor

Pela Figura 2.6 dispomos das seguintes informações:

- a flecha AB deve ser colocada ao lado do rio, mais especificamente no local inicial a partir do qual desejamos calcular a largura;
- a flecha DE é posicionada a uma distância aproximada de $2,2$ metros da flecha AB, no sentido oposto ao rio;
- o ponto C indica a altura dos olhos em relação à flecha AB;
- o ponto F indica a altura dos olhos em relação à flecha DE;
- o ponto G representa um objeto visível na margem oposta do rio, quando observado a partir do ponto F alinhado com a flecha AB;
- ao direcionar o olhar para o ponto G e manter os olhos na altura do ponto F, marca-se o ponto H na flecha AB;

- e o segmento BG representa a largura do rio, que é a medida que deseja-se calcular.

Da Figura 2.6, segue alguns elementos recorrentes dos dados anteriores para o desenvolvimento do problema:

- as flechas AB e DE devem estar na posição vertical, ou seja, $\overline{AB} \| \overline{DE}$;
- é importante que as margens do rio sejam aproximadamente paralelas, pelo menos na área em que estamos medindo sua largura;
- para assegurar que o segmento EB seja perpendicular à margem do rio, pode-se utilizar um esquadro de cordas, o qual será abordado com maior detalhe no Problema 1 da Seção 3;
- para garantir que os pontos E, B e G sejam colineares, é necessário que o espaço entre E e B esteja no mesmo nível do rio, como mencionado no início do problema;
- tanto $\overline{BC}$ quanto $\overline{EF}$ representam a altura do observador, ou seja, $\overline{BC} = \overline{EF}$.

Ao enfatizar que as margens do rio devem ser aproximadamente paralelas na área em que o procedimento será realizado, busca-se obter uma medição precisa da largura. No entanto, esse procedimento pode ser aplicado para calcular qualquer distância entre as margens, por exemplo, a distância entre as extremidades de uma ponte que será construída para atravessar o rio.

No momento a seguir, serão aplicadas as propriedades matemáticas essenciais. Seguem as etapas a seguir:

- $\angle FCH = 90°$ = $\angle HBG$;
- os ângulos $\angle CHF$ e $\angle BHG$ são ângulos opostos pelo vértice, portanto $\angle CHF = \angle BHG$.

Sendo assim, tem-se que $\triangle FCH \sim \triangle HBG$ pelo caso AA de Semelhança de Triângulos. Logo:

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{BG}} \Rightarrow \overline{BG} = \frac{\overline{BH} \cdot \overline{FC}}{\overline{CH}}.$$

As medidas $\overline{BH}$, $\overline{FC}$ e $\overline{CH}$ são conhecidas. Com base na semelhança dos triângulos, pode-se determinar a largura do rio, representada por $\overline{BG}$.

Observe que o uso dessa técnica não se restringe apenas à medição da largura de um rio, pois é aplicável para calcular a distância necessária na construção de uma ponte ou determinar a largura de qualquer espaço, como um campo de futebol, entre outros exemplos. É fundamental estar atento e realizar os ajustes adequados de acordo com o contexto em que a técnica for utilizada. Em algumas situações, quando a distância desejada não estiver em um terreno nivelado, pode-se recorrer à semelhança entre os triângulos FEG e HBG. Além disso, não é necessário que os ângulos $\angle FEG$ e $\angle HBG$ sejam retos.

Essas possibilidades de aplicar o procedimento em diversas situações abrem um leque de oportunidades para o aluno exercitar sua criatividade e utilizá-lo em várias circunstâncias do seu cotidiano. Com a compreensão desses conceitos, o estudante poderá desenvolver habilidades práticas valiosas que o capacitarão a resolver problemas de forma inovadora, adaptando a técnica conforme as necessidades específicas de cada caso. Veja o que é mencionado por (D'Ambrósio, 1986) :

> Parece de fundamental importância e que representa o verdadeiro espírito da Matemática é a capacidade de modelar situação real, codificá-las adequadamente, de maneira a permitir a utilização das técnicas e resultados conhecidos em um outro contexto, novo. Isto é, a transferência de aprendizado resultante de certa situação para uma situação nova é um ponto crucial do que se poderia chamar aprendizado da Matemática, e talvez o objetivo maior do seu ensino (D'AMBRÓSIO, 1986, p. 44).

2.3 PROBLEMA 3 - MEDIR A ALTURA DE UMA TORRE DA QUAL SÓ SE CONSEGUE AVISTAR O TOPO

Nesse problema, é exposto por Leon Battista como medir a altura de uma torre. No entanto, ao contrário dos dois primeiros casos, neste considera-se que só é possível avistar o topo da torre. Em outras palavras, não se tem acesso à base da torre. Portanto, esse método proporciona uma abordagem diferenciada para medir alturas em geral. Abaixo estão listados todos os passos do texto para calcular essa medida:

> Caso aviste o topo de uma torre da qual não consegue ver nada mais e queira conhecer sua altura, faça como se segue. Finque na terra sua flecha como foi dito antes, coloque seu olho no nível do solo e mire o topo da torre; marque com uma cera o ponto de encontro com sua mirada, e chamemos *AB* a flecha, *C* o topo da torre, *D* o ponto em que mantém o olhar e *E* a marca da cera sobre a flecha. Feito isso, recue um pouco e, da mesma forma, mire a partir do solo o topo da torre e marque o lugar onde sua mirada encontrou a flecha, e chamemos *F* essa segunda marca de cera, e *G* o lugar onde estava seu olho para mirar, como podemos ver na FIGURA 6 (ALBERTI, 2006, p. 35-36).

Figura 2.7 – Figura 6 do Livro Matemática Lúdica

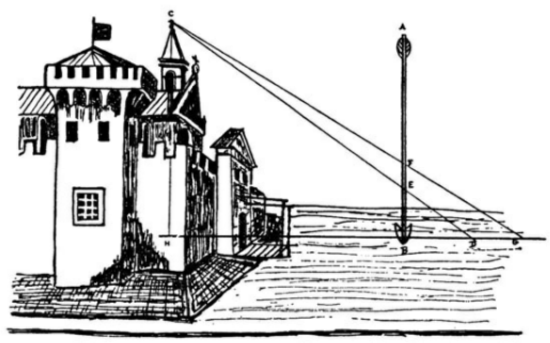


FIG. 6

Fonte: Livro Matemática Lúdica

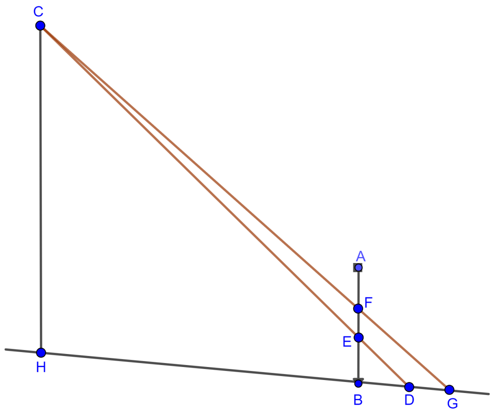
> Note bem que há nessa figura quatro triângulos, dois dos quais são conhecidos: um grande, *FBG*, e um pequeno, *EBD*. A partir destes, podemos conhecer os dois triângulos maiores, um chamado *CHO* e o outro *CHD*, e compreender que, da mesma forma que anteriormente, *DB* corresponde a *EB* em seu triângulo, assim como *GH* corresponde a *HC* no triângulo maior.Meça então, para fazer o cálculo por esse método, quantas vezes *EB* cabe em *DB*, e diremos, para dar um exemplo fácil, que cabe ali 2 vezes, donde se deduz que *HD* é 2 vezes como *CH*. Meça depois quantas vezes *BF* cabe em *BG*, digamos 3 vezes, donde resulta que *CH* equivale a um terço de *HG*.
> Segue-se assim que há uma grandeza que está duas vezes em *HD* e três vezes em *GH*. Não se sabe quanto vale essa grandeza, se é um côvado, um pé ou oque seja. Eis como fazer. Se *DH* vale 2 e *HG* 3, então é porque *HG* ultrapassa *HD* em 1, e o que é ultrapassado é *DG*. Logo, *DG* vale $1/3$. Meça esse *DG*; se for igual a 10 pés, então o *HG* inteiro será igual a 30 pés. A partir daí raciocine assim. Se a torre *CH* cabe 3 vezes em toda a distância *HG*, e se *DG* equivale a seu terço e cabe portanto 3 vezes no *HG* inteiro, quem duvidará de que a torre *HC* é do mesmo comprimento que esse espaço *DG*? Mas esse comprimento *DG* vale 10, portanto a torre que é igual a essa distância equivalerá ela também a 10 pés. E em todas as coisas que medir, encontrará semelhantes cálculos sutis, mas utilíssimos, para multas coisas, cuja medida e mesmo a descoberta de grandezas não são acessíveis diretamente (ALBERTI, 2006, p. 36-37).

Como já mencionado nos dois casos do Problema 1, o espaço entre a torre e o observador não necessariamente é um terreno plano e horizontal. Contudo, mesmo sem acesso à base da torre, é importante procurar um local mais plano possível, mesmo que seja inclinado, para obter um resultado mais preciso da altura.

Além disso, neste procedimento, também é necessário posicionar o olho ao nível do solo, seguindo a orientação do segundo caso do Problema 1.

Geometricamente, esse problema pode ser representado pela Figura 2.8:

Figura 2.8 – Representação Geométrica do Procedimento 2.3



Fonte: O Autor

Considerando a Figura 2.8, dispomos dos elementos abaixo:

- o ponto C representa o topo da torre;
- o ponto H representa a base da torre;
- o ponto A representa o topo da flecha;
- o ponto B representa a base da flecha;
- o ponto D representa o olho no nível do solo, situado um pouco próximo da flecha AB;
- o ponto G representa o olho no nível do solo após um pequeno recuo do ponto D em relação à flecha AB;
- ao direcionar o olhar para o ponto C (Topo da Torre), a partir do ponto D, marca-se o ponto E na flecha AB;

- e ao avistar o ponto C (Topo da Torre), a partir do ponto G, marca-se o ponto F na flecha AB;

Com as indicações da Figura 2.8, seguem abaixo alguns dados para prosseguir com a análise de todo o procedimento:

- a flecha AB deve estar na posição vertical, o que implica que ela é paralela à torre. Portanto, ocorre que $\overline{AB} \| \overline{CH}$;
- o ponto H é imaginário, já que a base não está à vista;
- é necessário que os pontos H, B, D e G estejam colineares, ou seja, o ponto H, mesmo sendo imaginário, deve pertencer à reta BG. Portanto, convém procurar um local bem plano, mesmo que seja inclinado, para assegurar essa condição;
- para garantir que H, B, D e G sejam colineares, é possível utilizar uma corda esticada em direção oposta à torre, partindo da flecha. Suponha-se que essa corda seja representada pelo segmento BG. Em seguida, marque o ponto D de forma que ele esteja sobre essa corda;
- as marcações dos pontos D e G são feitas precisamente para posicionar o olho no nível do solo;
- e os pontos B, D e G não são coincidentes, pois representam a base da flecha e as duas posições em que o observador visa o topo da torre ao longo do alinhamento da flecha.

Considerando todas as explicações anteriores, serão utilizadas as propriedades matemáticas a seguir:

(I) os triângulos FBG e EBD são conhecidos;

(II) $\angle CHD = \angle EBD$, pois, $\overline{AB} \| \overline{CH}$;

(III) $\angle CDH$ é comum aos triângulos CDH e EDB;

(IV) $\angle CHG = \angle FBG$, pois, $\overline{AB} \| \overline{CH}$;

(V) $\angle CGH$ é comum aos triângulos CGH e FGB.

Com base nos itens (II) e (III), pode-se concluir que:

$$\triangle CHD \sim \triangle EBD, \tag{2.3}$$

pelo caso AA de Semelhança de Triângulos.

A partir das informações apresentadas nos itens (IV) e (V), infere-se que:

$$\triangle CHG \sim \triangle FBG. \tag{2.4}$$

pelo caso AA de Semelhança de Triângulos.

De acordo com a expressão 2.3, pode-se afirmar que:

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DH}} \Rightarrow \overline{DH} = \frac{\overline{CH} \cdot \overline{DB}}{\overline{EB}} \Rightarrow \overline{DH} = k \cdot \overline{CH}, \tag{2.5}$$

no qual, $k = \dfrac{\overline{DB}}{\overline{EB}}$ e as medidas $\overline{DB}$ e $\overline{EB}$ são conhecidas.

Sendo assim, segundo a expressão 2.4, conclui-se que:

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{GH}} \Rightarrow \overline{GH} = \frac{\overline{CH} \cdot \overline{GB}}{\overline{FB}} \Rightarrow \overline{GH} = q \cdot \overline{CH}, \tag{2.6}$$

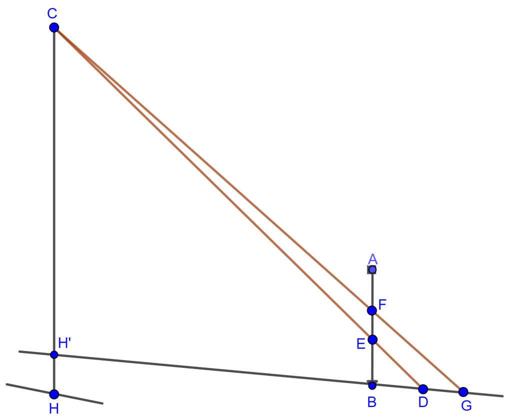
em que, $q = \dfrac{\overline{GB}}{\overline{FB}}$ e as medidas $\overline{GB}$ e $\overline{FB}$ são conhecidas.

Devido a $\overline{GD} = \overline{GH} - \overline{DH}$, ao subtrair a equação 2.5 da equação 2.6, obtém-se:

$$\begin{aligned} \overline{GH} - \overline{DH} = q \cdot \overline{CH} - k \cdot \overline{CH} \Rightarrow \overline{GD} = \overline{CH}(q-k) \\ \Rightarrow \overline{CH} = \frac{\overline{GD}}{q-k}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Considerando os cálculos anteriores, torna-se explícita a importância de um terreno plano entre a torre e o observador. No entanto, é difícil conhecer a topografia exata dessa área próxima à torre, já que não temos acesso à sua base. Apresenta-se, desse modo, uma representação geométrica (Figura 2.9) para ilustrar que mesmo em um terreno não plano, ainda é possível realizar o procedimento, embora haja algumas restrições.

Figura 2.9 – Representação Geométrica 2 do Procedimento 2.3



Fonte: O Autor

Na Figura 2.9, nota-se que o ponto H, que representa a base da torre, não é colinear com os pontos B, D e G, devido à presença de um terreno não plano. Ao traçar uma reta imaginária $\overleftrightarrow{BG}$, obtém-se o ponto H' como a interseção de $\overleftrightarrow{BG}$ com $\overleftrightarrow{CH}$, ou seja, $\overleftrightarrow{BG} \cap \overleftrightarrow{CH} = H'$. O ponto H' pode estar acima de H (Figura 2.9) ou abaixo de H. Assim, a altura CH' encontrada pode não ser a altura real da torre ($\overline{CH'} \neq \overline{CH}$). Entretanto, se o terreno for plano e seguir a mesma inclinação de $\overline{BG}$, a torre terá a altura $\overline{CH'}$ em relação a esse terreno.

Em seguida, (Alberti, 2006) apresenta um exemplo para demonstrar como proceder diante desse problema. Ao analisar todo o processo desse exemplo, chega-se à seguinte conclusão em relação aos dados necessários para determinar a altura $\overline{CH}$ da torre:

- $\overline{GB} = 3 \cdot \overline{FB}$;
- $\overline{DB} = 2 \cdot \overline{EB}$;
- $\overline{DG} = 10$ pés.

Ao substituir esses valores na equação 2.7, obtém-se:

$$\overline{CH} = \frac{10}{3-2} \Rightarrow \overline{CH} = 10 \text{ pés } (3,048 \texttt{ metros}), \qquad (2.8)$$

tal que, $q = \dfrac{3 \cdot \overline{FB}}{\overline{FB}} = 3$ e $k = \dfrac{2 \cdot \overline{EB}}{\overline{EB}} = 2$.

Logo, $\overline{CH} = 10$ pés, como Leon Battista propôs no exemplo.

Ao ser apresentada essa técnica para calcular a altura de uma torre ou de qualquer objeto, baseada na observação do topo sem visualização da base, percebe-se que essa abordagem tem potencial para gerar resultados importantes. Isso acontece ao enfatizar o processo de observação e experimentação, proporcionando aos alunos uma experiência mais significativa e uma melhor compreensão do conteúdo. Tal metodologia valoriza a aprendizagem por meio da experiência e da ação, tornando o processo educacional mais efetivo e envolvente.

De acordo com (Navarro e Sousa, 2021) , as atividades lúdicas carregam consigo a concepção de que o foco não deve se limitar apenas ao resultado final, mas sim à própria ação em si. Através dessa vivência, é possível experimentar ciclos de significação, ressignificação e apreensão, proporcionando ao aluno a oportunidade de se conhecer melhor e conhecer o próximo. No contexto escolar, essa abordagem lúdica propicia uma maior apropriação do conteúdo, uma vez que o aprendizado acontece de forma prazerosa e não de maneira mecânica e pronta. Ao associar essas ideias, percebe-se que tanto a técnica de observação mencionada quanto a abordagem lúdica compartilham a valorização da experiência como um meio enriquecedor de aprendizado.

3 PROBLEMAS DA SEGUNDA PARTE

3.1 PROBLEMA 1: AGRIMENSURA - MEDIR CAMPOS DE FORMAS VARIADAS

(Alberti, 2006) apresenta um método para calcular as áreas de campos em diversos formatos, como campos quadrados, retângulos, campos com lados de tamanhos diferentes, circulares ou partes de um círculo. O autor aborda o cálculo da área de um campo em formato de polígono arbitrário. As medidas necessárias para realizar os cálculos são obtidas utilizando ferramentas simples disponíveis.

Segue abaixo o texto inicial do escritor sobre a Área desses vários formatos de campos:

> Mas voltemos agora para o que o senhor me pedira e falemos dos recursos para se medir os campos. Os autores da Antiguidade, em particular Columela, Savasorda e outros agrimensores, e entre os modernos Leonardo de Pisa, estenderam-se bastante sobre esse assunto; são coisas complexas e eruditas, contudo vou descrever as mais divertidas e, ao mesmo tempo, as que podem ser mais úteis. Não enumero, por preocupação com a brevidade, todas as formas de campos: quadrados, mais compridos que largos, mais estreitos numa ponta que na outra, de três lados, com muitos lados, redondos ou partes de um círculo, ou outros. Suponho aqui que os campos têm seus lados totalmente arredondados, ou feitos de segmentos de reta, ou de arcos de círculo e segmentos de reta, ou então de vários arcos de círculo, como podemos ver na amostra fornecida na FIGURA 13 (ALBERTI, 2006, p. 48-49).

Figura 3.1 – Figura 13 do Livro Matemática Lúdica

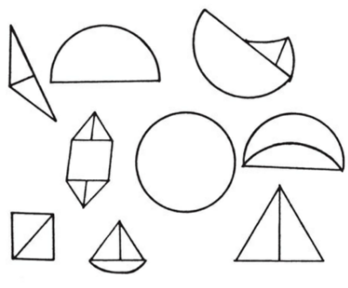


FIG. 13

Fonte: Livro Matemática Lúdica

O autor aborda a questão das áreas de campos em diversos formatos, dividindo-a em vários casos. O primeiro caso é apresentado a seguir:

3.1.1 Campo com lados retos e ângulos de esquadro

> Se quiser medi-los, proceda da seguinte forma.
> Comecemos por aqueles cujos lados são todos retos. Se o campo apresentar lados retos e ângulos de esquadro, descobrirá facilmente quanto totaliza em pés quadrados agindo como digo. Pegue o lado que quiser e anote quantos pés há de uma ponta à outra. Quando chegar à ponta, siga para o comprimento do outro, e meça-o. Descobrirá por exemplo que um desses lados totaliza 10 pés, e o outro 10 também. Multiplique os dois números um pelo outro. Quem contar 10 vezes 10 encontrará 100. Temos então 100 pés quadrados. Se tivéssemos considerado por exemplo 10 para um lado e 20 para o outro, então teríamos tido 20 vezes 10, ou seja, 200 (ALBERTI, 2006, p. 50).

Quando se diz “ângulo de esquadro”, está-se referindo a um ângulo reto. Neste caso específico, está-se lidando com um retângulo, conforme representado na Figura 3.2, a primeira figura.

Dessa forma, um dos lados é chamado de base e o outro de altura. Denotando a medida da base como b e a altura como h, a área (A) deste retângulo é dada por:

$$A = bh.$$

No texto, Leon Battista apresenta dois exemplos, em um dos quais ele menciona que um dos lados mede 10 pés e o outro lado mede 20 pés. Nesse caso, a área A é calculada por:

$$A = 10 \cdot 20 = 200 \text{ pés quadrados.}$$

Como 1 pé quadrado mede $0,0929$ metros quadrados, então $A \approx 18,58$ metros quadrados.

É perceptível que Leon Battista utilizou a fórmula da área de um retângulo em seus cálculos. À respeito das medidas laterais, é possível encontrá-las por meio da utilização de uma corda ou uma trena, sempre com cautela ao realizar a medição.

3.1.2 Campos com 3 lados e um dos ângulos seja de esquadro

> Caso o campo tenha três lados e um dos ângulos seja também de esquadro, faça assim. Pegue um dos lados que tenha uma extremidade de ângulo reto e conte quantos pés totaliza. Conte em seguida do mesmo modo para o outro lado que termina também em ângulo reto, e, como fizera no caso anterior, multiplique um pelo outro: será o seu campo. Por exemplo, se um dos lados totaliza 10 e o outro 10 também, isso dará 100. A metade será 50 e será o que valerá seu campo de três lados (FIGURA 14) (ALBERTI, 2006, p. 50).

Figura 3.2 – Figura 14 do Livro Matemática Lúdica

FIG. 14

Fonte: Livro Matemática Lúdica

Neste caso, observa-se um triângulo retângulo no qual os lados que constituem o ângulo reto (também denominado ângulo de esquadro) correspondem aos catetos (Figura 3.2, 2ª figura).

A Área A de um triângulo é dada por:

$$A = \frac{bh}{2},$$

no qual b representa a medida da base e h corresponde à altura, que são os catetos do triângulo retângulo.

No exemplo fornecido no texto, os lados que formam o ângulo reto (os catetos) têm ambos uma medida de 10 pés. Portanto, a área será:

$$A = \frac{10 \cdot 10}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ pés quadrados } \Rightarrow A \approx 4,64\ m^2.$$

Observa-se que (Alberti, 2006) utilizou exatamente esse método, pois ele se baseou no fato de que a área de um triângulo é a metade da área de um retângulo.

3.1.3 Campos que não tenham nenhuma das formas anteriores, mas apresentem todos os lados retilíneos

> Caso seu campo não tenha nenhuma dessas duas formas, mas ainda assim apresente todos os lados retilíneos, faça como se segue. Convém dispor de um grande esquadro; comece pelo lado que lhe pareça mais conveniente e, guiando-se pelo esquadro, trace retas com fios, pegue todos os retângulos e multiplique como foi dito anteriormente. E se restarem triângulos, marque ângulos retos com seu esquadro fazendo separações nos lugares que lhe parecem mais adequados, faça a soma, e o método funcionará. Eis alguns exemplos para lhe dar uma ideia da maneira de fazer as separações (FIG. 15) (ALBERTI, 2006, p. 50-51).

Figura 3.3 – Figura 15 do Livro Matemática Lúdica

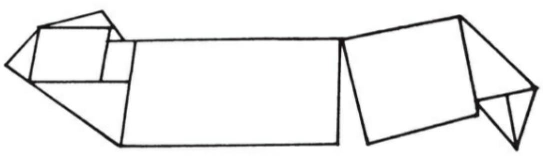


FIG. 15

Fonte: Livro Matemática Lúdica

Nesse contexto, para calcular a área total, procede-se calculando as áreas de retângulos e triângulos retângulos, utilizando os dois casos anteriores.

Para essa finalidade, sugere-se a construção de um grande esquadro feito de cordas, pois proporciona uma boa precisão. Esse esquadro também auxilia no primeiro e no segundo caso, pois ajuda a identificar se o ângulo é ou não de $90°$.

No tópico a seguir, encontra-se a descrição de como construí-lo.

3.1.4 Construção de um esquadro de cordas bem grande

> Cuide para que o esquadro seja bem grande caso queira obter uma boa precisão. Haverá menos erros com um esquadro maior.
> Faça um esquadro perfeito com uma corda da seguinte maneira: parta de uma ponta de sua corda, dê 3 passos e faça um nó. A partir desse nó, dê mais 4 passos, faça nesse ponto um segundo nó e dali continue a medir; quando tiver dado 5 passos, faça um terceiro nó. Terá assim medido no total 12 passos de corda. Amarre o terceiro nó no início da corda e fixe-o no solo com uma estaca. Procure o primeiro nó, estique o fio pelo chão e ali coloque outra estaca. Finalmente, procure o outro nó e finque ali, da mesma forma, outra estaca. Terá assim um triângulo perfeito. Ele será retângulo entre os comprimentos de 3 e 4 passos (FIGURA 16).
> Alguns dão 5 passos, 5 passos e 7 passos, e fazem como nós um triângulo. Enganam-se, e seus retângulos não são corretos, salvando-se 1 em 50. Isso basta para o que se refere a campos limitados por retas (ALBERTI, 2006, p. 51).

Figura 3.4 – Figura 16 do Livro Matemática

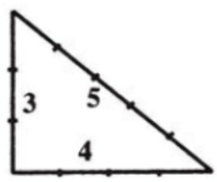


FIG. 16

Fonte: Livro Matemática Lúdica

A precisão de um esquadro de cordas, como o da Figura 3.4 é garantida pelo Teorema de Pitágoras. Ao analisar a construção, constata-se que:

$$5^2 = 3^2 + 4^2.$$

Sendo assim, esquadros maiores podem ser obtidos usando medidas diferentes que formam triângulos semelhantes ao anterior, como por exemplo, os lados 10, 6 e 8.

3.1.5 Campos circulares

> Caso o campo seja circular, é preciso tomar sua largura e multiplicá-la por 3 e 1/7. Por exemplo, se tem 14 passos de largura, multiplicado por 3 e 1/7 isso dá 44 passos, e esse total é igual a toda a sua circunferência. Pegue agora a metade de sua largura, ou seja, 7, e a metade do círculo, ou seja, 22, e multiplique 7 por 22: total 154. Isso, quer dizer, 154, será igual ao campo inteiro. Eis a FIGURA 17 (ALBERTI, 2006, p. 52).

Figura 3.5 – Figura 17 do Livro Matemática Lúdica

FIG. 17

Fonte: Livro Matemática Lúdica

Seja (A_C) a área do círculo. Então, a área desse campo circular é calculada por:

$$A_C = \pi r^2,$$

em que, r representa o raio do círculo.

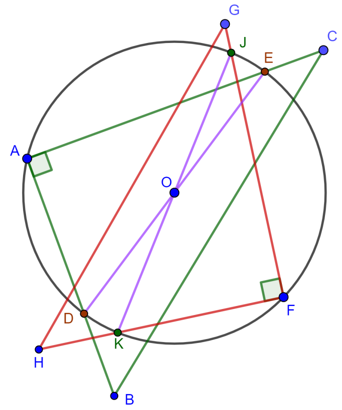
Entretanto, é necessário localizar o centro do círculo para determinar o seu raio. Não se explica explicitamente como encontrar esse centro, mas ensina-se como construir um grande esquadro de cordas. Dessa forma, pode-se utilizar esse esquadro para determinar o centro do círculo e, consequentemente, o raio.

A seguir, descreve-se como proceder:

- marca-se um ponto F na circunferência para manter o vértice de $90°$ do esquadro fixo;
- na interseção dos catetos do esquadro com a circunferência, marcam-se os pontos D e E;
- traça-se um segmento DE;
- marca-se um ponto A na circunferência, diferente do ponto F, para manter fixo o vértice de $90°$ do esquadro;
- na interseção dos catetos do esquadro com a circunferência, marcam-se os pontos J e K;
- traça-se um segmento $\overline{JK}$;
- marca-se o ponto O (centro da circunferência) na interseção de $\overline{DE}$ com $\overline{JK}$.

Esse procedimento está ilustrado na Figura 3.6:

Figura 3.6 – Construção Geométrica do Centro de um Círculo



Fonte: O Autor

O ponto O representa o centro da circunferência, permitindo assim a obtenção da medida do raio r e, consequentemente, a área do campo circular.

Esse método é altamente preciso, pois a medida de um ângulo inscrito ($\angle EAD$ e $\angle JFK$) é a metade do ângulo central correspondente. Em outras palavras, se o ângulo inscrito é de $90°$, o ângulo central será de $180°$. Como resultado, as cordas $\overline{DE}$ e $\overline{JK}$ serão diâmetros e o ponto O (a interseção dos dois diâmetros) será o centro desse campo.

Vale ressaltar que ao encontrar o primeiro diâmetro DE, pode-se determinar o centro O do círculo, uma vez que o centro de um círculo é o ponto médio do diâmetro.

Ao analisar o exemplo fornecido por Leon Battista, observa-se que a largura d (ou diâmetro) do campo circular mede 14 passos. A seguir, são apresentadas as etapas sugeridas por ele para calcular a área desse campo circular:

- para encontrar o comprimento C da circunferência, deve-se somar o produto de d por 3 com $\frac{1}{7}$. Isso resulta em $C = 3d + \frac{1}{7}d = \frac{22}{7}d = \frac{22}{7} \cdot 14 = 44$ passos. Com isso, pode-se inferir que Alberti está utilizando a aproximação $\frac{22}{7}$ de Arquimedes para o valor de π;

- para obter o raio r, deve-se dividir a largura d por 2. Portanto, tem-se $r = \frac{d}{2} = \frac{14}{2} = 7$ passos;

- em seguida, deve-se dividir o comprimento C por 2, o que resulta em $\frac{44}{2} = 22$;

- a área A desse campo circular é obtida multiplicando esses dois últimos valores, ou seja, $A = 7 \cdot 22 = 154$ passos quadrados. Como 1 passo equivale a $0,82$ metros, então $A \approx 103,4\ m^2$.

O autor provavelmente empregou o método de Arquimedes para estimar a área de um círculo. Nesse método, a área do círculo é relacionada à área de um triângulo retângulo, no qual o raio é o cateto menor e o comprimento da circunferência é o cateto maior. Isso leva à área $A = \frac{44 \cdot 7}{2}$, que é obtida multiplicando a base pela altura e dividindo por 2. Ele realizou exatamente essa operação, dividindo 44 por 2 e depois multiplicando por 7. Esse cálculo é preciso, especialmente ao utilizar π com 31 casas decimais: $A = \pi r^2 = 49\pi \approx 153,9380$ passos quadrados, um valor próximo de 154.

Ao utilizar $\pi \approx 3,14$, um valor comumente usado em problemas reais, obtém-se $A = 49.3,14 \approx 153,86$ passos quadrados, uma boa aproximação de 154. Conclui-se que o método de Alberti é eficiente e pode ser ajustado para atender a necessidades específicas. Caso seja necessário obter uma precisão maior, é possível utilizar um valor mais detalhado de π com um maior número de casas decimais.

3.1.6 Campo que não seja redondo, mas limitado por vários arcos de círculo

É proposto por Leon Battista que, em campos com arcos de círculo, se proceda como nos casos anteriores, traçando retângulos e triângulos retângulos. Segue-se o propósito em questão ao obter uma boa área aproximada total do campo. Abaixo está a proposta do texto:

> Caso o campo não seja redondo, mas limitado por vários arcos de círculo, trace todos os retângulos e todos os triângulos ali contidos; proceda como disse anteriormente. Restarão as partes semelhantes à metade de uma lua (no mínimo). Se uma parte compuser um semicírculo perfeito, saberá quanto iria perfazer o círculo completo mediante o recurso fornecido acima, e levará em conta sua metade. Para o caso de menos de uma metade de círculo, em forma de arco, os antigos criaram uma tabela com a qual se medem a corda e a flecha do meio da corda ao topo do arco, obtendo com essa tabela uma precisão bastante boa. Mas isso são coisas muito complexas, que não dizem respeito aos entretenimentos que proponho. Para seus propósitos, basta pegar todos os retângulos e todos os triângulos e transformá-los em triângulos retângulos como vimos anteriormente (FIGURA 18) (ALBERTI, 2006, p. 52-53).

Figura 3.7 – Figura 18 do Livro Matemática

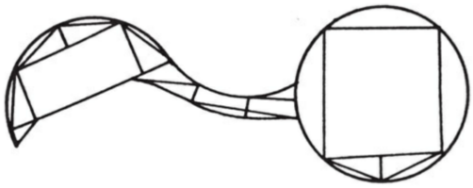


FIG. 18

Fonte: Livro Matemática Lúdica

De acordo com (Alberti, 2006) , os antigos utilizavam uma tabela para calcular de forma mais precisa a área total de campos delimitados por arcos de círculo e cordas que eram menores que a metade de um círculo. Nessa tabela, eram registradas as medidas da corda (segmento que liga dois pontos pertencentes à circunferência) e da flecha (segmento perpendicular à corda, que conecta o ponto médio desta à extremidade superior do arco). A tabela mencionada por ele poderia ser a "Tábua de Cordas" de Ptolomeu, a qual é equivalente a uma tabela de senos utilizada atualmente. No entanto, poderiam existir outras tabelas disponíveis naquela época, levando em consideração que a tabela de Ptolomeu é a mais abrangente e precisa.

Em seguida, Leon Battista propõe um método mais aprofundado para calcular a área desses campos, tais campos também são chamados de segmentos circulares. Ele também menciona uma abordagem apresentada por Columela, um escritor do Século I.

Adiante, o exposto do texto conforme mencionado:

> Se no entanto quiser ter algumas indicações para compreender o cálculo dos antigos, é preciso dividir a corda em duas partes que serão multiplicadas uma pela outra: por exemplo: se a corda mede 4 pés, dirá 2 vezes 2 fazem 4, depois pegará a flecha e a multiplicará pelo resto do diâmetro. Se a flecha mede 1, o resto do diâmetro é o número que, multiplicado por 1, vale 4. Teremos então 4, e o senhor dirá: 1 vezes 4 dá 4, e esses dois números juntos, isto é, 1 e 4, me fornecem todo o diâmetro, que dá 5. Dividirá 5 em dois, restam 2 e 1/2. Divida toda a flecha, ou seja, 1, resta 1 e 1/2. Multiplique esse resto pela metade da corda, e terá toda a superfície dessa parte, que dá 3. Isso no caso de o arco ser menor que a semicircunferência; se for maior, encontrará a diferença da seguinte maneira.
> Columela apresenta precisamente certas formas de dividir [a área do círculo] que bastarão para esse propósito. Se a corda do arco mede 16 pés, e a flecha 4 pés, somando-se esses números teremos 20. Pegue 4 vezes essa soma, o que fará 80. A metade disso é 40, e a metade da corda vale 8; somando se a metade da corda obteremos então 48. Divida a soma em 14 partes; isso dará aproximadamente 44. É o que vale esse arco. Procederá da mesma forma para os outros arcos. Estas são altas considerações, bastante admiráveis e extraídas de uma grande teoria. Mas como meu propósito aqui é apenas apresentar coisas agradáveis, não insistirei em tais sutilezas (ALBERTI, 2006, p. 53-54).

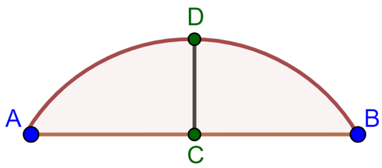
Os cálculos utilizados por (Alberti, 2006) e Columela eram empregados para obter valores aproximados da área de segmentos circulares.

Estudar-se-á como proceder para realizar esses cálculos utilizando os conhecimentos matemáticos vistos na Seção 1. Primeiramente, compreender-se-á como coletar as medidas desses campos limitados por arcos circulares. Em seguida, analisar-se-ão os dois exemplos mencionados no texto.

A partir desse momento, calcular-se-á a área de um campo em formato de um segmento circular, contudo, as medidas devem ser coletadas manualmente.

Convém considerar um campo no formato de um segmento circular, conforme mostrado na Figura 3.8 a seguir:

Figura 3.8 – Segmento Circular



Fonte: O Autor

Com base na Figura 3.8, tem-se as seguintes informações:

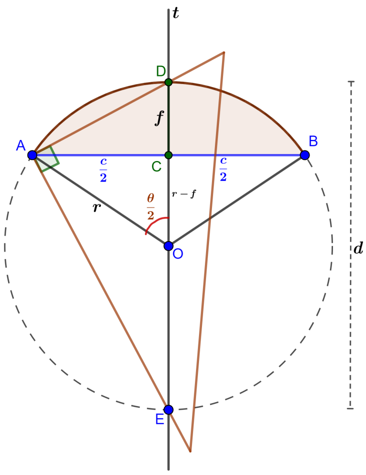
- AB é o arco;
- $\overline{AB}$ é a corda;
- C é Ponto Médio de $\overline{AB}$;
- $\overline{CD}$ é a flecha. Pode-se utilizar o esquadro de cordas de Leon Battista para traçar esse segmento.

Dessa forma, são ilustrados na Figura 3.9 alguns passos para determinar o centro do círculo e, em seguida, obter as medidas necessárias para o cálculo da área do setor circular (setor delimitado pelo arco AB e pelos raios que constituem essa região):

- por meio dos pontos C e D, traça-se uma reta t;
- utiliza-se um Compasso de Cordas de tamanho adequado para fixar o vértice que forma um ângulo de $90°$ no ponto A ou no ponto B, assegurando que um dos catetos cruze o ponto D;

- marca-se o ponto E na interseção do outro cateto com a reta t;
- marca-se o ponto O como o Ponto Médio de $\overline{DE}$.

Figura 3.9 – Segmento Circular contido em um Círculo



Fonte: O Autor

Ao observar a construção da Figura 3.9, nota-se que $\overline{DE}$ representa o diâmetro da circunferência, uma vez que o ângulo $\angle DAE = 90°$ é um ângulo inscrito. Logo, a circunferência que contém o segmento circular (Figura 3.8) tem o ponto O como centro.

Também se pode encontrar o centro O desse círculo, utilizando relações métricas no triângulo retângulo. Com base na Figura 3.9, desconsiderado o compasso de cordas, tem-se os seguintes dados:

- considera-se E como o ponto de interseção da reta t com o círculo;
- observa-se que t é mediatriz de $\overline{AB}$, o que implica que $\overline{DE}$ é diâmetro e, consequentemente, $\angle ACD = 90°$;
- determina-se que $\overline{AB} = c$, resultando em $\overline{AC} = \frac{c}{2} = \overline{BC}$;
- determina-se $\overline{CD} = f$ e $\overline{DE} = d$, o que implica que $\overline{CE} = d - f$.

Dessa maneira, considerando as relações métricas no triângulo retângulo $\triangle DAE$, tem-se:

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = f(d - f). \tag{3.1}$$

Uma vez que a corda $\overline{AB}$ e a flecha $\overline{CD}$ são conhecidas, pode-se determinar o valor de d, onde $r = \frac{d}{2}$.

Ao observar a Figura 3.9, o próximo passo consiste em calcular a área do setor circular AOB. Abaixo, são apresentadas algumas informações relevantes:

- considerando $\angle AOB = \theta$, tem-se que $\angle AOD = \frac{\theta}{2}$, uma vez que C é o ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{OA} = \overline{OB} = r$;

- do triângulo retângulo $\triangle ACO$, pode-se concluir que:

$$sen\,\frac{\theta}{2} = \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{r}. \tag{3.2}$$

Pode-se usar a Tabela dos Senos para encontrar o ângulo $\frac{\theta}{2}$ do triângulo $\triangle ACO$, considerando que $\theta = 2 \cdot \frac{\theta}{2}$.

Com base nisso, é possível determinar a área do setor circular AOB (denotada por A_{setor}) usando duas proporções: uma através do ângulo θ e outra por meio do comprimento do arco AB (denotado por c'). Isso ocorre porque a área de um setor circular é proporcional tanto ao seu ângulo quanto ao seu arco. Essa proporcionalidade é facilmente observada, pois o aumento do ângulo ou do arco acarretará no aumento correspondente da área do setor; da mesma forma, a redução do ângulo ou do arco levará a uma diminuição proporcional da área do setor.

A seguir, são apresentadas as duas formas de calcular a área do setor circular AOB:

(i) Pelo Ângulo Central:

$$\frac{A_{setor}}{\pi r^2} = \frac{\theta}{360^\circ}. \tag{3.3}$$

(ii) Pelo Comprimento do Arco:

$$\frac{A_{setor}}{\pi r^2} = \frac{c'}{2\pi r}. \tag{3.4}$$

Assim, pode-se calcular a área do Setor Circular AOB.

Ao utilizar o comprimento do arco, não é necessário recorrer à Tabela dos Senos, o que pode ser mais simples dependendo da situação. No entanto, ao medir o tamanho de um arco com uma corda, não se obtém um resultado tão preciso. Nesse caso, é mais viável encontrar o ângulo θ e utilizar a tabela trigonométrica.

Para calcular a área do segmento circular AOB (denotada por $A_{segmento}$), basta subtrair a área do triângulo $\triangle ABO$ (denotada por $A_{\triangle ABO}$) da área do setor circular. Ou seja,

$$A_{segmento} = A_{setor} - A_{\triangle ABO}. \tag{3.5}$$

A área do triângulo $\triangle ABO$ pode ser calculada de duas maneiras:

(i) Como já foi determinado o ângulo θ usando a Tabela dos Senos e sabe-se que θ é formado pelos raios que são os lados do triângulo $\triangle ABO$, a área desse triângulo calcula-se da seguinte forma:

$$A_{\triangle ABO} = \frac{rr sen\,\theta}{2} \Rightarrow A_{\triangle ABO} = \frac{r^2 sen\,\theta}{2}, \tag{3.6}$$

em que $sen\,\theta$ pode ser encontrado na Tabela dos Senos ou utilizando uma calculador científica.

(ii) Pode-se observar que o triângulo $\triangle ABO$ é isósceles, em que $\overline{CO}$ representa a altura em relação à base c, sendo $\overline{CO} = r - f$.

Dessa forma, a área do triângulo $\triangle ABO$ é:

$$A_{\triangle ABO} = \frac{c(r-f)}{2} \Rightarrow A_{\triangle ABO} = \frac{c}{2}(r-f). \tag{3.7}$$

Ao substituir as equações 3.6 (ou 3.7) e 3.3 (ou 3.4) na equação 3.5, obtém-se a área desse campo no formato de um Segmento Circular.

Com base nas notações da Figura 3.9, serão analisados os exemplos apresentados por Leon Battista no texto.

No primeiro exemplo, são fornecidos os seguintes valores: $c = 4$ pés e $f = 1$ pé. Ao substituir esses valores na equação 3.1, é obtido:

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 1(d-1) \Rightarrow 4 = d - 1 \Rightarrow d = 5.$$

O valor obtido por Leon Battista usando seu método é exatamente o mesmo. Como $d = 5$, então $r = \frac{5}{2}$. Substituindo esse valor na equação 3.7, tem-se:

$$A_{\triangle ABO} = \frac{4}{2}\left(\frac{5}{2} - 1\right) \Rightarrow A_{\triangle ABO} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3. \tag{3.8}$$

Isso demonstra que o valor 3 mencionado por Alberti no texto não corresponde ao setor circular AOB, mas sim ao triângulo $\triangle ABO$. Logo, ele não resolveu completamente o problema e poderia ter usado a Tábua de Cordas naquela época para calcular a área desse campo no formato de segmento circular.

No presente caso, será utilizada a Tabela dos Senos para encontrar a área do setor circular AOB.

Primeiro, será determinado o ângulo θ utilizando a equação 3.2:

$$sen\,\frac{\theta}{2} = \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Usando a Tabela dos Senos, encontra-se que $\frac{\theta}{2} \approx 53,167°$, o que implica em $\theta \approx 106,334°$.

Substituindo $\theta \approx 106,334°$, $\pi \approx 3,1416$ e $r = \frac{5}{2}$ na equação 3.3, obtém-se:

$$\frac{A_{setor}}{\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{106,334°}{360°} \Rightarrow A_{setor} \approx 5,8. \tag{3.9}$$

Substituindo as equações 3.9 e 3.8 na equação 3.5, tem-se:

$$A_{segmento} = 5,8 - 3 \approx 2,8 \text{ pés quadrados} \approx 0,26\ m^2.$$

Considerando o exemplo mencionado por Leon Battista, baseado no relato de Columela, em que se tem $c = 16$ pés e $f = 4$ pés, podem-se substituir esses valores na equação 3.1 para obter:

$$\left(\frac{16}{2}\right)^2 = 4(d-4) \Rightarrow 64 = 4d - 16 \Rightarrow d = 20.$$

Assim, tem-se $r = \frac{20}{2} = 10$.

Para encontrar o ângulo θ, utiliza-se a equação 3.2:

$$sen\,\frac{\theta}{2} = \frac{16}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{5}.$$

Ao procurar o valor $\frac{4}{5}$ na Tabela dos Senos, é encontrado que:

$$\frac{\theta}{2} \approx 53,167^{\circ} \Rightarrow \theta \approx 106,334^{\circ}.$$

Ao substituir os valores $\theta \approx 106,334^{\circ}$, $\pi \approx 3,1416$ e $r = 10$ na equação 3.3, obtém-se:

$$\frac{A_{setor}}{\pi 10^2} = \frac{106,334^{\circ}}{360^{\circ}} \Rightarrow A_{setor} \approx 92,795. \tag{3.10}$$

Para calcular a área do triângulo ABO, são substituídos os valores $c = 16$, $r = 10$ e $f = 4$ na equação 3.7, obtendo:

$$A_{\triangle ABO} = \frac{16}{2}(10 - 4) \Rightarrow A_{\triangle ABO} = 48. \tag{3.11}$$

Em seguida, são substituídas as equações 3.11 e 3.10 na equação 3.5, resultando em:

$$A_{\text{segmento}} = 92,795 - 48 \approx 44,795 \texttt{ pés quadrados} \approx 4,16\ m^2.$$

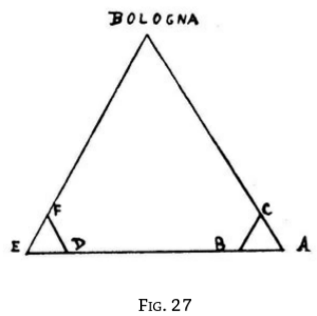
Analisa-se que a precisão do método utilizado por Columela é evidente, uma vez que o valor obtido é próximo ao valor mencionado no texto, que é 44 pés quadrados.

3.2 PROBLEMA 2: MEDIR GRANDES DISTÂNCIAS - MEDIRA A DISTÂNCIA DE UM LUGAR LONGÍNQUO QUE PODEMOS PERCEBER

No problema em questão, descreve-se uma técnica pela qual o observador consegue medir visualmente uma grande distância em linha reta. Ao falar de distância, isso remete ao desafio de medir a largura de um rio. Embora o método mencionado possa ser aplicado nesse caso, propõe-se uma solução alternativa para o problema.

> Meça qualquer grande distância da seguinte forma. Digamos que queira medir a distância, em linha reta, de seu mosteiro a Bolonha. Dirija- se para qualquer grande prado de onde possa avistar Bolonha e finque na terra duas flechas, bem verticalmente como já disse, mas distantes 1.000 pés, ou mais, se quiser, contanto que sejam visíveis uma da outra e que Bolonha seja vista tanto a partir de uma quanto da outra, de modo que todas as três, isto é, Bolonha e as duas flechas, formem um triângulo bem disposto. Feito isso, comece por uma das flechas, digamos a mais próxima de Ferrara: posicione-se em frente a essa flecha, dando as costas para a cidade, e vise a segunda flecha pela primeira, bem próximo. Sobre a reta que sua visada seguir sobre o solo, coloque, a uma distância de 20 pés de sua flecha, um marco, digamos, uma cereja, se lhe agradar. Depois volte-se na direção de Bolonha, vise na direção dessa mesma flecha e coloque então uma rosa, ou o que quiser, a uma distância de 30 pés sobre a linha que sua visada seguir no solo. Terá então marcado sobre o solo um triângulo do qual um dos ângulos dirigido para Ferrara será a flecha, um outro, para o mar, uma cereja, e o último, para Bolonha, uma rosa. Chamemos *A* essa flecha, *B* a cereja e *C* a rosa. Meça quanto há de *B* a *A*, de *A* a *C* e de *C* a *B*, e anote bem essas medidas. Em seguida, dirija-se à segunda flecha, volte-se para Ferrara e afaste-se 25 pés, e por essa flecha vise na direção da primeira e sobre a linha de visada coloque uma cereja a uma distância dessa segunda flecha igual à distância de *B* a *A*. Volte-se para Bolonha e coloque no chão uma rosa a mesma distância da cereja que *C* está distante de *B*, e a mesma distância da flecha que *C* está distante de *A* no primeiro triângulo, e estique um fio dessa flecha até a rosa. Feito isso, volte para lá onde havia colocado a cereja, vise Bolonha na direção dessa cereja, marque bem onde a visada corta, no chão, o fio colocado e esticado entre a flecha e a rosa, e coloque ali uma vareta. Terá marcado aí um outro triângulo, cuja flecha será o primeiro vértice (que chamaremos de *D*), a cereja o segundo (*E*) e a vareta o terceiro (*F*). E para me fazer melhor entender, eis um desenho que mostra tudo isso (FIGURA 27) (ALBERTI, 2006, p. 66-67).

Figura 3.10 – Figura 27 do Livro Matemática Lúdica



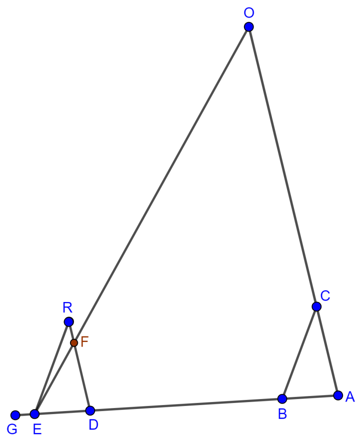
Fonte: Livro Matemática Lúdica

> Digo que convém considerar que o senhor tem aqui três triângulos, um dos quais é *ABC*, o segundo *DEF*, o terceiro aquele cujos vértices são Bolonha, a flecha *A* e a cereja *E*. Meça quantas vezes a reta *EF* contém a reta *ED* em seu pequeno triângulo: toda a reta desde *E* até Bolonha conterá o mesmo número de vezes *EA* em seu grande triângulo. Para melhor expressar-me, eis o exemplo de tudo isso com números. Seja *DE* igual a 10 pés e *EF* igual a 40 pés. Digo que como 10 cabe 4 vezes em 40, do mesmo modo a reta ou o espaço *EA* caberá 4 vezes na reta ou na distância entre *E* e Bolonha; e se *ED* cabe 30 vezes *EF*, de onde o senhor está até Bolonha haverá 30 vezes o que há de *A* até *E* (ALBERTI, 2006, p. 68).

No texto, Leon Battista fornece um exemplo de como calcular a distância entre um local específico, seu mosteiro, e Bolonha, uma cidade italiana. Durante o processo, ele menciona a cidade de Ferrara, localizada ao nordeste de Bolonha, o que permite a criação de pontos de referência para entender cada etapa do procedimento.

A seguir está a representação dos passos na Figura 3.11.

Figura 3.11 – Representação Geométrica do Procedimento 3.2



Fonte: O Autor

A Figura 3.11 apresenta as seguintes informações:

- o ponto O representa Bolonha;
- o ponto A representa a primeira flecha;
- o ponto B representa a primeira cereja posicionada;
- o ponto C representa a primeira rosa posicionada;
- o ponto D representa a segunda flecha;
- o ponto G representa a posição do observador ao visualizar a segunda flecha a partir da primeira flecha;

- o ponto E representa a última cereja colocada entre o observador e a segunda flecha;
- o ponto R representa a segunda rosa;
- e o ponto F representa a vareta.

Nota-se que neste método é construído o triângulo DER, o qual é congruente ao triângulo ABC. Isso ocorre devido às medidas dos segmentos: $\overline{DE} = \overline{AB} = 20$ pés, $\overline{DR} = \overline{AC} = 30$ pés e $\overline{ER} = \overline{BC}$. A seguir, será explicado passo a passo como realizar essa construção, incluindo a posição do ponto R.

Com base na Figura 3.11, são fornecidos os seguintes dados relevantes para a resolução do problema.

- $\overline{AB} = \overline{DE}$ e pertencem ao segmento AG;
- o ponto F é a interseção de $\overline{DR}$ com $\overline{EO}$;
- e como $\overline{DR} \| \overline{AO}$, então $\overline{DF} \| \overline{AO}$;

Com base nisso, deduz-se que $\angle OAE = \angle FDE$ e $\angle AOE = \angle DFE$. Portanto, pelo caso AA de Semelhança de Triângulos, é estabelecido que $\triangle AOE \sim \triangle DFE$. Assim, é possível estabelecer a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{EF}} \Rightarrow \overline{OE} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{EF}}{\overline{DE}}, \tag{3.12}$$

em que $\overline{AE}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ são medidas conhecidas. No contexto do problema, temos que $\overline{DE} = \overline{AB} = 20$ pés, $\overline{AE} = 1000$ e $\overline{EF}$ pode ser medida. Portanto, determina-se $\overline{OE}$, que representa a distância do observador até a cidade de Bolonha.

Vale ressaltar a importância de encontrar um terreno plano entre o observador e o local desejado para o cálculo da distância, pois isso proporcionará maior precisão.

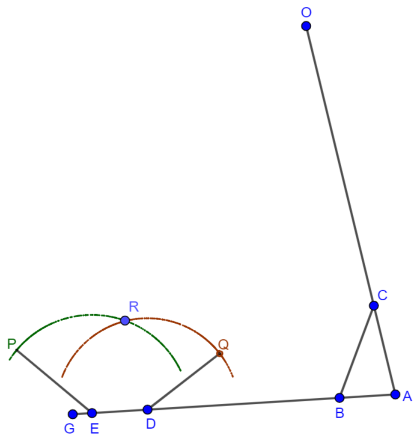
A seguir, será explicado como encontrar o ponto R para posicionar a segunda rosa. Isso pode ser feito observando que $\overline{RD} = \overline{CA}$ e $\overline{RE} = \overline{CB}$, o que torna o triângulo DER congruente ao triângulo ABC.

Para realizar essa atividade, é necessário utilizar um compasso. No entanto, em áreas extensas, é possível substituir o compasso por uma corda e seguir os passos a seguir:

- são dados dois nós em uma corda, mantendo uma distância $\overline{AB}$ entre eles.
- um nó é fixado no ponto D, e com a corda esticada, traça-se um arco no solo usando o outro nó. Esse arco deve estar voltado em direção a Bolonha.
- são dados dois nós em uma segunda corda, mantendo uma distância $\overline{BC}$ entre eles.
- um dos nós da segunda corda é fixado no ponto E, e com a corda esticada, traça-se um arco no solo usando o outro nó. Esse arco deve estar voltado em direção a Bolonha.
- e o ponto R é marcado na interseção dos dois arcos traçados.

A representação desse procedimento pode ser observada na Figura 3.12:

Figura 3.12 – Construção geométrica de um triângulo congruente a um triângulo dado.



Fonte: O Autor

Considerando as informações mencionadas anteriormente e a Figura 3.12, são obtidos os seguintes elementos:

- Os pontos P e Q representam os nós utilizados para traçar os arcos;
- $\overline{DQ} = \overline{AC}$;
- $\overline{EP} = \overline{BC}$.

Como o ponto R pertence tanto ao arco de raio $\overline{DQ}$ quanto ao arco de raio $\overline{EP}$, conclui-se que $\overline{DR} = \overline{DQ} = \overline{AC}$ e $\overline{ER} = \overline{EP} = \overline{BC}$. Dessa forma, pode-se concluir que os triângulos DER e ABC são congruentes.

Ao analisar o exemplo apresentado por Leon Battista, tem-se os seguintes dados disponíveis.

- $\overline{DE} = 10$ pés;
- $\overline{EF} = 40$ pés;
- $\overline{AE} = 1000$ pés, conforme sugerido por (Alberti, 2006) no início do texto.

Ao substituir os valores na equação 3.12, obtém-se:

$$\overline{OE} = \frac{1000 \cdot 40}{10} = 4000 \text{ pés} = 1219,2.$$

Assim sendo, findamos que $\overline{OE} = 4000$ pés, o que corresponde a $\overline{OE} = 1219,2$ metros.

Desse modo, chega-se à conclusão de um método eficiente, desde que se siga cuidadosamente cada etapa para evitar erros que possam afetar o resultado final.

O uso desses problemas históricos de (Alberti, 2006) , estudados na Seção 2 e Seção 3, na Educação Básica beneficia os estudantes tanto no aprendizado quanto na motivação para cada conteúdo abordado. Ao se resgatarem esses problemas e aplicá-los como ferramentas de ensino, é possível proporcionar um aprendizado mais significativo e envolvente para os alunos. Além disso, ao enfrentarem desafios históricos, os estudantes são estimulados a explorar e compreender melhor os conteúdos específicos que estão sendo estudados, o que contribui para um melhor aproveitamento da matéria.

De acordo com (Mendes e Farias, 2014) :

> [. . .] faz se necessário que o professor lance continuamente em sala de aula uma prática desafiadora, na qual seus estudantes se aventurem na busca de sustentação ou revalidação de verdades estabelecidas ao longo da pesquisa histórica, tendo em vista o aumento de seu domínio educativo em matemática [. . .] defendo a tese de que uma abordagem didática investigatória nas aulas de matemática, apoiada nas informações históricas, pode contribuir na concretização de um ensino e aprendizagem da matemática com significado [. . .] (MENDES; FARIAS, 2015, p. 121).

4 UMA APLICAÇÃO

Com o intuito de aplicar-se os conhecimentos apresentados ao longo do trabalho, utilizou-se o Problema 3 da Seção 2 como exercício prático.

Sendo assim, desenvolveu-se uma aplicação em conjunto com uma turma do 2º ano do Ensino Médio da Escola de Referência em Ensino Médio José Caldas Cavalcanti, localizada em Cabrobó – PE.

(Lima, 2007) discute a importância de estabelecer conexões entre conceitos matemáticos e situações práticas, bem como com problemas do mundo real, conforme indicado:

> A Matemática é indispensável por tudo isso e, mais particularmente, porque serve ao homem. Porque tem aplicações. Porque permite responder, de modo claro, preciso e indiscutível, perguntas que, sem o auxílio dela, continuariam sendo perguntas ou se transformariam em palpites, opiniões ou conjecturas.
> As aplicações são a parte ancilar da Matemática. São a conexão entre a abstração e a realidade. Para um grande número de alunos, são o lado mais atraente das aulas, o despertador que os acorda, o estímulo que os incita a pensar (LIMA, 2007, p. 184).

O conteúdo de Semelhança de Triângulos que se utilizou como aplicação nesse problema, apresenta-se no Ensino Fundamental, mas tal aplicação pode desenvolver-se no Ensino Médio como parte do desenvolvimento de algum projeto escolar.

A turma possui 45 alunos e dividiu-se em cinco grupos de aproximadamente nove alunos cada. Em seguida, apresentou-se uma abordagem do conteúdo relacionado ao problema, conforme descrito na Seção 1 deste material didático.

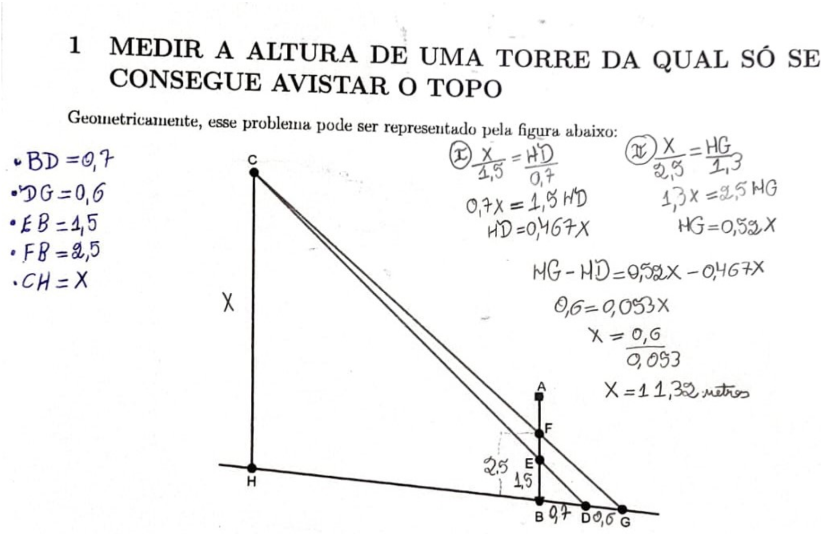
O conteúdo discutido tratou dos Casos de Semelhança de Triângulos. Após a explicação desse conteúdo, foi apresentado aos alunos o Problema 3 da Seção 2, que consistiu em calcular a altura de uma torre ou objeto com dimensões semelhantes, quando apenas o topo é visível.

A fim de facilitar a compreensão do processo de solução do problema proposto, os alunos participaram ativamente ao desenhar na lousa a Figura 2.8, que ilustrou geometricamente a situação em questão.

Com base na representação geométrica do problema, os alunos participaram ativamente discutindo de forma detalhada quais as medidas necessárias para solucionar o problema proposto. Eles foram orientados a identificar quais pontos deveriam obter por conta própria e a forma correta de coletá-las. Essa discussão foi instruída pelo texto do livro de (Alberti, 2006) e pelas orientações do material didático construído, garantindo assim uma precisão do resultado final.

Foram propostos valores fictícios para as medidas necessárias e, em conjunto com os alunos, efetuou-se um exercício prático utilizando um dos casos de Semelhança de Triângulos para determinar a altura da torre. Na Figura 4.1, é apresentado um dos cálculos efetuados pelas equipes:

Figura 4.1 – Cálculo realizado com dados fictícios



Fonte: Acervo Pessoal

No segundo momento da atividade, dirigiu-se para uma área aberta da escola onde era possível visualizar três torres telefônicas. Com o auxílio das equipes, efetuaram-se as medições necessárias para calcular a altura da Torre 1. Logo mais, cada equipe optou entre a Torre 2 ou a Torre 3 e coletaram as medidas de forma separada.

As figuras 4.2, 4.3 e 4.4 apresentam algumas imagens registradas durante a coleta de dados:

Figura 4.2 – Visualização das três torres telefônicas

Fonte: Acervo Pessoal

Figura 4.3 – Equipes realizando coleta de medidas

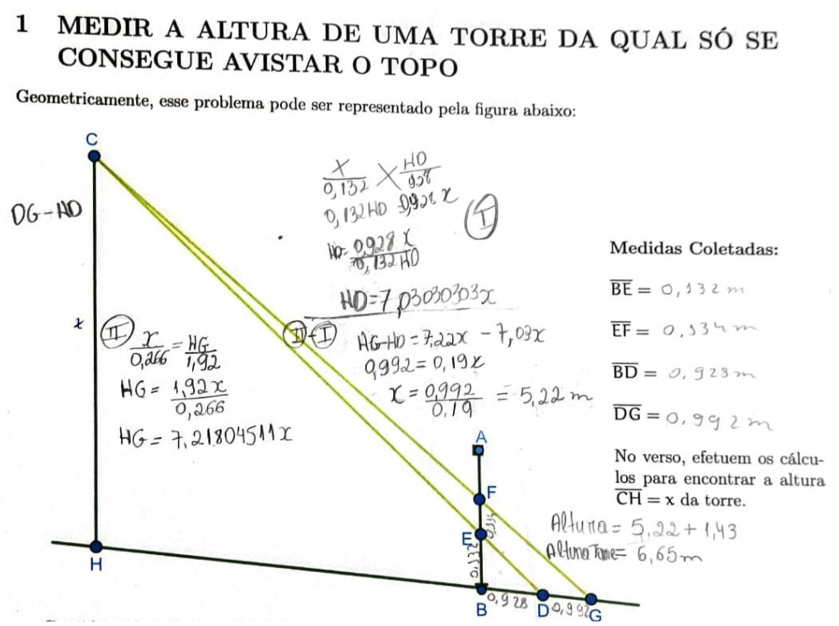
Fonte: Acervo Pessoal

Figura 4.4 – Equipes realizando coleta de medidas

Fonte: Acervo Pessoal

No terceiro momento, retornou-se à sala de aula com todas as medidas coletadas das torres. Com a ajuda das equipes, na lousa, utilizaram-se os dados da primeira torre para calcular sua altura. Posteriormente, cada equipe trabalhou separadamente para calcular a altura da segunda e terceira torre, discutindo entre si. Na Figura 4.5, é apresentado um dos cálculos executados pelas equipes utilizando dados reais:

Figura 4.5 – Cálculo realizado com dados reais



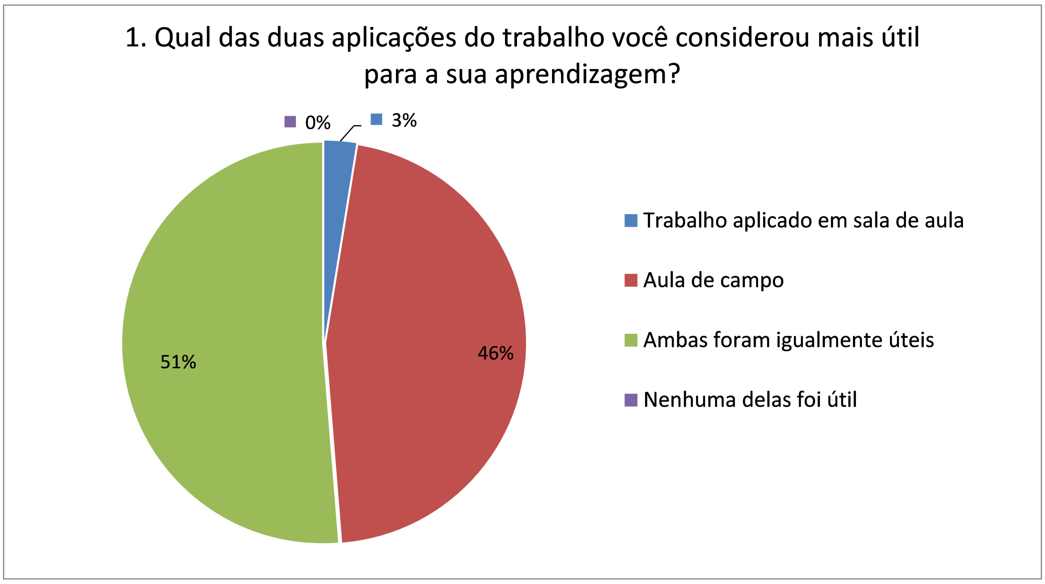
Fonte: Acervo Pessoal

4.1 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após os cálculos realizados pelas equipes para determinarem as alturas das torres, procedeu-se com a aplicação de um questionário a cada aluno presente. O objetivo desse questionário foi coletar suas opiniões sobre o problema estudado, considerando a realização dos cálculos com dados fictícios em sala de aula e os dados coletados durante a atividade prática em campo.

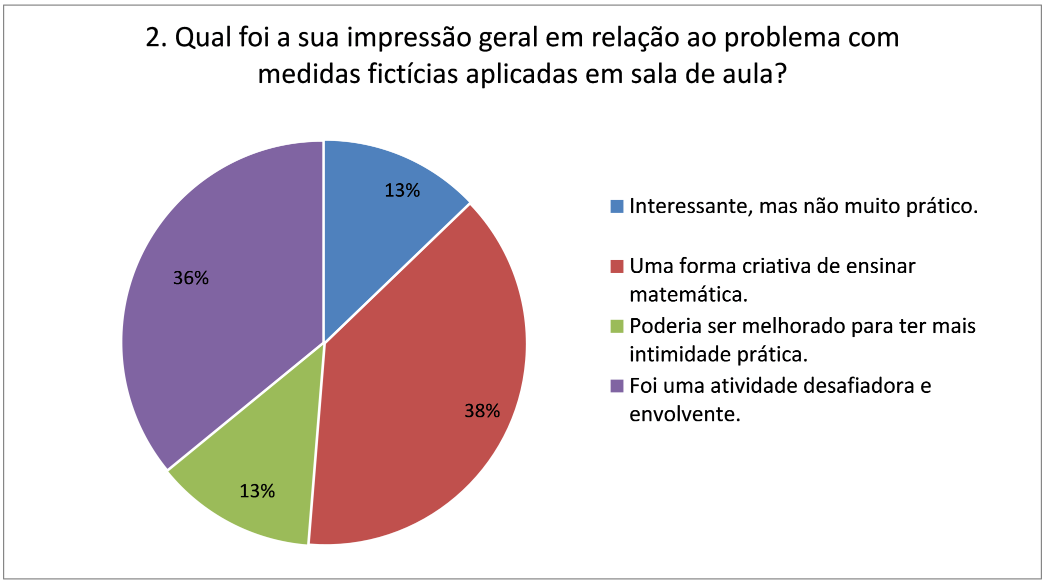
O questionário constou de 10 perguntas e foi respondido por 39 alunos presentes nesse dia. A seguir, são apresentadas as análises gráficas de cada pergunta.

Figura 4.6 – Gráfico 1: Resultados da Pergunta 1



Fonte: O Autor

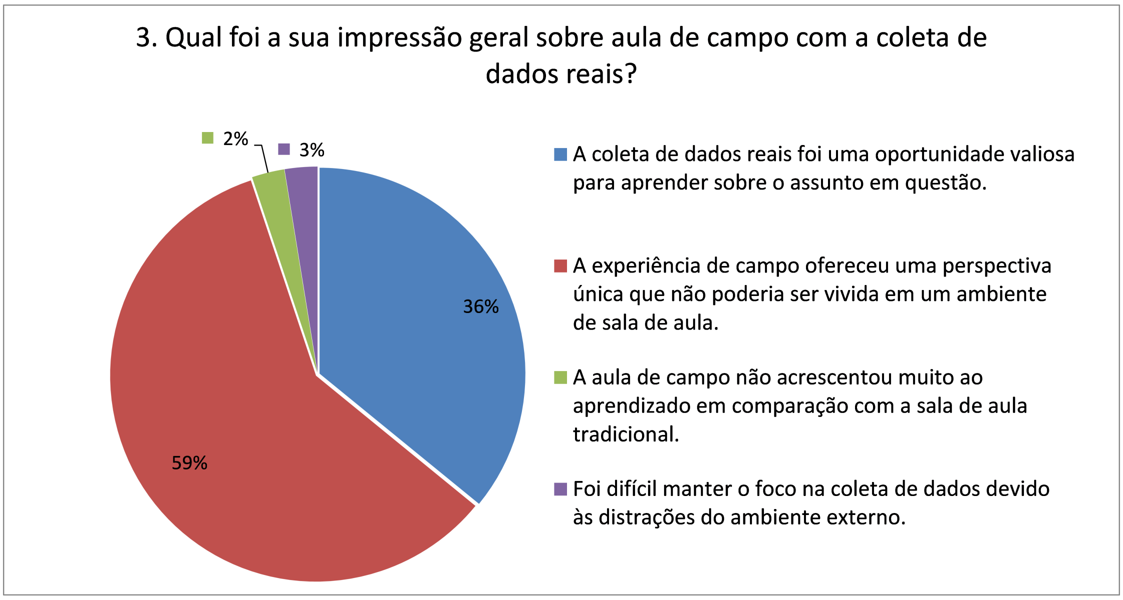
Figura 4.7 – Gráfico 2: Resultados da Pergunta 2



Fonte: O Autor

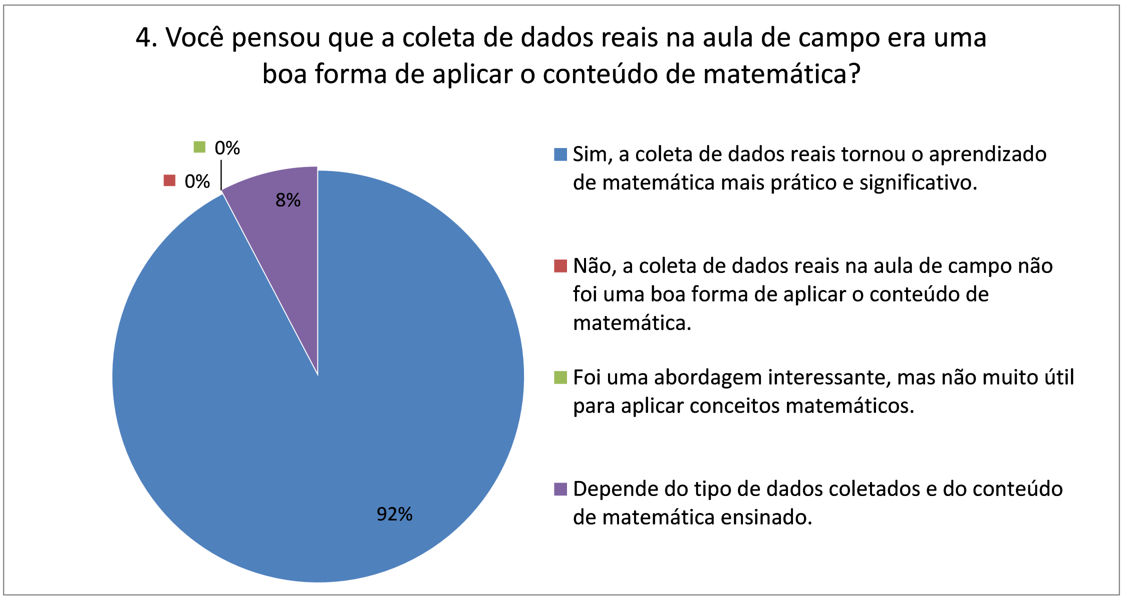
Ao analisar os resultados das duas primeiras perguntas, pode-se concluir que a utilização de dados fictícios, desde que relacionados a problemas da vida real, é uma maneira eficaz de atrair os alunos para um melhor entendimento do conteúdo. Além disso, na *Pergunta* 1, fica evidente que ambas as abordagens atraem o aluno para uma assimilação mais aprofundada do conteúdo.

Figura 4.8 – Gráfico 3: Resultados da Pergunta 3



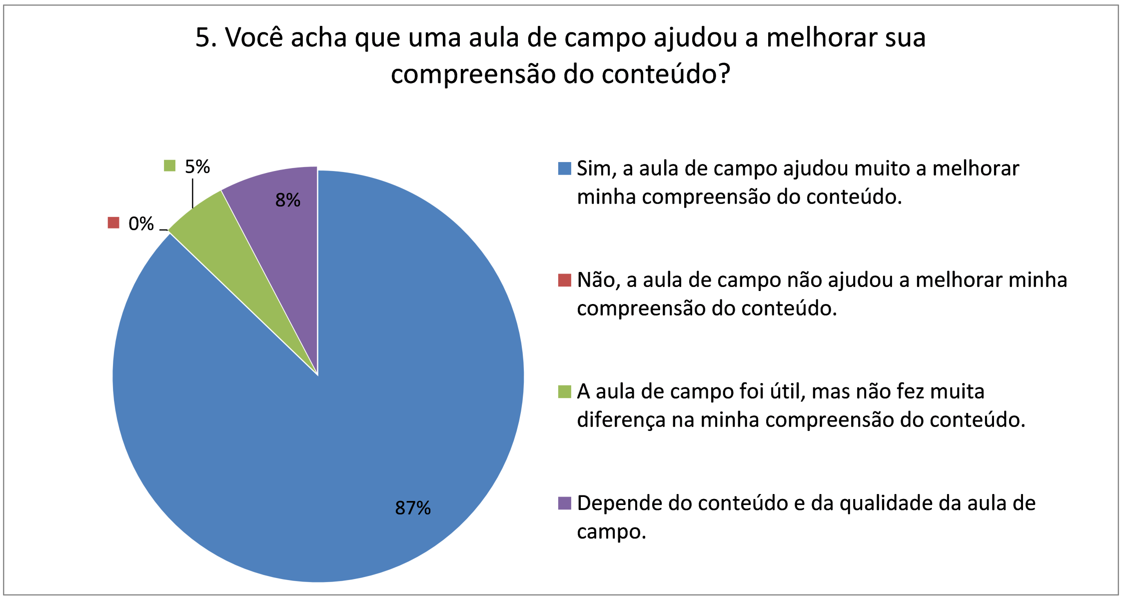
Fonte: O Autor

Figura 4.9 – Gráfico 4: Resultados da Pergunta 4



Fonte: O Autor

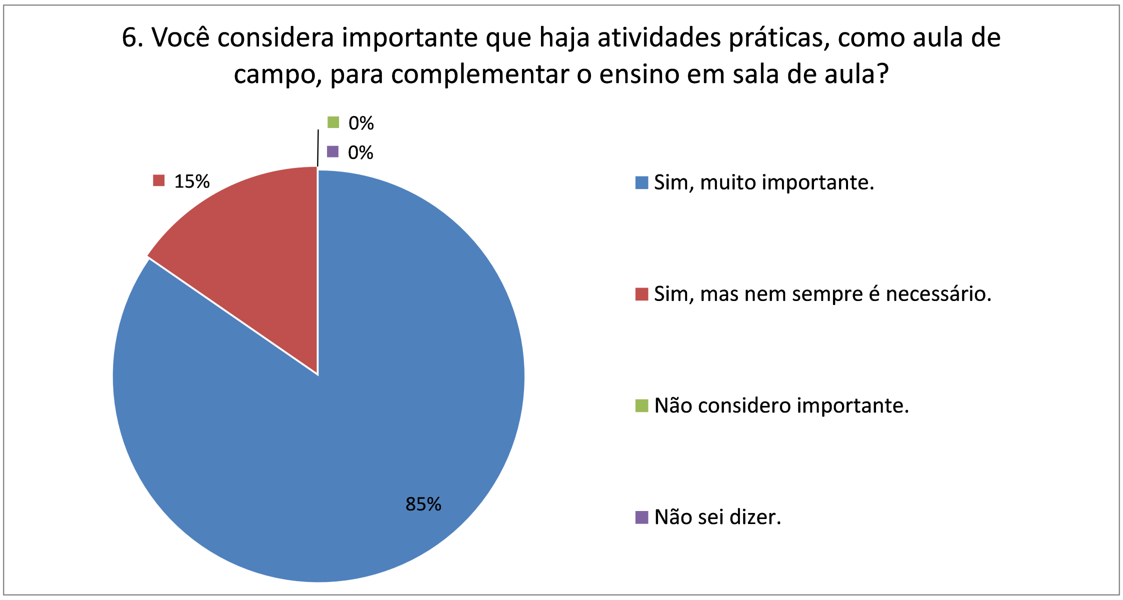
Figura 4.10 – Gráfico 5: Resultados da Pergunta 5



Fonte: O Autor

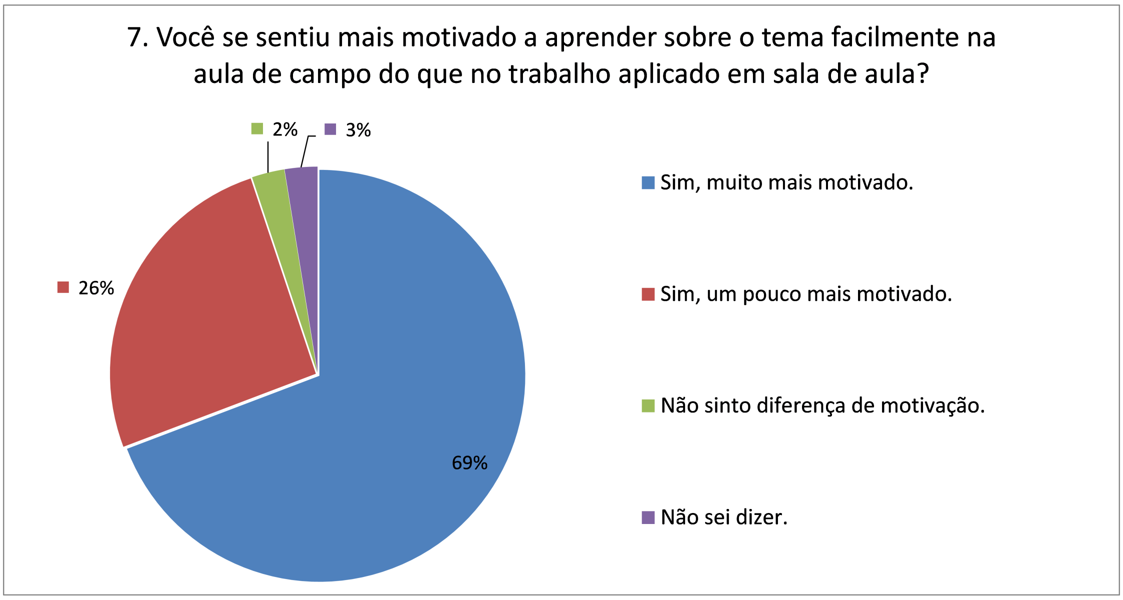
Analisando os gráficos das *Perguntas* 3, 4 *e* 5, conclui-se que a aula de campo é uma excelente alternativa para aplicar conteúdos matemáticos. Essa abordagem proporciona aos alunos uma perspectiva única, oferecendo uma oportunidade valiosa de aprendizado e tornando o estudo da matemática mais prático e significativo. Nesse contexto, (D'Ambrósio, 1986) destaca a importância fundamental da capacidade de modelar situações reais, representando o verdadeiro espírito da matemática.

Figura 4.11 – Gráfico 6: Resultados da Pergunta 6



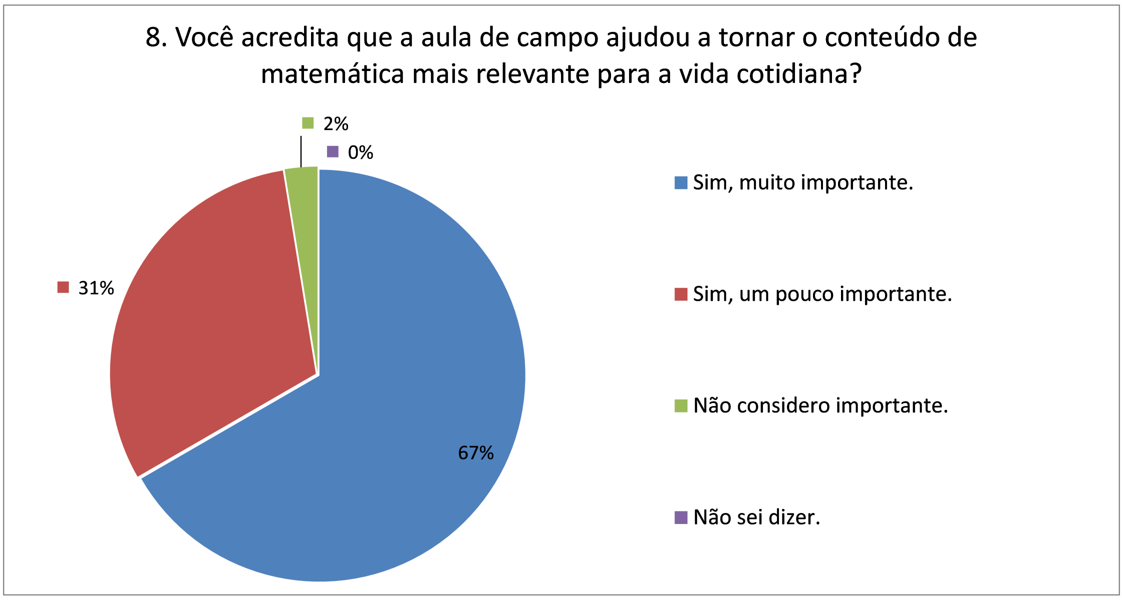
Fonte: O Autor

Figura 4.12 – Gráfico 7: Resultados da Pergunta 7



Fonte: O Autor

Figura 4.13 – Gráfico 8: Resultados da Pergunta 8



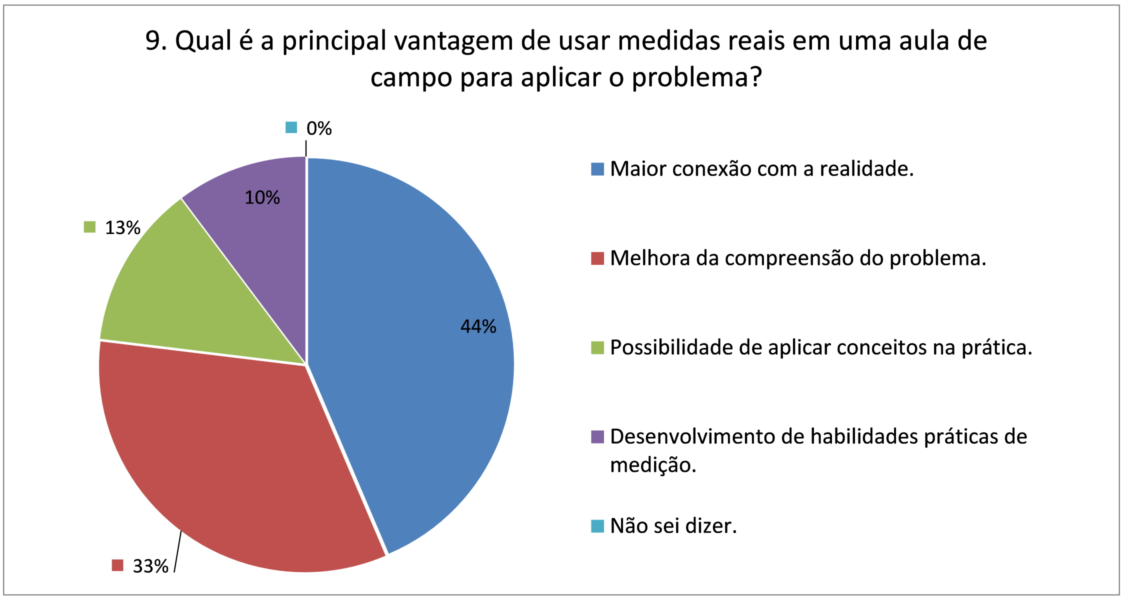
Fonte: O Autor

Com base nos dados das *Perguntas* $6, 7$ *e* 8, conclui-se que a aula de campo é uma excelente abordagem para transmitir conteúdos de matemática, pois possibilita a aplicação prática desses conceitos e ressalta a importância da matemática no cotidiano. Essa abordagem atrativa estimula o interesse dos alunos e facilita o processo de aprendizado. Esses resultados corroboram com a visão apresentada por (Skovsmose, 2000) sobre o uso de aplicações como forma eficaz de envolver os estudantes em ação e reflexão.

No entanto, é importante observar que nas *Perguntas* $6, 7$ *e* 8, foram registradas parcelas consideráveis de 15%, 26% e 31%, respectivamente, dos alunos que demonstraram um interesse menor pela aula de campo. Essa reduzida preferência pode ser justificada pelo fato de que, na *Pergunta* 1, 51% dos alunos afirmaram que ambas as abordagens (sala de aula e aula de campo) são importantes.

Para esses alunos, se o problema representar uma situação real, a aula já é considerada relevante para estabelecer a conexão entre a matemática e a realidade, possibilitando ao aluno buscar soluções no seu dia a dia. Conforme mencionado por (Mendes e Farias, 2014) , é necessário que o professor introduza constantemente em sala de aula uma prática desafiadora, incentivando os alunos a buscar sustentação ou revalidação de verdades já estabelecidas ao longo da história, o que aprimora o seu domínio educativo em matemática.

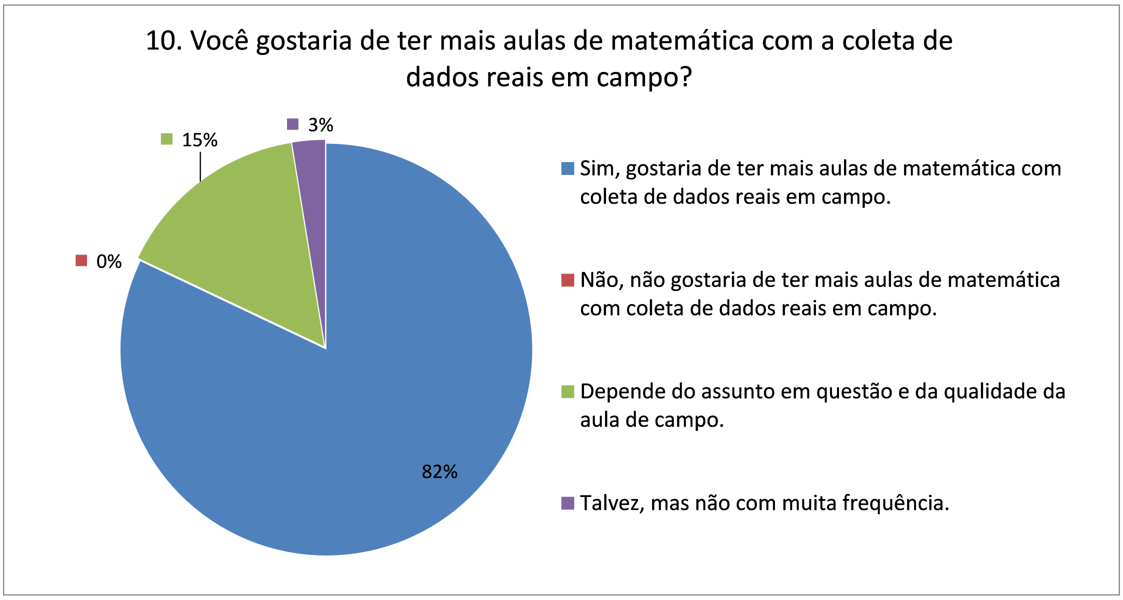
Figura 4.14 – Gráfico 9: Resultados da Pergunta 9



Fonte: O Autor

A *Pergunta* 9 foi feita aos alunos para que expressassem sua opinião sobre a principal vantagem de usar medidas reais em um problema durante uma aula de campo. A maioria dos alunos enfatizaram que a principal vantagem é estabelecer uma conexão mais forte com a realidade e uma melhor compreensão do problema. Essa resposta ressalta a importância de incorporar aulas desse tipo no dia a dia dos alunos.

Figura 4.15 – Gráfico 10: Resultados da Pergunta 10



Fonte: O Autor

Como última questão, na *Pergunta* 10, verificou-se que 82% dos alunos manifestaram o desejo de ter mais aulas de matemática com a utilização de dados reais. Esse resultado ressalta a importância de desenvolver aulas práticas eficientes, que integrem teoria e aplicação, e enfatizam a relevância dos conteúdos matemáticos para a vida dos estudantes. De acordo com (Lima, 2007) , é crucial que o professor se preocupe em encontrar aplicações interessantes para a matemática que está sendo ensinada.

Contudo, constatou-se que 15% dos alunos opinaram que essa preferência depende do assunto abordado e da qualidade da aula de campo. Embora essa porcentagem represente uma minoria, é essencial garantir a criação de aulas que atendam às expectativas e necessidades dos estudantes, proporcionando uma experiência enriquecedora e significativa, possibilitando uma troca de conhecimento. De acordo com (Navarro e Sousa, 2021) , na atividade lúdica, a experiência vivida proporciona ao aluno a oportunidade de explorar ciclos de significado, redefinição e compreensão, o que resulta em uma maior apropriação do conteúdo abordado. Ao vivenciar o aprendizado de maneira prazerosa, diferente da abordagem automática, pré-definida e finalizada, o aluno se engaja de forma mais significativa com o conteúdo. Isso permite que o conhecimento seja internalizado de maneira mais profunda e duradoura.

CONCLUSÃO

Na Seção 1 do trabalho, são abordados os conteúdos de Medidas, Áreas e Semelhança. Nessa abordagem, são apresentados conceitos e demonstrações dos principais teoremas e propriedades. A análise dos problemas nas Seções 2 e 3 é uma aplicação direta da teoria discutida na Seção 1. Essa abordagem possibilita que o professor conduza aulas práticas com problemas do mundo real, tornando o aprendizado mais envolvente e dinâmico, de uma maneira distinta do entretenimento comumente relacionado a jogos e brincadeiras.

Foram incluídas demonstrações no trabalho com o objetivo de enfatizar a importância desse material didático como apoio para os professores da Educação Básica, uma vez que o pensamento dedutivo é relevante para os alunos, sendo introduzido nos anos finais do Ensino Fundamental e aprofundado no Ensino Médio. Além disso, esse material pode ser um complemento aos livros didáticos disponíveis nas escolas, proporcionando ao professor a oportunidade de apresentar esses tópicos de maneiras diversas.

De acordo com (Lima, 2007) , o aluno nos anos finais do Ensino Fundamental demonstra uma maturidade que lhe permite compreender a necessidade de justificar logicamente diversos fatos matemáticos simples, especialmente os relacionados à geometria. Essa prática não apenas o prepara para estudos futuros na área da Matemática, mas também desempenha um papel significativo em sua formação intelectual e até mesmo na promoção de sua cidadania. Ao adquirir noções fundamentais de raciocínio, o jovem adquire as ferramentas necessárias para aplicar de maneira mais eficaz seu senso crítico e capacidade de discernimento.

Dando continuidade às definições e demonstrações, tem-se a aplicação dos procedimentos de (Alberti, 2006) . Foi realizada um estudo de alguns desses problemas, oferecendo ao professor a oportunidade de aplicá-los junto com os alunos em diferentes casos, como medir a altura de uma torre de sinal de celular ou a largura de um quarteirão, calcular a largura de um campo de futebol ou a área do terreno de uma futura casa, entre outros exemplos.

Essa abordagem torna a aula atrativa, com o objetivo de ajudar os alunos a assimilarem esses conteúdos. De acordo com (Lima, 2007) , “O professor deve considerar como parte integrante e essencial de sua tarefa o desafio, a preocupação de encontrar aplicações interessantes para a matemática que está apresentando. [...]". As diversas possibilidades citadas anteriormente representam somente uma fração das várias aplicações significativas possíveis, associadas aos problemas investigados ao longo deste estudo.

No contexto do trabalho desenvolvido, cujo enfoque é a criação de material didático para professores da Educação Básica, realizou-se a aplicação do Problema 3 da Seção 1. Inicialmente, efetuou-se essa aplicação em sala de aula, utilizando dados fictícios com o propósito de demonstração e compreensão do conteúdo. Posteriormente, levou-se essa aplicação para uma aula de campo, onde foram coletados dados reais para enriquecer a experiência com os alunos envolvidos. Essa abordagem prática permitiu maior imersão no tema, tornando o aprendizado mais significativo. Além disso, buscou-se avaliar a eficácia do trabalho aplicado, tanto em sala de aula quanto na aula de campo, por meio de um questionário direcionado aos alunos. O objetivo era coletar opiniões e *feedbacks* sobre a vivência, identificando aspectos positivos, áreas a serem aprimoradas e a relevância do conteúdo para a aprendizagem.

Nos resultados, evidenciou-se que ao abordar problemas conectados diretamente à vivência diária dos estudantes, juntamente com a oportunidade de coletar dados durante uma aula de campo, não apenas estimulou um interesse mais profundo pelo conteúdo em questão, mas também promoveu um engajamento mais ativo por parte dos alunos. Além disso, os resultados sublinham a importância da contextualização, demonstrando que mesmo com dados fictícios, quando incorporados a situações reais, é possível despertar a curiosidade e a motivação dos alunos, como claramente observado nos desdobramentos da aplicação.

As aulas de campo desenvolvem habilidades práticas como observação, coleta e análise de dados, resolução de problemas reais e trabalho em equipe, preparando os alunos para o mundo profissional. Além do aprendizado acadêmico, promovem o crescimento pessoal, aumentando a confiança, iniciativa e adaptabilidade dos alunos, enriquecendo o currículo e capacitando-os para futuros desafios.

Ao realizar aulas de campo, há evidentes benefícios educacionais, mas também desafios a serem considerados. Aspectos logísticos e financeiros, como transporte e autorizações, precisam ser enfrentados. A integração dessas aulas ao currículo requer equilíbrio, pois demandam mais tempo. Variáveis imprevisíveis, como condições climáticas, podem afetar o planejamento. O envolvimento dos alunos e a coleta de dados reais apresentam desafios adicionais devido a problemas técnicos. Apesar da imersão prática das aulas de campo, é essencial não subestimar a base teórica. A limitação no acesso a locais apropriados também pode ser um obstáculo. Portanto, para aplicar algum dos problemas desse material, é necessário superar esses desafios, demandando planejamento cuidadoso e estratégias bem definidas para garantir uma experiência educacional enriquecedora.

Cabe mencionar que o problema foi aplicado a uma amostra limitada de alunos. No entanto, considera-se que, nas futuras aplicações, os professores poderão obter resultados mais abrangentes, identificando pontos positivos e realizando ajustes nas partes que possam não ter um bom aproveitamento pelos alunos.

É importante ressaltar a importância dessa obra histórica para a matemática, tanto na parte teórica como na parte histórica e cultural, provocando o aluno a ter curiosidade sobre a aplicação desses problemas naquela época e relacionando-os com os dias atuais. Percebe-se a relevância da matemática para a nossa vida atual e para aqueles que viveram séculos atrás.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (Brasil, 2000) , é evidenciado que habilidades como buscar informações de forma independente, demonstrar responsabilidade, confiar em seu pensamento, embasar ideias e argumentos são cruciais para a aprendizagem do aluno, bem como para sua capacidade de comunicação, compreensão do valor cultural da Matemática como instrumento de interpretação da realidade e preparo para a entrada no mundo do conhecimento e do trabalho.

Relacionando cultura, contexto histórico e o meio em que o aluno vive, muitas possibilidades e novas ideias aparecerão para o aluno aplicar cada procedimento estudado e quem sabe abrir novos caminhos, novos sonhos, novas possibilidades de estudos e ainda o mais importante, torná-lo independente diante do desenvolvimento de cada técnica.

Com isso, almeja-se que esse estudo realizado, aliada à proposta de aplicação, cumpra seus objetivos ao fornecer aos professores da Educação Básica um material de apoio para as aulas de matemática.

Vale ressaltar que as abordagens desenvolvidas neste estudo não constituem um resultado final e definitivo, mas sim como um processo em constante progresso. As concepções são flexíveis de acordo com a realidade dos envolvidos no contexto educacional.

Além disso, os problemas selecionados do livro de (Alberti, 2006) para investigação nesta pesquisa se revelam fontes inspiradoras, com potencial para serem abordados de novas maneiras. Ao explorar essa obra histórica, abre-se a possibilidade de selecionar novos problemas para futuros estudos, estimulando, assim, o surgimento de outras propostas para trabalhos posteriores.

REFERÊNCIAS

ALBERTI, Leon Battista. **Matemática Lúdica**. Edição apresentada e comentada por Pierre Souffrin. Tradução de André Telles. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: Matemática**. Brasília: MECSEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2022.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Matemática**. Brasília: MEC, 2018.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática.** Grupo Editorial Summus, 1986.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. 3. ed. Rio e Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria**. 4. ed. Rio e Janeiro: SBM, 2011.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 6. ed. Rio e Janeiro: SBM, 2012.

MENDES, Iran Abreu; FARIAS, Carlos Aldemir. **Práticas socioculturais e Educação matemática.** São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2014.

NAVARRO, Eloisa Rosotti; SOUSA, Maria do Carmo de. **Educação matemática em pesquisa (livro eletrônico): perspectivas e tendências:** volume 1 / organizadores Eloisa Rosotti Navarro, Maria do Carmo de Sousa. – Guarujá, SP: científica digital, 2021.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SKOVSMOSE, Ole. **Cenários para investigação. Bolema - Boletim de Educação Matemática**, v. 13, n. 14, p. 66–91, 2000.