UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO - UNIVASF
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JURANDIR MANOEL LOPES

# ESTUDO DO CÁLCULO DE ÁREAS DAS REGIÕES PLANAS IRREGULARES PARA O ENSINO MÉDIO: elaboração de uma proposta de sequência didática

JUAZEIRO - BA
2023

JURANDIR MANOEL LOPES

# ESTUDO DO CÁLCULO DE ÁREAS DAS REGIÕES PLANAS IRREGULARES PARA O ENSINO MÉDIO: elaboração de uma proposta de sequência didática

Trabalho apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da UNIVASF, neste ano em curso.

**Orientador:** Prof. Dr. Evando Santos Araújo

**JUAZEIRO - BA**

**2023**

Lopes, Jurandir Manoel

L864e Estudo do cálculo de áreas das regiões planas irregulares para o Ensino Médio: elaboração de uma proposta de sequência didática / Jurandir Manoel Lopes. - Juazeiro, 2023.

xiii; 98.f.: il.; 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Evando Santos Araújo.

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Métodos numéricos. I. Título. II. Araújo, Evando Santos. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Márcio Pataro. CRB - 5 / 1369.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO - UNIVASF**
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

## FOLHA DE APROVAÇÃO

## ESTUDO DO CÁLCULO DE ÁREAS DAS REGIÕES PLANAS IRREGULARES PARA O ENSINO MÉDIO: elaboração de uma proposta de sequência didática

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Aprovada em, 24 de fevereiro de 2023.

**Banca Examinadora**

Evando Santos Araújo

Prof. Dr. Evando Santos Araújo (PROFMAT - UNIVASF) - Orientador

João Batista Rodrigues da Silva.

Prof. Dr. João Batista Rodrigues da Silva (PROFMAT - UNIVASF) - Avaliador Interno

Anibal L. S. Netto

Prof. Dr. Anibal Livramento da Silva Neto (UNIVASF) - Avaliador Externo

À Deus, aos meus filhos (Ana Beatriz e Júlio Bernardo) e aos meus familiares.

# AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo dom da vida e por me guiar em todos os momentos.

Aos meus pais (in memoriam), pelo apoio dado para os meus estudos.

Ao meu orientador, professor Dr. Evando Santos Araújo, por todos os conselhos, pela paciência e ajuda nesse período.

Aos meus amigos do PROFMAT, pelos momentos de estudo, descontração, companheirismo e amizade.

Aos professores do PROFMAT da Univasf, que tanto contribuíram para minha formação profissional.

Aos colegas e amigos, Alan, Jamerson e Luciano pela companhia nas viagens para a Univasf.

Aos meus colegas professores, pela troca de experiências.

Por fim, a todas as pessoas que contribuíram para realização desse trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).

Muito obrigado!

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE QUADROS

# RESUMO

Este estudo tem como objetivo propor uma sequência didática mobilizando aspectos teóricos/práticos do cálculo de áreas de regiões planas de regiões irregulares. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) orienta as ações pedagógicas para execução dessa temática desde o Ensino Fundamental - Anos Iniciais ao Ensino Médio, com níveis sequenciais de abordagem de conceitos, de acordo com as habilidades e competências a serem alcançadas. Na prática em sala de aula, é conhecido que o objetivo mais trabalhado pelos professores envolve reconhecer a área como grandeza associada a figuras geométricas usuais (quadrado, retângulo, triângulo, trapézio, entre outros) e solucionar problemas envolvendo essa grandeza com o uso de diferentes ferramentas de medição e/ou unidades de medida padronizadas. Nesse contexto, esse trabalho de pesquisa propõe um estudo pesquisa qualitativa para se conhecer aspectos teóricos e práticos relativos ao cálculo de áreas de regiões irregulares. Os objetivos específicos envolvem identificar as principais relações desse tópico em Matemática com habilidades e competências requeridas aos alunos do Ensino Básico pela BNCC, analisar o desenvolvimento de técnicas analíticas e numéricas utilizadas no cálculo de áreas de regiões regulares e sem forma geométrica definida. Para cumprir esse propósito, usou-se métodos numéricos como a regra do ponto médio e a regra dos trapézios, para o cálculo de regiões planas irregulares, como por exemplo, a área de um município. O resultado deste trabalho, resultou em uma sequência didática direcionada a professores de matemática do segundo ano do Ensino Médio. Com isso, espera-se que esse trabalho possa servir como ferramenta de ensino para os professores de Matemática que desejam aplicar e ressignificar conceitos de Matemática para a solução de problemas práticos no próprio ambiente escolar.



**Palavras-chave:** Ensino de Matemática; geometria plana; cálculo de áreas; métodos numéricos; aplicações.

## ABSTRACT

This study aims to propose a didactic sequence mobilizing theoretical/practical aspects of calculating the areas of flat regions of irregular regions. The National Common Curricular Base (BNCC) guides the pedagogical actions to implement this theme from Elementary School - Early Years to High School, with sequential levels of approach to concepts, according to the skills and competences to be achieved. In practice in the classroom, it is known that the objective most worked on by teachers involves recognizing the area as a quantity associated with usual geometric figures (square, rectangle, triangle, trapeze, among others) and solving problems involving this quantity with the use of different measurement tools and/or standardized measurement units. In this context, this research work proposes a qualitative research study to know theoretical and practical aspects related to the calculation of areas of irregular regions. The specific objectives involve identifying the main relationships between this topic in Mathematics and the skills and competences required of Basic Education students by the BNCC, analyzing the development of analytical and numerical techniques used in the calculation of areas of regular regions and without defined geometric shape. To fulfill this purpose, numerical methods such as the midpoint rule and the trapezoid rule were used to calculate irregular flat regions, such as the area of a municipality. The result of this work resulted in a didactic sequence aimed at second-year high school mathematics teachers. With this, it is hoped that this work can serve as a teaching tool for Mathematics teachers who wish to apply and reframe Mathematics concepts for the solution of practical problems in the school environment itself.



**Keywords:** Mathematics Teaching; plane geometry; area calculation; numerical methods; applications.

SUMÁRIO

## 1 INTRODUÇÃO

De acordo com Cardoso (2019) na Geometria plana, um dos conteúdos mais importantes é o cálculo de áreas de figuras planas poligonais. Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a partir do 4º ano, os alunos começam a estudar os conceitos de área, de maneira intuitiva, realizando, por exemplo, atividades com recortes de cartolinas, comparando visualmente ou por superposição, áreas de faces de objetos, de figuras planas ou de desenhos específicos.

A partir dos Anos Finais (do 6º ao 9º ano), esses conceitos são apresentados utilizando decomposição por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas, conforme ressalta (BRASIL, 2018). A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca que a expectativa elencada para os alunos dos Anos Finais é a de que eles possam reconhecer a área como grandeza associada a figuras geométricas e que consigam resolver problemas envolvendo essa grandeza com o uso de diferentes ferramentas de medição e/ou unidades de medida padronizadas.

> A BNCC destaca também, mais especificamente, a proposta de "resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos" (BRASIL, 2018, p. 315).

Para o Ensino Médio, a proposta da BNCC na área de Matemática é semelhante à indicada para o Ensino Fundamental, o que envolve aproveitar os conhecimentos construídos pelos alunos em séries anteriores, além de consolidar, ampliar e aprofundar as aprendizagens desenvolvidas nas etapas anteriores de nível escolar, como destaca a BNCC.

De todo modo, ao ver do autor deste estudo, é escassa a aplicação em sala de aula (e até mesmo na literatura) de problemas que envolvam o cálculo de áreas de regiões planas irregulares, sem uma lei de formação imediata que possa ser utilizada, como no caso das áreas de regiões regulares descritas anteriormente. Problemas como o descrito em "Qual a área da região limitada pela parábola da função $y = x^2$ e o eixo x, no intervalo de 1 a 3?" não podem ser desenvolvidos pela falta de ferramentas e discussões adequadas ao público-alvo, naquele nível escolar, visto à geometria não usual da região (sem uma forma geométrica definida) a qual se deseja calcular a área. Soma-se a isso, o fato de que a contextualização desses problemas com situações reais do dia-a-dia do aluno, com o objetivo de (re)significar conceitos matemáticos, também é incipiente, mesmo com ações indicadas claramente na BNCC.

Dessa forma, é possível que o professor do Ensino Médio se questione: como que problemas da classe do cálculo de áreas de regiões irregulares podem ser solucionados por métodos elementares, usando ferramentas de cálculo acessíveis ao aluno? Na tentativa de apresentar contribuições para soluções nesse campo de pesquisa em Ensino de Matemática, o presente estudo é de abordagem qualitativa e possui carater bibliográfico, de cunho descritivo-exploratório. Tem com objetivo principal propor uma sequencia didática mobilizando aspectos teóricos/práticos do cálculo de áreas de regiões planas de regiões irregulares. Os objetivos específicos são identificar as principais relações desse tópico em Matemática com habilidades e competências requeridas aos alunos do Ensino Básico pela BNCC, analisar o desenvolvimento de técnicas analíticas e numéricas utilizadas no cálculo de áreas de regiões regulares e sem forma geométrica definida.

Na organização da apresentação dos resultados, esse estudo foi dividido em seções que se complementam. No Capítulo 2, é discutido o tema de áreas de regiões planas e sua importância no currículo de matemática na Educação Básica, relacionando-o com habilidades e competências da BNCC. No capítulo 3 aborda aspectos teóricos e práticos relativos à descrição de técnicas de cálculo de área, passando por aspectos analíticos do Cálculo Integral, apresentando teoremas, demonstrações e definições, sua relação com o cálculo de áreas, bem como a apresentação de métodos numéricos tais como o do Ponto Médio e do Trapézio, os quais podem ser adaptados para estudos dessa natureza na Educação Básica. No capítulo 4 apresenta um Produto Educacional como resultado da realização deste estudo, a partir da proposta de uma sequência didática ao público-alvo. No capítulo 5 são apresentadas as considerações finais e as perspectivas de trabalhos futuros decorrentes dessa pesquisa.

# 2 ÁREAS DE REGIÕES PLANAS NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA, LIVROS DIDÁTICOS, CURRÍCULO DE PERNAMBUDO E PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Neste capítulo será discutido a presença do tema na BNCC, nos livros didáticos, no Currículo de Pernambuco e nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental Anos Finais e para o Ensino Médio bem como algumas contribuições de pesquisas para o ensino de cálculo de áreas.

## 2.1 Áreas de regiões planas na Base Nacional Comum Curricular

A BNCC é o documento que rege as ações educacionais no currículo da Educação Básica no Brasil. Propõe cinco unidades temáticas para Matemática no Ensino Fundamental, Números, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística e Grandezas e medidas, na qual o cálculo de áreas esta inserido. Nesta unidade, que está correlacionada com as outras, são orientadas as habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos. O cálculo de área de regiões planas está explicitamente relacionado com essas habilidades, como destacadas no Quadro 1.

**QUADRO 1.** Objetos do conhecimento e habilidades recomendadas pela BNCC (BRASIL, 2018) para o ensino de cálculo de áreas nos anos finais do Ensino Fundamental.

| ANO | OBJETO DE CONHECIMENTO | HABILIDADES | BNCC (págs.) |
|---|---|---|---|
| | Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, Área, capacidade e volume. | “(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.” | 302 - 303 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **6º ANO** | Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado. | “(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.” | 302 – 303 |
| **7º ANO** | Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros. | “(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.”<br><br>“(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.” | 308 - 309 |
| **8º ANO** | Área de figuras planas. Área do círculo e comprimento de sua circunferência. | “(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.” | 314-<br>315 |
| **9º ANO** | Volume de prismas e cilindros | (EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas. | 318-319 |

Fonte: (BRASIL, 2018).

Como se ver, o cálculo de áreas de figuras geométricas planas está presente em todos os anos do Ensino Fundamental – Anos Finais. E ao passar dos anos, outras figuras são apresentadas aos alunos, em algumas séries as figuras se repetem, mas com um grau maior de dificuldade nas habilidades.

Para o 9° ano, embora a BNCC não faça uma menção explícita ao cálculo de áreas, o cálculo de volume de alguns sólidos como, por exemplo, do cubo, paralelepípedo, prismas e cilindros retos envolve o cálculo da área da base dessas figuras geométricas. Essa base geralmente é representada por quadriláteros ou círculo, conceitos que, juntamente com a área do triângulo, do retângulo e do quadrado, foram trabalhados nos anos anteriores.

Enquanto para o Ensino Médio, a BNCC (BRASIL, 2018) orienta algumas habilidades relacionadas ao tema, tais como empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície, resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais, e ainda representar graficamente a variação da área de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam.

É importante salientar que para o Ensino Médio, a BNCC descreve:

> A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade. (BRASIL, 2018, p. 527).

No Ensino Médio, o conteúdo de cálculo de áreas se faz presente nos três anos de ensino. De acordo com (BRASIL, 2018), a expectativa é que os alunos compreendam que o ato de medir é comparar uma grandeza com uma unidade padrão e expressar o resultado da comparação por meio de um número. Além disso, devem resolver problemas oriundos de situações cotidianas que envolvam outras grandezas relacionadas, tais como comprimento, massa, tempo e temperatura.

Nesse sentido, o cálculo de área também é indicado na BNCC como pré-requisito para o cálculo de volumes de figuras geométricas tridimensionais (como mostra o Quadro 2).

**QUADRO 2.** Competências específicas e respectivas habilidades recomendadas pela BNCC (BRASIL, 2018) para o ensino de cálculo de áreas no Ensino Médio.

| **COMPETÊNCIA ESPECÍFICA** | **HABILIDADES** | **BNCC (págs.)** |
|---|---|---|
| Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como | (EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de | |

| | | |
|---|---|---|
| os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. | capacidade ou de massa. | 534 |
| Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. | (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. | 536 |
| | (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais. | 537 |
| Investigar e Estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. | (EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. | 541 |
| | (EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital. | 541 |

Fonte: (BRASIL, 2018)

O cálculo de áreas de figuras planas está presente em todo o Ensino Médio, com um grau crescente em dificuldades. O cálculo de áreas de figuras planas tem como uma das principais funções nesse nível de escolaridade de resolver problemas de ordem prática.

Freitas e Bittar (2016, p.11) reforçam essa ideia quando discorrem que "algumas atividades propõem o cálculo do volume de um determinado sólido, porém, antes de calcular esse volume, é necessário determinar a área da base do mesmo". O cálculo do volume de sólidos geométricos envonvem a área da base dessa figura, que pode ser representa por um quadrilátero, regular ou não ou até pelo círculo, e para tal, precisa-se calcular o valor da sua área.

Para o Ensino Fundamental, a BNCC relaciona as habilidades a objetos do conhecimento, de forma explícita (Quadro 1). No Ensino Médio, as habilidades requeridas são ligadas ao desenvolvimento de competências específicas (Quadro 2).

Para o Ensino Médio, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 530) destaca:

> No ensino médio, a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir aos estudantes o desenvolvimento de competências específicas. Relacionadas a cada uma delas, são indicadas, posteriormente, habilidades a ser alcançadas nessa etapa.

Nesse sentido, a BNCC ainda discorre que “as competências não têm uma ordem preestabelecida”, (BNCC, 2018, p. 530). Como cada habilidade está associada à determinada competência, elas devem ser apresentadas nos três anos do Ensino Médio e ainda são apresentadas sem indicação de seriação. Por essa decisão, fica flexibilizada a definição anual dos currículos e propostas pedagógicas de cada escola em cada estado brasileiro. Como consequência, os livros didáticos adotados para o Ensino Médio podem apresentar os conteúdos de acordo com a BNCC, mas sem uma ordem preestabelecida para esses conteúdos.

## 2.2 O cálculo de áreas nos livros didáticos

A seguir, tem-se a análise de alguns livros didáticos distribuídos pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), acerca do conteúdo cálculo de áreas de figuras planas para o Ensino Fundamental – Anos Finais e Ensino Médio.

Ensino Fundamental – Anos Finais

O cálculo de áreas de figuras planas se inicia nas primeiras séries dos anos finais do Ensino Fundamental calculando a medida das áreas de figuras representadas na malha quadriculada e verificando quantas vezes uma unidade de medida de área “cabe” na figura. A unidade de medida de área é um quadrado de área igual a 1 u. a.

Para o sexto ano, as figuras geométricas trabalhadas no cálculo de áreas são o retângulo, o quadrado e o triângulo, através de atividades e resolução de problemas, como mostra Chavante (2018).

Para o sétimo ano, são acrescentadas as figuras geométricas, paralelogramo e o trapézio para o cálculo de áreas e ainda são acrescentados o tema área de polígonos regulares, que pode ser calculada através da decomposição em figuras mais simples já conhecidas, como aponta Bigode (2000).

No oitavo ano, o cálculo de áreas se dá com as figuras geométricas apresentadas na série anterior com o acréscimo da área do círculo e suas partes. Chavante (2018) mostra uma das maneiras de se chegar na fórmula da área do círculo ($A = \pi r^2$) através da decomposição em triângulos.

Para o nono ano, o cálculo de áreas se apresenta no cálculo da área da superfície e do volume de figuras espaciais como prismas e cilindros retos. A área das superfícies se dá pela soma das áreas de suas faces que podem ser quadrados, retângulos ou até mesmo um polígono regular.

Para o cálculo do volume, o cálculo da área se faz presente no cálculo da base, como mostra Chavante (2018, p. 252), “ A medida do volume (V) de um prisma é dada pelo produto entre a medida da área da base ($A_b$) e a medida da altura (h), isto é $V = A_b.h$”.

Para o Ensino Médio o cálculo de área se apresenta com a resolução de problemas envolvendo polígonos regulares inscritos na circunferência além de área da região quadrada, área da região retangular, área da região triangular, área limitada por um trapézio, por um losango e também por um hexágono regular, Dante (2013). O cálculo de áreas também se apresenta na resolução de problemas envolvendo volumes de prismas, pirâmides, cilindros circular reto, cone e ainda da esfera.

A área de um polígono, entre outras fórmulas, também pode ser calculada pelo método analítico aplicando o determinante, através da decomposição em triângulos a partir das coordenadas de seus vértices, como aponta Paiva (2009).

É importante relatar que há alguns anos atrás, o conteúdo de cálculo de áreas se apresentava no final dos livros didáticos e como o professor seguia a programação do livro, nem sempre conseguia chegar ao final do livro, ficando assim uma lacuna nesse conteúdo.

## 2.3 O cálculo de áreas no currículo de Pernambuco

O Currículo de Pernambuco do Ensino Fundamental é o documento que irá orientar a partir de 2019 o trabalho pedagógico da Educação Infantil e Ensino Fundamental nas escolas em todo o Estado.

O Currículo de Pernambuco, fundamentado na BNCC, torna-se um instrumento de referência indispensável a todas as etapas e modalidades da Educação Básica.

Nesse contexto, os professores planejam suas práticas pela abordagem das habilidades apresentadas neste documento. Os conteúdos e habilidades para o Ensino Fundamental, Anos Finais para a disciplina de Matemática apresenta-se de acordo com a BNCC, mostrada no (**Quadro 1**).

Para a área de Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio, a Base Nacional Comum Curricular **-** BNCC (2018) propõe a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais que foram desenvolvidas no Ensino Fundamental. Nesse sentido, o Currículo de Pernambuco apresenta o cálculo de áreas com as habilidades e competências por seriação, diferentemente como é apresentado pela BNCC. É através do Currículo que o professor faz seu planejamento para a sequência dos conteúdos, baseados no (**Quadro 2)**.

## 2.4 O cálculo de áreas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)

Sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais, (BRASIL, 1998, p.15), destaca que:

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática têm como finalidade fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino dessa área do conhecimento, socializar

> informações e resultados de pesquisas, levando-as ao conjunto dos professores brasileiros.

Conteúdos propostos pelos PCNs (BRASIL, 1998) para o ensino de Matemática no Ensino Fundamental, Anos Finais:

- Compreensão da noção de medida de superfície e de equivalência de figuras planas por meio da composição e decomposição de figuras;
- Cálculo da área de figuras planas pela decomposição e/ou composição em figuras de áreas conhecidas, ou por meio de estimativas;
- Cálculo da área de superfícies planas por meio da composição e decomposição de figuras e por aproximações;
- Construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de reta e/ou arcos de circunferência);
- Cálculo da área da superfície total de alguns sólidos geométricos (prismas e cilindros);
- Análise das variações do perímetro e da área de um quadrado em relação à variação da medida do lado e construção dos gráficos cartesianos para representar essas interdependências.

Conteúdos e habilidades propostos pelos PCNs (BRASIL, 1997) para as unidades temáticas a serem desenvolvidas no Ensino Médio

Unidade temática: Métrica: áreas e volumes

- Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos;
- Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos;
- Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro.

Os PCNs orientam ainda que:

- Os conhecimentos sobre perímetros, áreas e volumes devem ser aplicados na resolução de situações-problema.
- A composição e a decomposição de figuras devem ser utilizadas para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes relacionados a figuras planas ou espaciais. Assim, os problemas que envolvem figuras inscritas ou circunscritas podem ser propostos aos alunos no sentido de aplicação do que aprenderam sobre as diversas medidas.

## 2.5. Algumas considerações sobre o Processo de Ensino e Aprendizagem de Cálculo de Áreas de Regiões Planas

Nos últimos anos, a importância do cálculo de áreas para a formação do aluno em nível básico também vem sendo amplamente discutida na literatura como resultado de pesquisas desenvolvidas diretamente no ambiente escolar (CARDOSO, 2019).

Em trabalho de pesquisa com seus alunos do Ensino Fundamental - Anos Finais, Oliveira *et al.* (2020) trabalhou a determinação do custo para ladrilhar o piso de uma sala, mediante o cálculo de sua área equivalente. Nessa proposta, os autores discutiram diversos temas com os estudantes, desde a história, medidas de comprimento, múltiplos e submúltiplos do metro, o conceito de unidade e sua importância, passando pelo conceito e operações com frações e números decimais, até a apresentação de diferentes instrumentos de medição (como a régua e a trena) necessários ao cálculo das áreas de salas e os respectivos custos de recobrí-las com ladrilhos.

Em outro trabalho realizado na Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Ensino Médio, Rocha e Silva (2020) mostraram que mesmo com dificuldades para se calcular áreas de figuras planas, os alunos foram capazes de compreender a diferença entre área e perímetro de uma figura geométrica plana. Para facilitar esse entendimento, usou-se também o próprio espaço da sala de aula na qual os alunos estudavam, associando o conteúdo aprendido com o meio no qual estão inseridos e vivenciam.

Os autores ainda destacam que como a pesquisa envolveu alunos mais experientes (com relação a idade), eles puderam utilizar seus conhecimentos prévios para associar diversos contextos do dia-a-dia com a Geometria, trazidos pelo cotidiano na sua vivência, uma vez que muitos deles são trabalhadores, alguns comerciantes e até pedreiros, cujas profissões estão muito ligadas a conteúdos matemáticos e geométricos, fazendo uso de conceitos geométricos, mesmo que intuitivamente.

Outras pesquisas encontradas na literatura focam na aplicação do tema para o cálculo de áreas de regiões planas irregulares, utilizando diferentes instrumentos que auxiliam nessa medição. Os autores justificam propostas didáticas nesse sentido com o intuito de contextualizar os conteúdos matemáticos com situações do cotidiano do aluno.

Após os resultados das avaliações externas do estado do Paraná, como Sistema de Avaliação da Educação Básica, (SAEB), Sistema de Avaliação do Estado do Paraná (SAEP) e PROVA PARANÁ, Charnei (2019) mostra que a situação revelada pelas avaliações é bastante preocupante nas disciplinas de Matemática e Português. Em Matemática, um dos descritores específicos que tem chamado a atenção pelo baixíssimo desempenho dos estudantes na prova Paraná é o Descritor 13 (resolução de problemas envolvendo o cálculo de área de figuras planas).

Esses resultados talvez sejam revelados devido à existência de um problema quanto ao ensino-aprendizagem trabalhado de forma tecnicista, mesmo considerando que este tópico de Matemática é tão manuseável e com muitas aplicações práticas, como as descritas por Oliveira *et al.* (2020) e Rocha e Silva (2020).

Para minimizar o problema, Charnei (2019) realizou um trabalho envolvendo o conceito de área e perímetro de quadriláteros, utilizando ferramentas do *software* GeoGebra disponíveis para fins didáticos em Geometria. Nesse sentido, o autor (CHARNEI, 2019, p. 626) destaca que

> O GeoGebra é um ambiente de geometria dinâmica que integra Geometria, Álgebra e Estatística. Com este programa, os alunos podem explorar, testar, aplicar, apagar, fazer de novo, tentar e

> chegar as suas próprias conclusões, sendo assim protagonistas do aprendizado.

O trabalho foi realizado com duas turmas do Ensino Fundamental Anos Finais, 8° e 9° anos, no laboratório de informática da escola campo de pesquisa, realizando atividades envolvendo área e perímetro de figuras planas, justificadas pelo fato de uma boa parte dos alunos confundirem esses conceitos na Educação Básica (CHARNEI, 2019). Por meio da ferramenta “Polígono”, no *software* GeoGebra, foi possível construir os polígonos (regulares ou não) em destaque. Após a construção, os alunos foram convidados a determinar a área desses polígonos construídos, usando a ferramenta “Área”. Ainda foi solicitado aos alunos que movessem os vértices dos polígonos, mantendo a forma da figura e observassem o que acontecia com a área das mesmas e discutissem com os colegas. Após a sequência, verificou-se que houve um grande avanço no resultado das questões envolvendo o cálculo de áreas.

De fato, é sabido que para que o aluno consiga obter habilidades necessárias para formação de competências na resolução de situações problema do dia a dia, a Matemática apresenta-se de forma interdisciplinar e contextualizadade de temas das mais diversas áreas como, por exemplo, em Geografia.

Puhl e Dias (2017), com a contextualização de conteúdos, sugeriram ações pedagógicas para mensurar áreas desmatadas em um determinado período de tempo, na região de Bom Princípio/RS. As atividades propostas foram realizadas com turmas do 9° ano do Ensino Fundamental e envolveram basicamente noções de escala, de proporção e cálculo aproximado dessas áreas a partir da soma de áreas de figuras planas regulares equivalentes.

Na atividade orientada por professores de Matemática e Ciências, usou-se o próprio espaço geográfico no qual o estudante estava inserido para significar o ensino de cálculo de áreas. Foi usado o *software* Google *Earth* como ferramenta para a obtenção das imagens de satélite das regiões desmatadas (as quais se desejava obter suas respectivas áreas), bem como as escalas de medições a serem utilizadas como referência. Resumidamente, como descreveram Puhl e Dias (2017, p. 4), o principal objetivo foi “relembrar ou construir os conceitos de escala, proporção e de área, para fazer o cálculo aproximado das áreas em tamanho real". Como conclusão do estudo, os autores verificaram que essa contextualização do conteúdo, aliada à estratégia de resolução de problemas, influenciou de forma positiva na interação e participação ativa do estudante na construção do próprio conhecimento (PUHL; DIAS, 2017, p. 1).

Outro destaque relativo à aplicação do cálculo de áreas, diz respeito à divisão de áreas de propriedades rurais. Esta ação é bastante conhecida e usada desde a antiguidade, por exemplo, com os povos Egípcios (PAUTZ, 2021). Nos dias atuais, essa atividade ainda é requerida como parte do processo de delimitação de terras rurais. Geralmente, utiliza-se o cálculo da área de um polígono para modelar a área da propriedade rural. Dessa forma, também é possível realizar o georreferenciamento de imóveis rurais.

Costa (2018, p.1) descreve que

> o georreferenciamento é uma ferramenta que permite determinar a posição exata de um imóvel e a sua área. Nesse mapeamento, estão disponíveis as coordenadas geográficas de posição de todas as suas confrontações, permitindo ao proprietário saber exatamente onde começam e onde terminam as suas terras.

Dessa forma, o georreferenciamento de um imóvel pode ser entendido como uma ferramenta para a determinação da sua forma geométrica, suas dimensões e sua localização, através de métodos de levantamento topográfico.

Na antiguidade para fazer a localização de terras, os homens usavam vários instrumentos como bússolas e mapas. Ao passar dos anos, novos instrumentos foram criados pelo homem e substituíram os mais antigos, trazendo assim uma melhor eficácia da modernidade. Nos dias atuais, o Georreferenciamento pode ser feito por diferentes métodos, tais como: VANTs (Veículo Aéreo Não Tripulado), ou seja, drones, e também GPS (Sistemas de Posicionamento Global), por meio de imagens com satélite.

Outro exemplo, como cita Cordeiro Neto, (2019), em janeiro de 2019, mostra que ocorreu um desastre em Brumadinho, região metropolitana de Belo Horizonte, em Minas Gerais, devido ao rompimento de uma barragem de rejeitos de minério de ferro de uma mineradora multinacional. A lama de rejeitos atingiu a área administrativa da mineradora, bairros e comunidades próximas, pousadas, áreas de cultivo, pastagens, além de estradas e vias rurais. (CORDEIRO NETO, 2019) destaca que após a tragédia, ambientalistas e autoridades tiveram que estimar a área devastada. Por outro lado, a região em evidência não é delimitada apenas por segmentos de retas, formando áreas de polígonos regulares já conhecidos, tornando assim, o cálculo dessa estimativa não tão fácil.

Ainda segundo Neto (2019), questões envolvendo estimativas da área de uma região no plano qualquer também fazem parte do exame do PISA[1]. Submetendo esses problemas aos alunos da Educação Básica, eles deverão procurar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para chegar a uma solução do cálculo da área em destaque.

Toma-se como exemplo, o Georreferenciamento de Imóveis Rurais, regido segundo Normas Técnicas do Georreferenciamento de Imóveis Rurais (NTGIR).

> O cálculo da área passou a ser realizado por intermédio das coordenadas locais, localizado sobre um Sistema Geodésico Local (SGL), as quais são obtidas pelas coordenadas geográficas (latitude, longitude e altitude elipsoidal) ou cartesianas (X,Y,Z), recorrendo a uma matriz de rotação ortogonal para realização da conversão. (PRINA *et al*., 2015, p.117).

Em questões como essa, podemos observar que a Matemática está presente em outras áreas do conhecimento, na resolução de problemas em diferentes situações.

Para outros autores (MAGNAGO; OLIVEIRA, 2015), é importante conhecer o conceito de volume e de área superficial de um sólido compreendendo seus significados, pois, fazem parte das mais variadas atividades do ser humano. Em seu trabalho, Magnago e Oliveira (2015) destacam que se agrava o interesse dos alunos pelo estudo de Matemática, devido à falta de conexão entre os conteúdos trabalhados em sala de aula e suas realidades, ocasionadas principalmente pelos avanços tecnológicos na área de comunicação. Para sanar essa lacuna, entra em foco um problema que envolve compreensão e significados que fazem parte do cotidiano das pessoas: cálculo do volume e da área superficial de um reservatório de

---

[1] O PISA é o Programa Internacional de Avaliação de Alunos.

água. A proposta apresentada no trabalho foi de modelagem matemática, como estratégia de ensino-aprendizagem, para resolver o problema de volume e de área**.** Segundo Magnago e Oliveira (2015, p. 4) “Modelagem Matemática[2] é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos”.

Por isso, se faz necessário a aproximação entre esses conceitos e questões reais, como aponta Magnago e Oliveira (2015, p. 308):

> Espera-se que os conceitos de volume e de área, abordados no Ensino Médio, passem a compor um rol de conhecimentos que os indivíduos disponham e usem de acordo com suas necessidades.

Ainda para Magnago e Oliveira (2015), a importância do cálculo de áreas se dá, por exemplo, pela relação com a quantidade de material empregado à construção de reservatórios/tanques e sua capacidade. A principal função desses reservatórios é acomodar um dado volume de matéria líquida ou sólida e seu custo é um parâmetro levado em consideração para sua aquisição. Nesse exemplo, tem-se uma aplicabilidade significativa da Matemática muito significativa. Como os recursos materiais e financeiros geralmente são limitados é possível construir um tanque que comporte um dado volume, utilizando a menor área de material possível, sugerindo economia na construção do aparato.

E, de fato, essas expectativas estão de acordo com algumas competências e habilidades específicas de Matemática da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio (BRASIL, 2018, p. 527):

> No que se refere a Grandezas e Medidas, os estudantes constroem e ampliam a noção de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, e obtêm expressões para o cálculo da medida da área de superfícies planas e da medida do volume de alguns sólidos geométricos.

A BNCC (BRASIL, 2017, p. 527) ainda destaca a ação de

> Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.)

---

[2] A modelagem matemática é uma estratégia de ensino que relaciona situações do dia a dia do estudante a conteúdos matemáticos.

> e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Desde no Ensino Fundamental, os alunos aprendem a calcular áreas de figuras geométricas planas regulares a partir de fórmulas pré-determinadas descritas nos livros didáticos e apresentadas pelo professor. Giovanni Júnior e Castrucci (2018), sugerem fazer uma retomada do cálculo de área de algumas figuras geométricas planas como retângulo e quadrado para dar início ao cálculo de área de outras figuras como paralelogramo, triângulo, retângulo, baseado na composição e decomposição de polígonos conhecidos. “Sugere-se que, além da retomada das fórmulas, o conceito de área seja novamente discutido. Muitas vezes os alunos confundem os conceitos de área e perímetro” (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018, p. 260).

No Ensino Médio, o conteúdo cálculo de medida de área é retomado no 1º ano e o problema do cálculo de áreas continua em foco, com um grau de dificuldade maior, pois há inserção de outras formas geométricas regulares e da relação de área com outros conteúdos de matemática e com a aplicação na relação de problemas de outras disciplinas.

As figuras geométricas estudadas no Ensino Fundamental e Médio, geralmente são regulares, enquanto que em problemas reais, nem sempre aparecerão esses tipos de figuras. Para o cálculo da área de regiões planas irregulares, onde não há fórmulas pré-estabelecidas, pode-se usar algumas técnicas de cálculo por aproximação e até mesmo o cálculo integral.

Em grande parte desses casos, não se realiza uma discussão prévia para elucidar, por exemplo, que o cálculo de áreas de figura planas pode ser tomado como referência à soma das áreas de quadrados com 1 unidade de medida (u.m.) de lado, equivalentes à área em estudo. Essa abordagem também ajudaria a desmistificar aos alunos o significado da unidade de medida de área (u.m.$^2$).

Conforme mensiona Nós (2018), o cálculo de áreas é uma das necessidades das antigas civilizações. Os geometras antigos tentaram estudar a área de outras figuras, por exemplo, a  do círculo, relacionando-as com o quadrado, isso se devia, talvez, pelo fato do quadrado ser uma figura simples. Nesse sentido, empregou-se a expressão quadratura, desse modo, de se determinar um quadrado com área igual à área da figura estudada, ou seja, usar a equivalêcia entre as áreas.

Sobre a quadratura, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC apresenta o seguinte:

> Assim, a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam “fazer a quadratura de uma figura”). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau. (BRASIL, 2018, pág. 272).

Esse recurso, conhecido como Equicomposição de polígonos, também é enfatizado na BNCC:

> Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados. (BNCC, 2018, pág. 541).

Esse tema tem sido explorado em testes oficiais como o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP (Nós, 2018), como visto nos exemplos. (**Fig. 1**) e (**Fig. 2**)

**Figura 1**. Questão 21 do Enem – 2008

**Questão 21**

O *tangram* é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

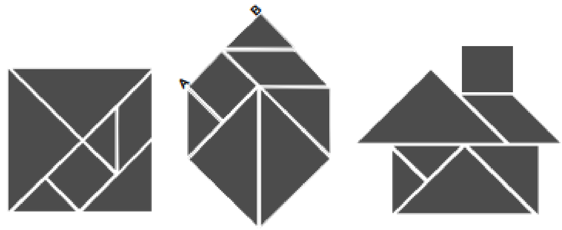


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a

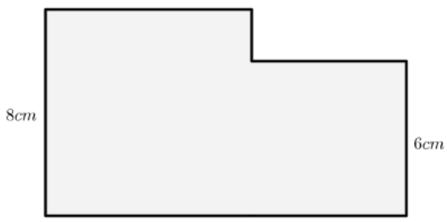
- Ⓐ 4 cm$^2$.
- Ⓑ 8 cm$^2$.
- Ⓒ 12 cm$^2$.
- Ⓓ 14 cm$^2$.
- Ⓔ 16 cm$^2$.

Fonte: Enem (2008)

**Figura 2**. Questão 24 do banco de questões da OBMEP - 2016

**24** ***Cortando a escada para formar um quadrado***

A figura a seguir mostra uma "escadinha" formada por dois quadrados, um de lado $8cm$ e um de lado $6cm$. A tarefa é cortar a figura em três pedaços e reagrupá-los para formar um quadrado sem buracos.




(a) Qual o lado do quadrado que deverá ser formado no final?

(b) Utilizando apenas um lápis, uma régua de $20cm$, com marcações de $1cm$ em $1cm$, e uma tesoura que corta apenas seguindo uma linha reta, mostre como realizar a tarefa desejada.

Fonte: OBMEP (2016)

# 3 O CÁLCULO DE ÁREAS DE REGIÕES PLANAS

## 3.1 Alguns aspectos sobre Integral Indefinida

O cálculo de áreas remete a época muito antiga. Boyer (2012). Segundo historiadores, os primeiros cálculos de áreas foram realizados há cerca de dois mil anos antes de Cristo, no Egito. Os agricultores da época precisavam dividir as terras que não estavam inundadas pelas cheias do rio Nilo, e ainda faziam demarcações de divisas para cada terreno, para isso utilizavam corda como instrumento de medida.

Muitas civilizações primitivas como egípcias e mesopotânicas conheciam as fórmulas para a área de polígonos como quadrados, retângulos e trapézios. Contudo, os matemáticos primitivos se deparavam com muitas dificuldades para encontrar fórmulas para a área de regiões com contornos curvilíneos, das quais o círculo é o exemplo mais simples, pois pode ser decomposto em polígonos conhecidos.

O primeiro processo real no trato com o problema geral da área foi obtido pelo matemático grego Arquimedes, Himonas (2005), que obteve áreas de regiões delimitadas por arcos de círculos, parábolas, esperais e vários outros tipos de curvas, usando um procedimento que ficou denominado de método de exaustão. Esse método, quando aplicado ao círculo, consiste na inserção de uma sucessão de polígonos regulares no círculo, permitindo que o número de lados dos polígonos cresça indefinidamente. À medida que cresce o número de lados, os polígonos tendem a “exaurir” a região do círculo e suas áreas se aproximam cada vez mais da área exata do círculo.

Matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz desenvolveram e aperfeiçoaram técnicas associadas ao cálculo de áreas através do cálculo diferencial e integral, como será discutido a seguir. Boyer (2012)

Definição 1: uma função $F(x)$ definida no conjunto dos números Reais é denominada de primitiva da função $f(x)$ (ou simplesmente uma primitiva de $f(x)$), se para todo $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. Em outras palavras, F(x) é primitiva de f(x) se a derivada de F(x) que denotamos por F'(x) (lê-se, f linha de x) for igual a função f(x). FLEMMING; GONÇALVES (2006, p. 240).

Exemplo 1: $F(x) = \frac{x^3}{3}$ é uma primitiva da função $f(x) = x^2$, pois $F'(x) = \frac{1}{3}.3x^2 = x^2 = f(x)$.

Exemplo 2: As funções $G(x) = \frac{x^3}{3} + 4$, $H(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5$ também são primitivas da função $f(x) = x^2$, pois $G'(x) = H'(x) = f(x)$.

Dessa forma, encontrar uma primitiva é calcular o processo inverso da derivação, ou seja, encontrar uma antiderivada da função dada. Note nos exemplos 1 e 2 que uma mesma função $f(x)$ admite mais de uma primitiva e a diferença entre duas primitivas é sempre uma constante.

Proposição 1. Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Então, se $c$ é uma constante qualquer que pertence ao conjunto dos números Reais, a função $G(x) = F(x) + c$ é dita família de primitivas da função f(x). Assim, $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x)$ (FLEMMING; GONÇALVES, 2006, p. 241). Dessa forma, conclui-se que se $F(x)$ é uma primitiva particular de $f(x)$, então toda primitiva de $f(x)$ é da forma

$$G(x) = F(x) + c.$$

Com isso, o problema de se determinar primitivas de $f(x)$ se resume a determinar uma função que pertença a família de funções G(x).

Definição 2. Seja $G(x) = F(x) + c$ a família de primitivas da função $f(x)$. A expressão $G(x)$ é chamada de integral indefinida de $f(x)$ e é denotada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Nessa notação, a função $f(x)$ é chamada de função integranda ou, simplesmente, integrando.

### 3.1.1 Propriedades da Integral Indefinida

Sejam $f, g: I \to R$ e $c$ uma constante. Então:

Proposição 2. $\int kf(x)\,dx = k\ \int f(x)\,dx$.

Prova. Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$. Então $k\,F(x)$ é uma primitiva de $kf(x)$, pois $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$ (FLEMMING; GONÇALVES, 2006, p. 242). Dessa forma,

$$\int kf(x)dx = k\,F(x) + c = k\,F(x) + k\,c_1$$

$$= k[F(x) + c_1] = k\int f(x)dx.$$

Proposição 3. $\int\big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \ \int f(x)\,dx + \ \int g(x)\,dx$.

Prova. Sejam $F(x)$ e $G(x)$ funções primitivas de $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente. Então, $F(x) + G(x)$ é uma primitiva da função $(f(x) + g(x))$, pois $[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$ (FLEMMING; GONÇALVES, 2006, p. 242).

Portanto,

$$\int (f(x) + g(x))dx = \ [F(x) + G(x)] + c$$

$$= [F(x) + G(x)] + c_1 + c_2$$

$$= [F(x) + c_1] + [G(x) + c_2]$$

$$= \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Essas duas últimas proposições são válidas para um número qualquer de funções. Combinando-as, pode-se apresentar a proposição a seguir.

Proposição 4. Se $f_{1(x)}, f_{2(x)}, \dots, f_{n(x)}$ são funções reais definidas no mesmo intervalo, então

$$\int[c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x)]dx =$$

$$c_1\int f_1(x)dx + c_2\int f_2(x)dx + \cdots + \ c_nf_n(x)dx,$$

onde $c_1, c_2, \dots, c_n$ são constantes.

Fazendo a correspondência imediata da primitiva de uma função f(x) com a determinação de uma antiderivada dessa função, é possível obter uma tabela de integrais indefinidas imediatas de funções elementares.

**QUADRO 3**. Tabela de integrais indefinidas imediatas de funções elementares.

| Integral indefinida |
|---|
| $\int dx = x + c$ |
| $\int \frac{dx}{x} = ln\|x\| + c$ |
| $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, ($\alpha$ é constante $\neq -1$) |
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + c$ |
| $\int e^x dx = e^x + c$ |
| $\int sen\, x\, dx = -\cos x + c$ |
| $\int \cos x\, dx = sen\, x + c$ |
| $\int sec^2 x\, dx = tgx + c$ |
| $\int cosec^2 x\, dx = -cotgx + c$ |
| $\int \sec x\, tg\, x\, dx = \sec x + c$ |
| $\int cosec\, x\, .\, cotg\, x\, dx = -cosec\, x + c$ |

| |
|---|
| $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\ sen\ x + c$ |
| $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\ tg\ x + c$ |

Fonte: Flemming e Gonçalves (2006, p. 243).

Não se consegue falar em teoria do cálculo de áreas, se não falarmos de integrais indedifnidas e seus desdobramentos.

### 3.2 Algumas Considerações Sobre o Cálculo de Áreas de Regiões Planas

As discussões sobre o cálculo de áreas em regiões do plano é antigo e está presente em muitas aplicações importantes. Para medir a região do plano ocupada por uma figura, compara-se essa figura com a unidade de área. O resultado dessa comparação será um número, que deverá exprimir quantas vezes a figura contém a unidade de área. Convenciona-se tomar como unidade de área um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento.

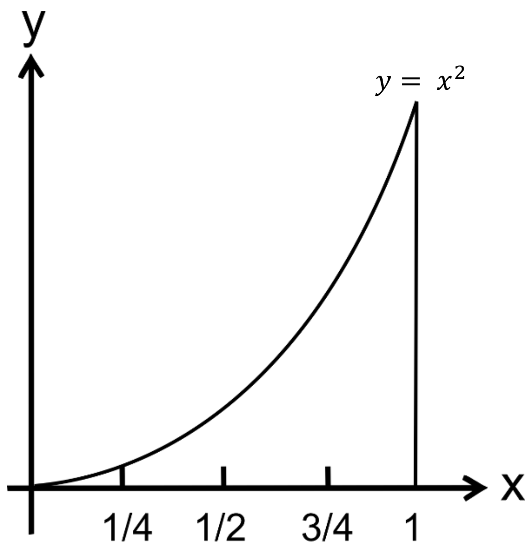
Qualquer quadrado cujo lado meça 1 unidade terá, por definição, área igual a 1. Portanto, a área de uma região plana qualquer, por definição, será um múltiplo da área do quadrado de lado unitário, com A = 1.1 u. $a^2$.

Com base nessa definição, temos no retângulo, o caso mais simples de cálculo de áreas uma vez que as medidas de seus lados (base e altura, lados opostos paralelos) são múltiplos das medidas dos lados do quadrado de área unitária.

Dessa forma, a área de uma região retangular no plano é igual ao produto da sua base pela sua altura. Uma vez conhecida essas definições, não é difícil demonstrar as áreas de outras regiões planas cujos seus limites são definidos por linhas retas, como no caso de triângulos e paralelogramos. O problema se torna mais complexo, porém, quando os limites da região plana são definidos, total ou parcialmente, por linhas curvas quaisquer.

Uma das primeiras soluções conhecidas de um problema desse tipo foi a do matemático grego Arquimedes, que calculou a área sob uma curva parabólica. HIMONAS; HOWARD (2005, p. 228). A curva que aparece na **Fig. 3** é uma parte do gráfico da função $y = x^2$ e o problema é calcular a área entre o gráfico e o eixo $x$, para $0 \leq x \leq 1$.

**Figura 3**. Área sob a parábola y = $x^2$, acima do eixo x, delimitada no intervalo $0 \leq x \leq 1$..

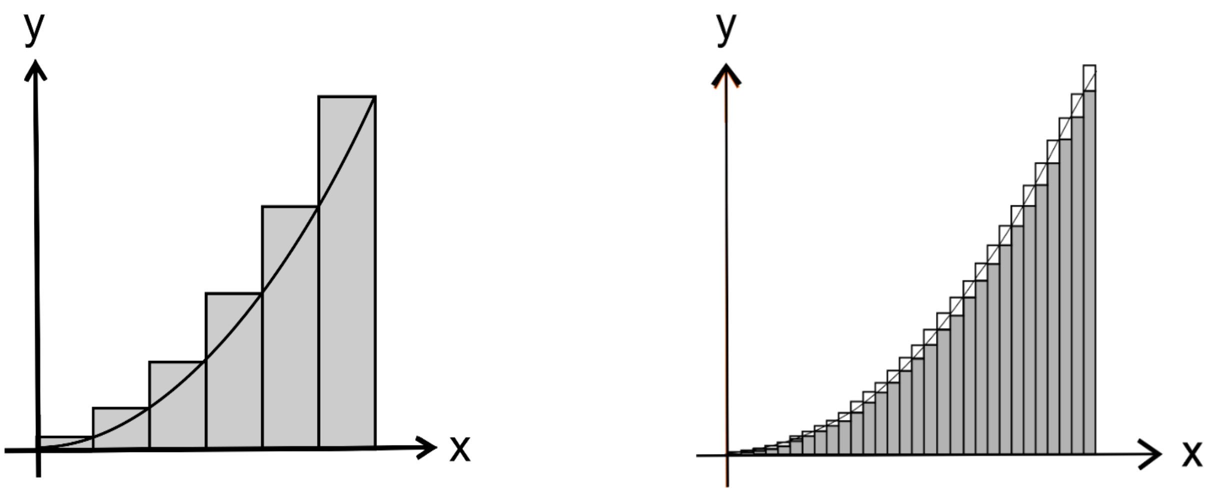



Fonte: Arquivos do autor (2023).

Para calcular a área sob a parábola pelo método de Arquimedes, cobre-se a região sob o gráfico com um conjunto de retângulos adjacentes, todos com a base inferior no eixo $x$. A altura de cada retângulo é tomada como sendo o valor da função para um valor de $x$ correspondente a um dos pontos da base do retângulo. Em outras palavras, escolhe-se a altura de tal forma que o lado superior do retângulo intercepte o gráfico da função. A **Fig. 4(a)** mostra a região coberta por seis retângulos.

O método de Arquimedes envolve duas ideias principais. A primeira é a de que é possível calcular a área aproximada da região abaixo da curva somando as áreas dos retângulos que a compõem. A segunda é a de que podemos tornar a aproximação cada vez melhor usando uma grande quantidade de retângulos (com base cada vez menor); O erro para o valor exato da área se torna menor à medida que fazemos a quantidade de retângulos ser cada vez maior. Himonas (2005).

**Figura 4.** Área da região coberta por 6 retângulos (a) e área coberta por vários retângulos (b).




Fonte: Arquivos do autor (2023).

A **Fig. 4b** mostra a mesma região coberta por muitos retângulos finos. Como se pode ver, estes retângulos representam melhor a região que os da **Fig. 4a**. (A ideia usada para retângulos é a mesma ideia para triângulos. O método funciona para qualquer gráfico do tipo $y = f(x)$ com $a \leq x \leq b$, contanto que a função seja contínua e $y \geq 0$ no intervalo considerado.

Como outro exemplo, pode-se citar a determinação da área do círculo. Para definir sua área, consideremos um polígono regular inscrito de $n$ lados, que denotamos por $P_n$ (**Fig. 5(a)).**

Seja $A_n$ a área do polígono $P_n$. Então $A_n = n.A_{T_n}$, onde $A_{T_n}$ é a área do triângulo de base $l_n$ e altura $h_n$ (**Fig. 5(b)).**

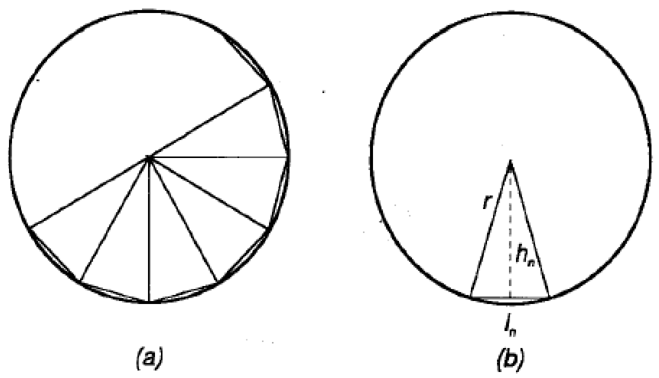
Como $A_{T_n} = \frac{l_n.h_n}{2}$ e o perímetro do polígono $P_n = nl_n$, vem

$$A_n = n.\frac{l_n.h_n}{2} = \frac{P_n.h_n}{2}.$$

Fazendo $n$ crescer cada vez mais, isto é, $n \to +\infty$, o polígono $P$ torna-se uma aproximação do círculo. O perímetro de $P_n$ aproxima-se do comprimento do círculo $2\pi r$ e a altura $h_n$ aproxima-se do raio $r$ do círculo.

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \frac{2\pi r.r}{2} = \pi r^2$, que é a área do círculo.

**Figura 5.** Polígono regular inscrito (a) e triângulo inscrito (b)




Fonte: Flemming; Gonçalves (2006 p. 256).

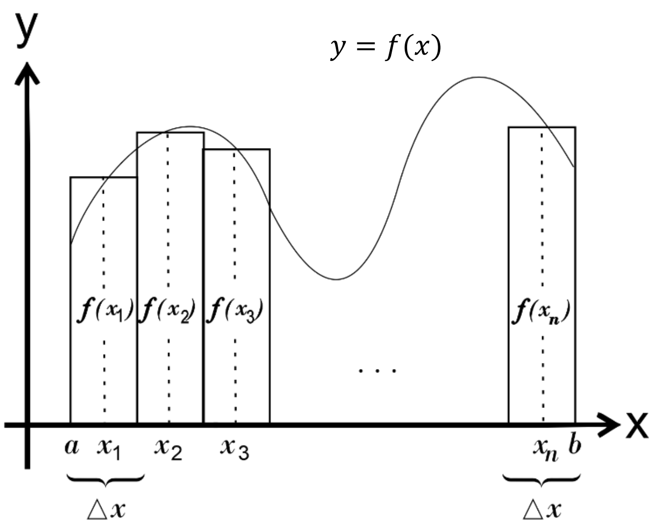
Para definir a área de uma figura plana qualquer, procede-se de forma análoga. Aproxima-se a figura por polígonos cujas áreas possam ser calculadas pelos métodos da geometria elementar.

### 3.3 Soma de Riemann

Considere uma região no plano $xy$ cuja base é um intervalo $[a, b]$ no eixo $x$ que é limitada na parte superior pelo gráfico de uma função contínua $y = f(x)$ tal que $y \geq 0$ para $a \leq x \leq b$. Uma região como essa é ilustrada na **Fig. 6.**

Nesse sentido, Stewart (2006, p. 368) destaca que “para calcular uma área, aproximamos a região por retângulos e fazemos com que o número de retângulos se torne cada vez maior. A área exata será o limite das somas das áreas dos retângulos"

**Figura 6.** Área sob o gráfico da função f(x)**.**




Fonte: Arquivos do autor (2023)

Encontrar a área de uma região S que está sob a curva $y = f(x)$ de a até b, significa que S, está limitada pela gráfico de uma função contínua $f(x)$, $f(x) \geq 0$, as retas verticais $x = a$ e $x = b$ e o eixo x.Esse conceito será discutido a diante.

Uma ideia para o cálculo dessa área será aproximar a região S por retângulos e depois tomarmos o limite das áreas desses retângulos à medida que aumentamos o número de retângulos. O que se pensa intuitivamente como a área de S é aproximada pela soma das áreas desses retângulos. Esta soma é chamada soma de Riemann da função $f(x)$. Para o cálculo da área da região sob o gráfico de $f(x)$ para $a \leq x \leq b$, da **Fig. 6**, usando a soma de Riemann, serão necessários 3 passos.

1.º passo: Cobre-se a região cuja área queremos calcular com $n$ retângulos adjacentes, onde $n$ é um número inteiro positivo. Para isso, dividimos o intervalo $[a, b]$ em $n$ subintervalos de mesma largura. Esta largura é chamada de malha da divisão e representada pelo símbolo $\Delta x$. Temos:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Em seguida, escolhe-se um ponto em cada um destes $n$ subintervalos: um ponto $x_1$ no primeiro subintervalo, um ponto $x_2$ no segundo subintervalo e assim por diante, até um ponto $x_n$ no último subintervalo. Em princípio, pode-se escolher qualquer ponto que pertença ao subintervalo considerado, mas na prática em geral escolhe-se a extremidade esquerda, o ponto médio ou a extremidade direita.

Uma vez escolhido estes pontos, constru-se um retângulo para cada subintervalo, como mostra a **Fig. 6**. Todos os retângulos têm bases de largura $\Delta x$. A altura do primeiro retângulo é $f(x_1)$, a do segundo é $f(x_2)$ e assim por diante até o último retângulo, cuja altura é $f(x_n)$.

2.º passo: Calcula-se a área total dos $n$ retângulos construídos no 1.º passo, da seguinte forma:

Área do primeiro retângulo = $(altura).(base) = f(x_1).\Delta x$

Área do segundo retângulo = $(altura).(base) = f(x_2).\Delta x$...

Área do enésimo retângulo = $(altura).(base) = f(x_n).\Delta x$

Somando os $n$ termos, obtermos a área total ocupada pelos retângulos. Esta soma é conhecida como Soma de Riemann da função $f$ e representada pelo símbolo $S_n(f)$:

$$S_n(f) = f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x + \cdots + f(x_n).\Delta x.$$

3. passo: Calcula-se o limite de $S_n(f)$ quando $n \to \infty$. É possível demonstrar que se a função $f$ é contínua no intervalo $[a, b]$, esse limite sempre existe. Na verdade, $\lim_{n\to\infty} S_n(f)$ pode existir mesmo em alguns casos em que a função possui descontinuidades. Para resumir, temos o seguinte: a área sob o gráfico de uma função $f(x)$ pode ser aproximada com um grau arbitrário de precisão por uma soma de Riemann $S_n(f)$; para aumentar a precisão, basta aumentar o valor de $n$. Fazendo $n \to \infty$, tem-se que a área sob o gráfico de $f(x)$ para $a \leq x \leq b = \lim_{n\to\infty} S_n(f)$. Esses

conceitos são a base para o entendimento da integral definida, a qual não está restrita a funções não negativas.

### 3.4 A Integral Definida e o Teorema Fundamental do Cálculo

Definição 3. A integral definida de uma função $f(x)$ de $a$ a $b$ é definida por:

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}[f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x + \cdots + f(x_n).\Delta x]$, contando que o limite exista. Na notação $\int_a^b f(x)dx$, os números $a$ e $b$ são chamados limites de integração ($a$ = limite inferior e $b$ = limite superior). Sempre que se utiliza um intervalo [a, b], supõe a < b. Assim, em nossa definição não levamos em conta os casos em que o limite inferior e maior que o limite superior. (FLEMMING; GONÇALVES, 2006, p. 265)

As propriedades básicas da integral definida entre outras, as duas primeiras são semelhantes às regras da soma e da multiplicação por uma constante das integrais indefinidas (Seção 3.1.1).

Quando a função $f$ é contínua e não negativa em $[a, b]$, a definição da integral definida coincide com a definição da área sob a curva $y = f(x)$, de $a$ até $b$. Portanto, neste caso, a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ é a área da região sob o gráfico de $f$, de $a$ até $b$.

O Teorema Fundamental do Cálculo nos permite relacionar as operações de derivação e integração. Ele nos diz que, conhecendo uma primitiva de uma função contínua $f: [a, b] \to R$, podemos calcular sua integral definida $\int_a^b f(t)dt$. Com isso, obtemos uma maneira rápida e simples de resolver inúmeros problemas práticos que envolvem o cálculo de integral definida.

Teorema. Se $f$ é contínua sobre $[a, b]$ e se $F$ é uma primitiva de $f$ neste intervalo, então $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

A prova deste teorema se encontra em Flemming e Gonçalves (2006).

Segundo Stewart (2006, p. 393),

> O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral. O cálculo deferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área. O professor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow, descobriu que esses dois problemas estão de fato estreitamente relacionados. Ele percebeu que a diferenciação e a integração são processos inversos. O Teorema Fundamental do Cálculo dá a precisa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático. Em particular, eles viram que o Teorema Fundamental os capacitou a computar as áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas.

Ainda segundo Stewart (2006, p. 393), como a e b são números fixados, então a integral $\int_a^b f(x)dx$ é um número definido. Se $f$ for uma função positiva então $\int_a^b f(x)dx$ pode ser interpretada como uma área sob o gráfico de $f$ de $a$ até $b$.

Sterwart complementa o Teorema:

> O Teorema estabelece que se conhecermos uma antiderivada $F$ de $f$, então poderemos calcular $\int_a^b f(x)dx$ simplesmente subtraindo os valores de F nos extremos do intervalo $[a, b]$. É muito surpreendente que $\int_a^b f(x)dx$, definida por um procedimento complicado envolvendo todos os valores de f(x) para $a \leq x \leq b$, pode ser encontrado sabendo-se os valores $F(x)$ em somente dois pontos, $a$ e $b$. (Stewart, 2006, p. 397)

### 3.5 Cálculo de Áreas Usando Integral Definida

O cálculo de área de figuras planas pode ser feito por integração. Dada a função cujo gráfico é representado pela curva $y = f(x)$. Como calcular a área limitada pela curva, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$? **(Fig. 7)**.

Divide-se igualmente o intervalo de a até b e construindo $n$ retângulos com largura constante que vamos indicá-la por $\Delta x$, onde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, e a altura será calculada em cada ponto da função no lado esquerdo, como mostra a **Fig. 8.**

Note que, chamando

$$a = x_0$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

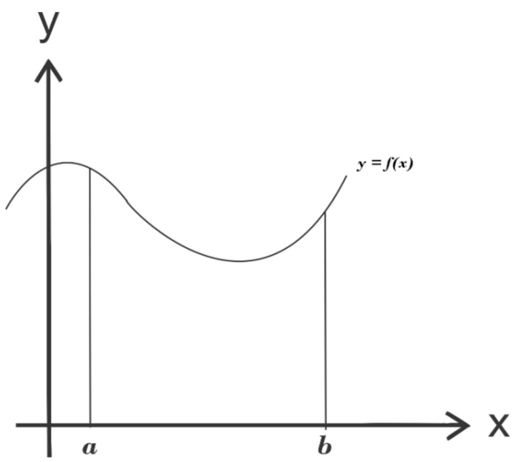
$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

$$\vdots$$

$$b = x_n = x_{n-1} + \Delta x,$$

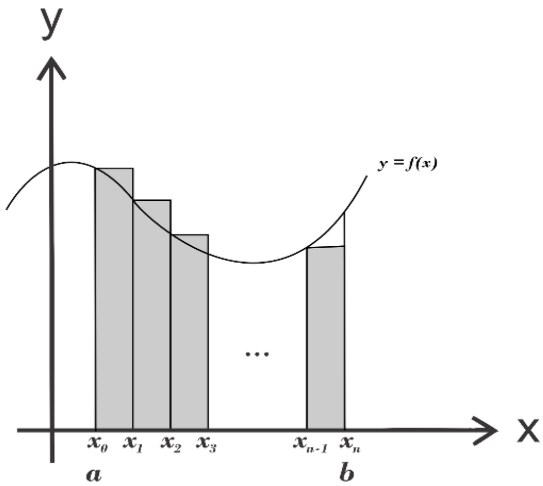
tem-se que a área aproximada sob a curva que representa a função será calculada pela soma dos n retângulos construídos.

**Figura 7**. Curva definida pela função y = f(x).




Fonte: Arquivo do autor (2022)

**Figura 8.** Área coberta por vários retângulos




Fonte: Arquivo do autor (2022).

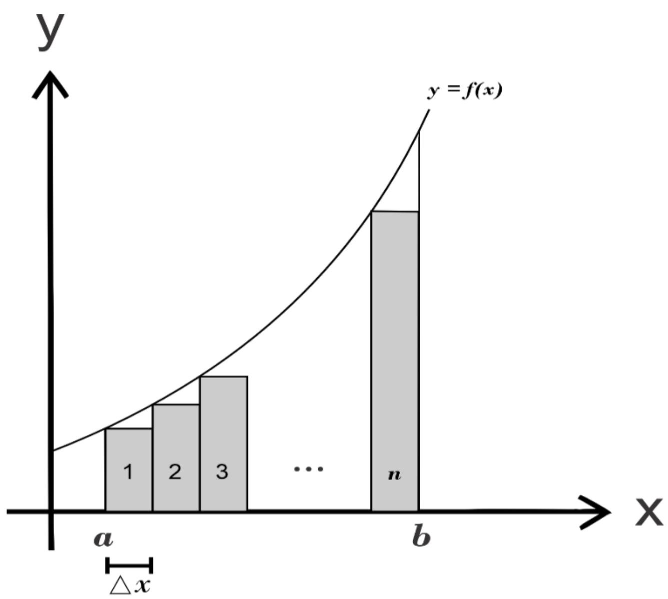
Então, $Área\ aprox. = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$. Usando a notação de somatória, tem-se que

$$\text{Área aprox.} = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x.$$

Essa somatória dá a área aproximada sob a curva que representa uma função para limite à esquerda.

Considere agora a função cujo gráfico é representado pela curva $y = f(x)$ (**Fig. 9**).

**Figura 9.** Área abaixo da curva definida por n retângulos




Fonte: Arquivo do autor (2022).

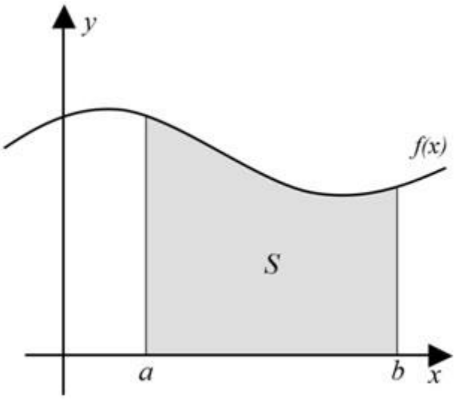
Considere que a área sob a curva limitada pelo eixo x e os pontos $a$ e $b$ pode ser calculada pela sentença.

$$\text{Área} = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

Onde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Esse é um exemplo da soma de Riemann. Nesse caso tem $n$ retângulos e quanto maior for o $n$ melhor será a aproximação com a área sob a curva da função. Então, a sua definição de uma integral que é a área existente abaixo da curva entre os pontos $a$ e $b$ consiste em fazer a soma de Riemann, tomando o limite quando $n$ tende ao infinito. De fato, quando $n$ tende ao infinito, teremos uma "porção" enorme de retângulos e eles vão se tornando cada vez mais aproximações melhores da área real e a área real abaixo da curva é definida como sendo $\int_a^b F(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$, onde $dx$ é o $\Delta x$ infinitamente pequeno. Vejamos algumas situações que comumente ocorrem.

Primeiro caso. Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de $f$, pelas retas $x = a, x = b$ e o eixo dos $x$, onde $f$ é contínua e $f(x) \geq 0, \forall\, x \in [a, b]$. **(Figura 10).**

**Figura 10.** Área de uma região plana S.



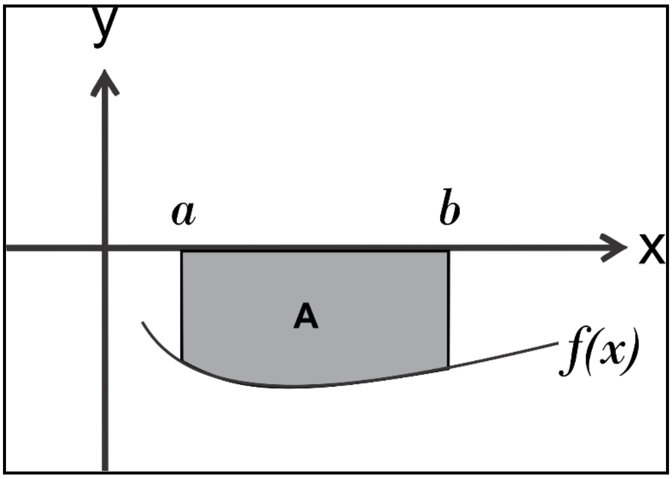

Fonte: Arquivos do autor (2022).

Assim, a área é dada por $A = \int_a^b f(x)dx$.

Segundo caso**.** Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfio de $f$, pelas retas $x = a, x = b$ e o eixo dos $x$, onde $f$ é contínua e $f(x) \leq 0, \forall\, x \in [a, b]$. **(Figura 11)**. Neste caso, tomamos o módulo da integral $\int_a^b f(x)dx$, ou seja, $A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

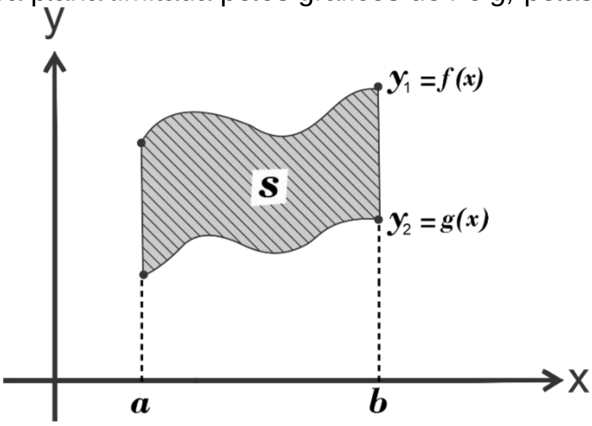
Terceiro caso**.** Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de $f$ e $g$, pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde $f$ e $g$ são funções contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x), \forall\, x \in [a, b]$. Um caso particular onde $f$ e $g$ assumem valores não negativos para todo $x \in [a, b]$ **(Figura 12).**

**Figura 11.** Área de uma região plana A com $f(x) \leq 0$.




Fonte: Arquivos do autor (2023).

**Figura 12.** Área da figura plana limitada pelos gráficos de *f* e *g,* pelas retas *x* = *a* e x = *b.*




Fonte: Arquivos do autor (2023).

Então a área é calculada pela diferença entre a área sob o gráfico de $f$ e a área sob o gráfico de $g$, ou ainda,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx.$$

Para o caso geral, obtemos o mesmo resultado. Basta imaginar o eixo dos $x$ deslocado de tal maneira que as funções se tornem não-negativas, $\forall\, x \in [a, b]$.

Exemplos didáticos da aplicação dessa equação podem ser encontrados em livros de Cálculo Diferencial e Integral de diversos autores (FLEMMING; GONÇALVES, 2006 p. 272; LEITHOLD, 1994, p.355; Himonas; Howard, 2005, p. 247).

## 3.6 Cálculo de Áreas de Regiões Poligonais Conhecidas

A noção de área de regiões poligonais é introduzida na geometria através dos seguintes axiomas:

(i) A toda região poligonal corresponde um número maior do que zero.
O número a que se refere esse axioma é chamado de área da região.

(ii) Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então a sua área é a soma das áreas daquelas regiões.

(iii) Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais (BARBOSA, 1997).

A partir destes axiomas vamos determinar a área de algumas regiões poligonais simples.

### 3.6.1 Área de uma região retangular

Observe que a área da região em detaque na **Fig. 13** é a área da região limitada pelas retas $x = a, x = b,\ y_1 = c$ e $y_2 = d$.

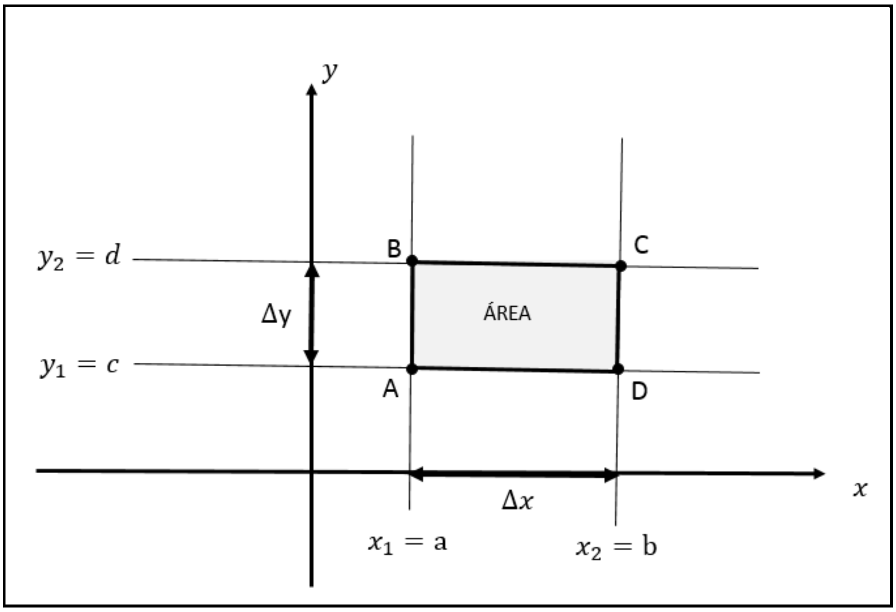
Assim,

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (y_2 - y_1)\, dx$$

$$= \int_{a}^{b} (d - c)\, dx = (d - c)x \Big|_{a}^{b}$$

$$= (d - c).(b - a)$$

**Figura 13**. Região retangular no plano cartesiano.




Fonte: Arquivos do autor (2023).

Chamando $(b - a) = \Delta x$ de base $(B)$ e $(d - c) = \Delta y$ de altura (h), temos que:

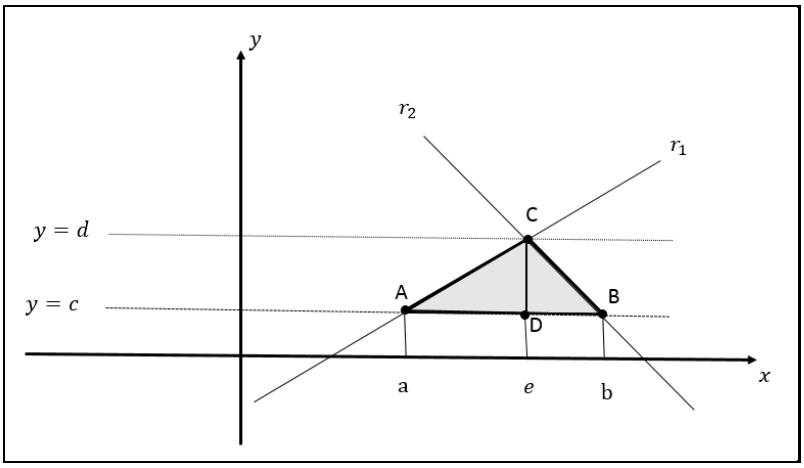
$$A = base\ x\ altura = B.h.$$

Em outras palavras, a área do retângulo é o produto das medidas da sua base e de sua altura.

### 3.6.2 Área de uma região triangular

Observe a região triangular no plano destacada na **Fig. 14**. Note que essa região está delimitada no plano pelas retas $r_1, r_2$ e $y = c$. Por simplificação, escolheu-se a base do triângulo paralela ao eixo $x$ no plano cartesiano (sistema de referência adotado).

**Figura 14**. Região triangular referenciada no plano cartesiano.




Fonte: Arquivo do autor (2022).

A área do triângulo ABC pode ser dada pela soma das áreas dos triângulos ACD e BCD.

Antes de aplicar a integral definida para o cálculo de áreas, se faz necessário a definição de equações das retas $r_1$ e $r_2$ que delimitam a área requerida.

Os pontos $A(a, c)$ e $C(e, d) \in r_1$. Assim, a equação da reta $r_1$ pode ser dada por:

$$(y - c) = \frac{(d-c)}{(e-a)}.(x-a)$$

$$y = \left(\frac{d-c}{e-a}\right)x + \left[c - a\frac{(d-c)}{(e-a)}\right]$$

$$r_1: \ y = \frac{(d-c)}{(e-a)}x + \frac{ce-ad}{(e-a)}.$$

Os pontos $B(b, c)$ e $C(e, d) \in r_2$. Assim, a equação da reta $r_2$ pode ser dada por:

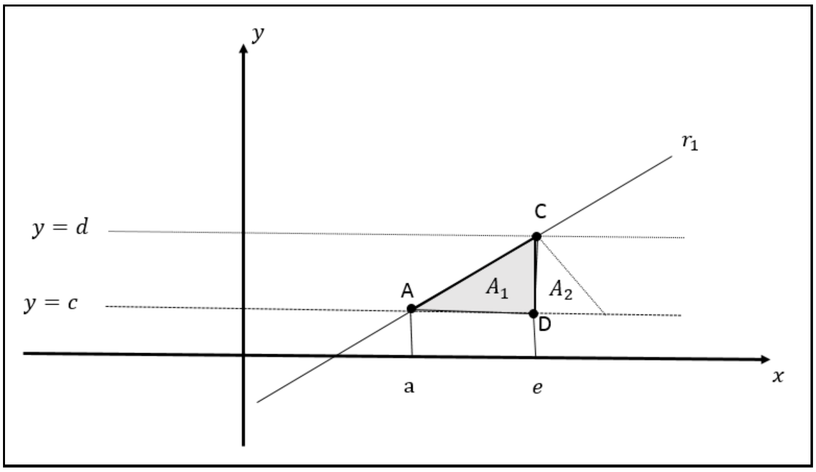
$$(y - c) = \frac{(d-c)}{(e-b)}.(x-b)$$

$$y = \frac{(d-c)}{(e-b)}x + c - b\frac{(d-c)}{(e-b)}$$

$$r_2: \ y = \frac{(d-c)}{(e-b)}x + \frac{ce-bd}{(e-b)}$$

Assim, vamos calcular a área ($A_1$) do triângulo ACD, como mostra a **Fig. 15** abaixo.

**Figura 15**. Área da região triangular A1.




Fonte: Arquivos do autor (2023).

$$A_1 = \int_a^e \left[\frac{d-c}{e-a}x + \frac{ce-ad}{e-a} - c\right] dx$$

$$A_1 = \left[\frac{(d-c)}{(e-a)}\frac{x^2}{2} + \left(\frac{ce-ad}{e-a} - c\right)x\right]\Big|_a^e$$

$$A_1 = \frac{(d-c)}{2(e-a)}\left(e^2-a^2\right) + \left[\frac{(ce-ad)-c(e-a)}{(e-a)}\right].(e-a)$$

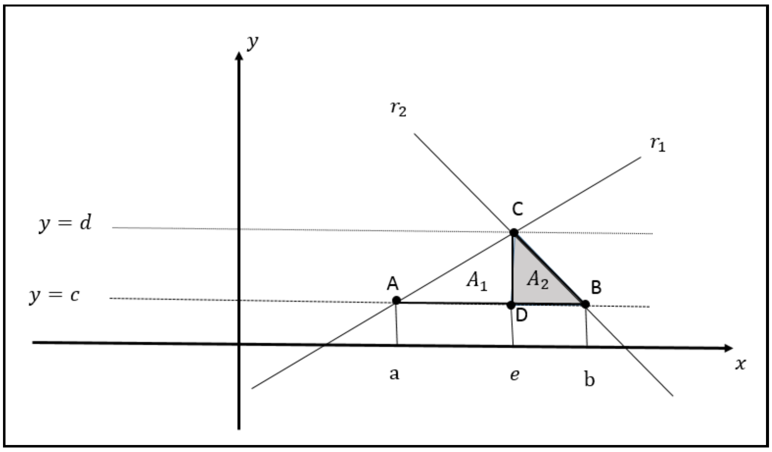
$$A_1 = \frac{(d-c)}{(e-a)}\frac{(e^2-a^2)}{2} + ca - ad$$

$$A_1 = \frac{(d-c)}{(e-a)}\frac{(e-a)(e+a)}{2} - a(d-c)$$

$$A_1 = \frac{(d-c)(e+a)}{2} - a(d-c) = \frac{(d-c)(e-a).}{2}$$

Similarmente, calculamos a área ($A_2$) do triângulo BCD, como mostra a **Fig. 16.**

**Figura 16**. Área da região triangular A2.




Fonte: Arquivos do autor (2023).

$$A_2 = \int_e^b \left[\frac{(d-c)}{(e-b)}\,x + \frac{ce-bd}{(e-b)} - c\right] dx$$

$$A_2 = \left\{\frac{(d-c)}{(e-b)}\,\frac{x^2}{2} + \left[\frac{ce-bd}{(e-b)} - c\right] x\right\}\Big|_e^b$$

$$A_2 = \frac{(d-c)}{(e-b)}.\frac{(b^2-e^2)}{2} + \left[\frac{ce-bd-c(e-b)}{(e-b)}\right].(b-e)$$

$$A_2 = \frac{(d-c)}{-(b-e)}\,\frac{(b-e)(b+e)}{2} + \frac{(ce-bd-ce+bc)}{-(b-e)}\,.(b-e)$$

$$A_2 = \frac{-(d-c)(b+e)}{2} - b(-d+c)$$

$$A_2 = \frac{-(b+e)(d-c)+2b(d-c)}{2}$$

$$A_2 = \frac{(d-c)(-b-e+2b)}{2}$$

$$A_2 = \frac{(d-c)(b-e)}{2}$$

Tem ainda que, a área ($A$) do triângulo ABC é igual a soma das áreas dos triângulos ACD e BCD, ou seja $A = A_1 + A_2$.

Então,

$$A = A_1 + A_2 = \frac{(d-c)(e-a)}{2} + \frac{(d-c)(b-e)}{2}$$

$$A_1 + A_2 = \frac{(d-c)[(e-a)+(b-e)]}{2}$$

Chamando $(d-c)$ de altura $(h)$ e $((e-a)+(b-e)$ de base $(B)$, temos que

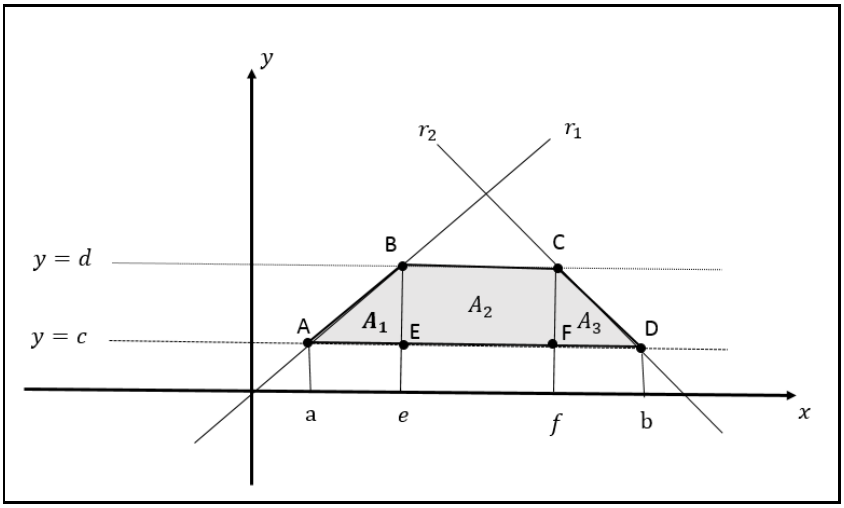
$$A = \frac{B.h}{2}.$$

Isso significa dizer que a área de um triângulo é dada pela metade do produto do comprimento de um de seus lados (definido como base) pela altura relativa a essa base. Essa demonstração pode ser verificada para os outros lados do triângulo como base, de forma análoga.

### 3.6.3 Área de um trapézio

Para o cálculo da área do trapézio, por simplificação, considere que as bases maior e menor estejam paralelas ao eixo $x$ no plano cartesiano (**Fig.17**). Considere também que essa área pode ser dividida nas áreas $A_1, A_2$ e $A_3$ (Área total = $A_1 + A_2 + A_3$).

**Figura 17**. Área da região trapezoidal.



Fonte: Arquivos do autor (2023).

Sabendo-se que essas subáreas são representadas por retângulos e triângulos, aplica-se os resultados obtidos anteriormente para se calcular a área do trapézio ABCD:

$$A_1 = \frac{(e-a).(d-c)}{2}$$

$$A_2 = (f-e).(d-c)$$

$$A_3 = \frac{(b-f).(d-c)}{2}$$

Assim,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{(e-a).(d-c) + (b-f).(d-c) + 2(b-f).(d-c)}{2}$$

$$A = \frac{(d-c)[(e-a) + (f-e) + (b-f) + (f-e)]}{2}$$

$$A = \frac{(d-c)[(b-a) + (f-e)]}{2}$$

Sabendo que $(b-a)$ é a medida da base maior $(B)$; $(f-e)$ é a medida da base menor $(b)$ do trapézio; e $(d-c)$ é a altura $(h)$ desse trapézio, então:

$$A = \frac{(B+b).h}{2}$$

Mostra-se assim, que a área do trapézio é a metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos das bases paralelas que o delimitam.

A área de outras regiões planas conhecidas como as de losangos e de outros polígonos regulares tais como pentágonos, hexágonos, etc, podem ser calculadas usando-se somas de áreas de triângulos, retângulos e/ou trapézios. Essa ideia é também a base para o cálculo de áreas de regiões planas irregulares (sem um formato usual) usando técnicas de integração numérica.

### 3.7 Conceitos Básicos de Integração Numérica para o Cálculo de Áreas

O conceito de integral está ligado ao problema de determinar a área de uma figura plana qualquer. A área de uma figura plana qualquer pode ser aproximada à soma de áreas de polígonos cujas áreas podem ser calculadas pelos métodos de Geometria Elementar (HIMONAS, 2005).

A operação analítica da integral definida, a partir Teorema Fundamental do Cálculo, exige inicialmente que se conheça a expressão matemática da função f(x) que representa o integrando e que f(x) tenha uma primitiva possível. Em muitas aplicações práticas, existem dois obstáculos para esta linha de ação.

Em primeiro lugar, a função pode ser conhecida indiretamente apenas através de uma tabela de dados, ou seja, por seus valores discretos (número limitado de pontos), e não por uma expressão matemática que defina um caminho contínuo no intervalo estudado. Em segundo lugar, mesmo que a expressão matemática da função seja conhecida, nem sempre é possível determinar uma primitiva para essa função.

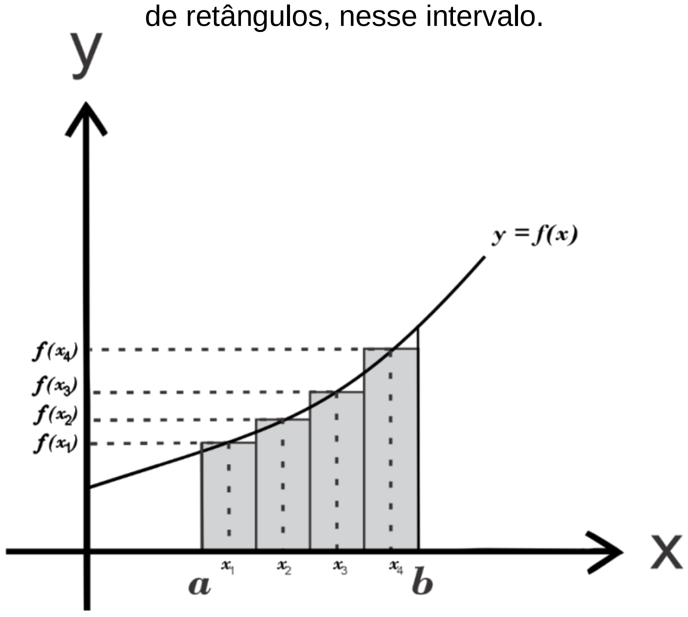
Nesses casos, a integral definida (e, consequentemente, a área de uma região plana relacionada) pode ser calculada de forma aproximada, usando alguns métodos numéricos de integração já bem conhecidos na literatura, tais como a Regra do Ponto Médio e a Regra dos Trapézios.

#### 3.7.1 Regra do Ponto Médio

Seja a função cujo gráfico é representado pela curva $y = f(x)$ e considere o intervalo [a, b] abaixo dessa curva **(Fig. 18)**.

Note que a área da região plana sob a curva f(x) e o eixo x em [a, b] pode ser aproximada pela soma de áreas de retângulos que contemplem essa região, no intervalo dado.

**Figura 18.** Área da região sob a curva f(x) no intervalo [a, b] aproximada pela soma de área de retângulos, nesse intervalo.




Fonte: Arquivos do autor (2023)

Para executar essa ação, deve-se seguir os seguintes passos:

1.º passo – escolher um número inteiro positivo n e dividir o intervalo [a, b] em n subintervalos iguais de largura $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Como exemplo, cita-se n=4.

2.º passo – chamar de $x_i$ o ponto médio do i-ésimo subintervalo. Nesse caso, os pontos médios serão dados por $x_1$, $x_{2,}$ $x_3$ e $x_4$.

3.º passo – Calcular as alturas dos retângulos como as imagens dos pontos médios de cada subintervalo ($f(x_1), f(x_2)$, $f(x_3)$ e $f(x_4)$.) que define as bases desses retângulos,

4.º passo – Usar a aproximação

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x f(x_1) + \Delta x f(x_2) + \Delta x f(x_3) + \Delta x f(x_4)$$

Ou ainda,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)]$$

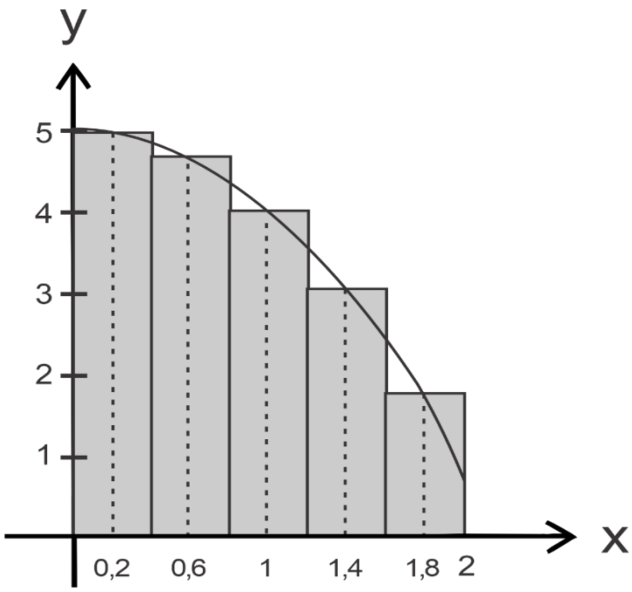
Generalizando a regra, para n retângulos, vem

$$\int_a^b f(x)dx = \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$$

Exemplo

Use retângulos para aproximar a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = -x^2 + 5$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 2$.

**Figura 19.** Área sob a curva $y = -x^2 + 5$ no intervalo [0,2]




Fonte: Arquivo do autor (2022).

Fazendo n = 5, ou seja, dividindo o intervalo em 5 retângulos e determinando o valor de cada subintervalo, vem

$$\Delta x = \frac{2-0}{5} = 0{,}4$$

Os pontos médios dos subintervalos serão $0{,}2;\ 0{,}6;\ 1{,}0;\ 1{,}4$ e $1{,}8$. **(Fig. 19)**

As imagens desses pontos médios calculadas na função serão $f(0{,}2) = 4{,}96;\ f(0{,}6) = 4{,}64;\ f(1{,}0) = 4;\ f(1{,}4) = 3{,}04\ e\ f(1{,}8) = 1{,}76$.

$$\int_0^2 (-x^2+5)dx \approx 0{,}4[f(0{,}2) + \ f(0{,}6) + f(1{,}0) + f(1{,}4) + f(1{,}8)$$

$$\approx 0{,}4[4{,}96 + 4{,}64 + 4 + 3{,}04 + 1{,}76]$$

$$\approx 0{,}4.18{,}4 = 7{,}36$$

Agora, tome n = 8. Nesse caso, $\Delta x = \frac{2-0}{8} = 0{,}25$.

Determinando os pontos médios dos subintervalos com suas respetivas imagens, tem-se:

$f(0{,}125) = 4,984;\ f(0{,}375) = 4{,}859;\ f(0{,}625) = 4{,}609;\ f(0{,}875) = 4{,}234;\ f(1{,}125) = 3{,}734;\ f(0{,}375) = 3{,}109;\ f(1{,}625) = 2{,}359\ e\ f(1{,}875) = 1{,}484.$

Então,

$$\int_0^2 (-x^2+5)dx \approx 0{,}25[\ f(0{,}125) + f(0{,}375) + \cdots + f(1{,}875)$$

$$\approx 0{,}25[4{,}984\ + 4{,}859 + 4{,}609 + 4{,}234 + 3{,}734 + 3{,}109 + 2{,}359 + 1{,}484]$$

$$\approx 0{,}25.\,29{,}375 = 7{,}344$$

Para a região do exemplo, pode-se determinar a área exata com uma integral definida.

$$Área = \int_0^2 (-x^2+5)dx = \left(\frac{-x^3}{3} + 5x\right)\Big|_0^2$$

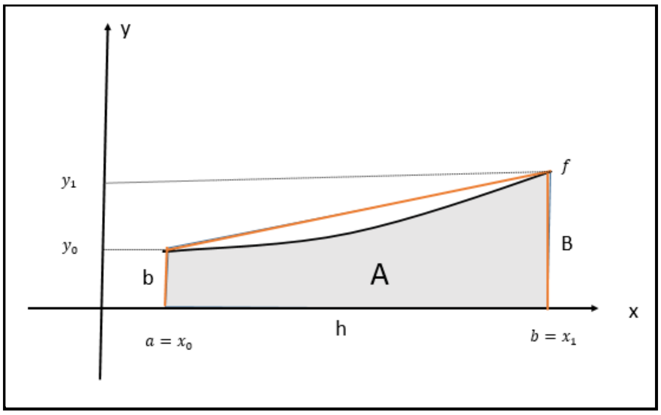
$$= \left(\frac{-2^3}{3} + 5.2\right) - \left(\frac{-0^3}{3} + 5.0\right) = \frac{-8}{3} + 10 = \frac{22}{3} = 7{,}333$$

Comparando os resultados com a regra numérica e por integral definida, percebe-se que os erros estarão cada vez menores (erro tende a zero) à medida que o $n$ aumenta.

### 3.7.2 Regra do Trapézio

A área limitada pela curva $y = f(x)$ **(Fig. 20**) e o eixo $Ox$ é dada pela $\int_a^b f(x)dx \;\cong\; \int_{x_0}^{x_1} P(x)\, dx$.

**Figura 20.** Área limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$




Fonte: Arquivo do autor (2022)

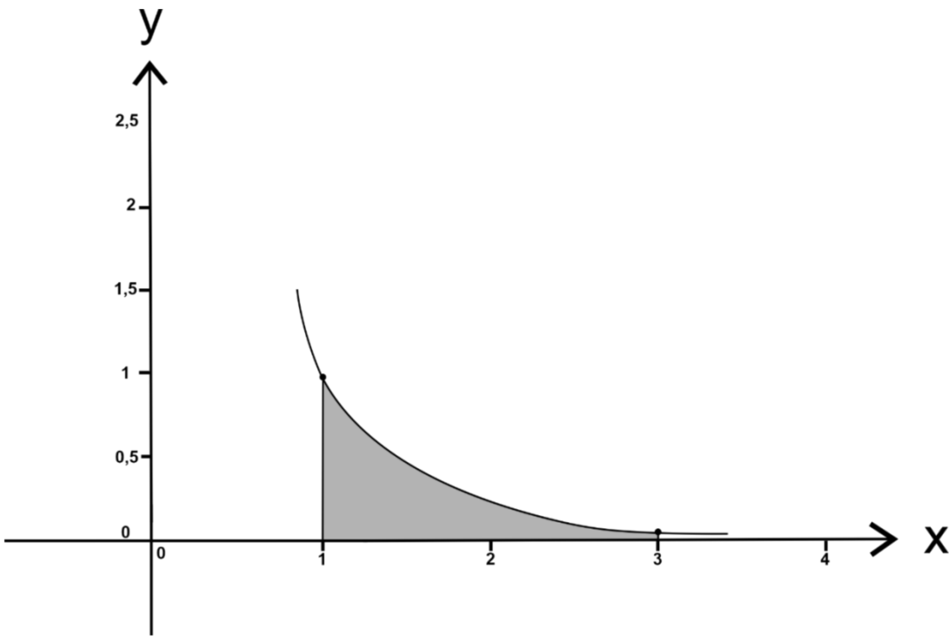
A área do trapézio é dada por $A_T = (B + b).\frac{h}{2} = (y_1 + y_0).\frac{h}{2}$, onde $h = x_1 - x_0$.

Exemplo 1. Calcule a área da região limitada pela curva $y = \frac{1}{x^3}$ e o eixo dos x no intervalo de 1 a 3 (**Fig. 21**).

A primitiva de $\frac{1}{x^3}$ é $\frac{-1}{2x^2}$, então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, vem que $\int_1^3 \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{-1}{2.(3)^2} - \frac{-1}{2(1)^2} = 0{,}4444$ ...

Calculando a área de forma aproximada, pela regra dos trapézios, com n = 2, n = 4, n = 6 e n = 8, e tabelando tem-se os seguintes resultados das áreas encontradas e dos respectivos valores dos erros em percentagem. (**QUADRO 4**).

**Figura 21.** Área da região limita pela curva $y = 1/x^3$ no intervalo [1, 3]




Fonte: Arquivo do autor (2022)

**QUADRO 4**. Valores das áreas e dos erros das áreas sob a curva $1/x^3$

| **Nº subintervalos** | **Valor da área** | **Erro(%)** |
|---|---|---|
| 2 | 0,6435 | 44,80 |
| 4 | 0,5019 | 12,94 |
| 6 | 0,4710 | 5,98 |
| 8 | 0,4595 | 3,39 |

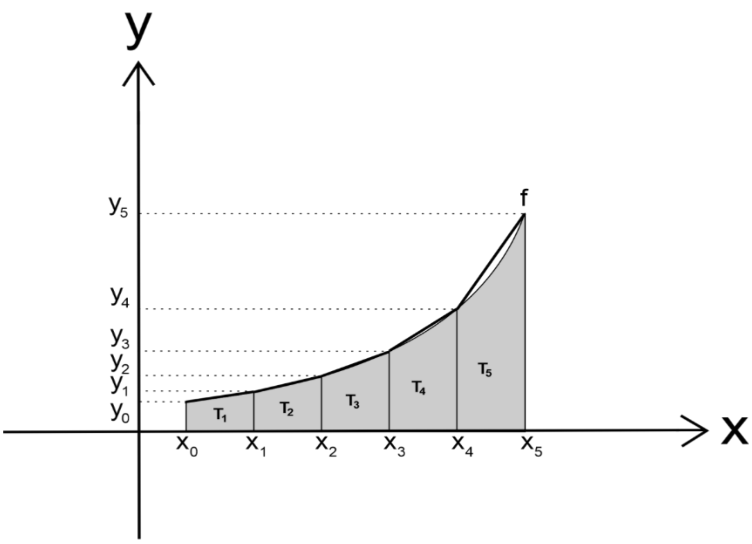
Fonte: Arquivo do autor (2023)

Através do **QUADRO 4**, nota-se que o erro diminui consiravelmente a medida que o número de subintervalos aumenta.

A seguir, o detalhamento da fórmula para o cálculo da área sob a curva f(x) pela regra dos trapézios, para n = 5 e no exemplo 2, o cálculo da área pela regra dos trapézios para n = 4.

Então, dividindo o intervalo $[a, b]$ em n = 5 subintervalos iguais **(Fig. 22)**, pode-se aplicar a regra repetidamente em cada um desses subintervalos.

**Figura 22.** Área da região definida por 5 trapézios.




Fonte: Arquivo do autor (2022).

Sendo $h$ fixo ↔ subintervalos iguais. Então,

$$A_T = (y_0 + y_1).\frac{h}{2} + (y_1 + y_2).\frac{h}{2} + (y_2 + y_3).\frac{h}{2} + (y_3 + y_4).\frac{h}{2} + (y_4 + y_5).\frac{h}{2}$$

Organizando a expressão, temos $A_T = \frac{h}{2}.[y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + y_5]$.

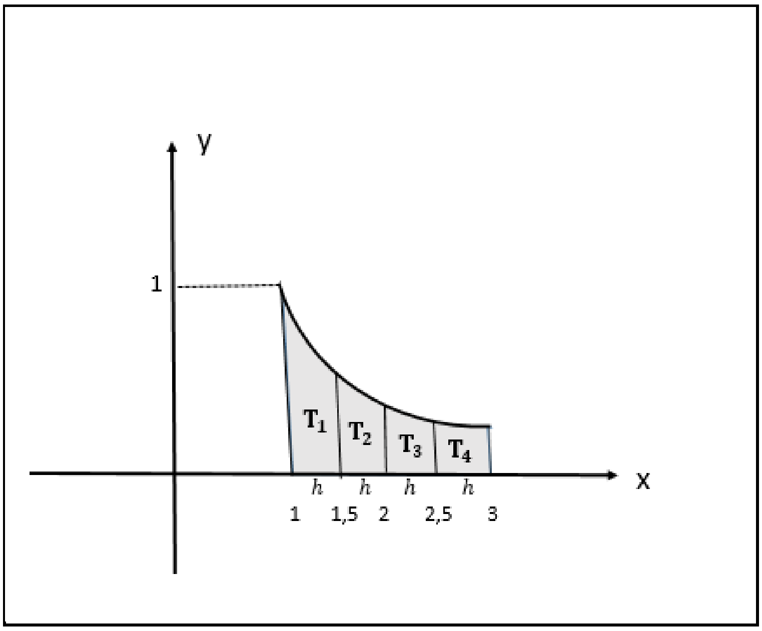
Ou ainda, generalizando, $A_T = \frac{h}{2}.[y_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} yi + y_n]$.

Exemplo 2. Encontre a área limitada pela curva $y = \frac{1}{x}$ e o eixo dos x no intervalo de 1 a 3 **(Fig.23)**. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a área exata é

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln(3) - \ln(1) \cong 1{,}0986.$$

Para $n = 4$ subintervalos, vem que $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = 0{,}5$

**Figura 23.** Área limitada pela curva y+1/x em [1,3].




Fonte: Arquivo do autor (2022)

$$S = \frac{h}{2} . \left[ y_0 + 2 \sum_{i=1}^{3} yi + y_n \right]$$

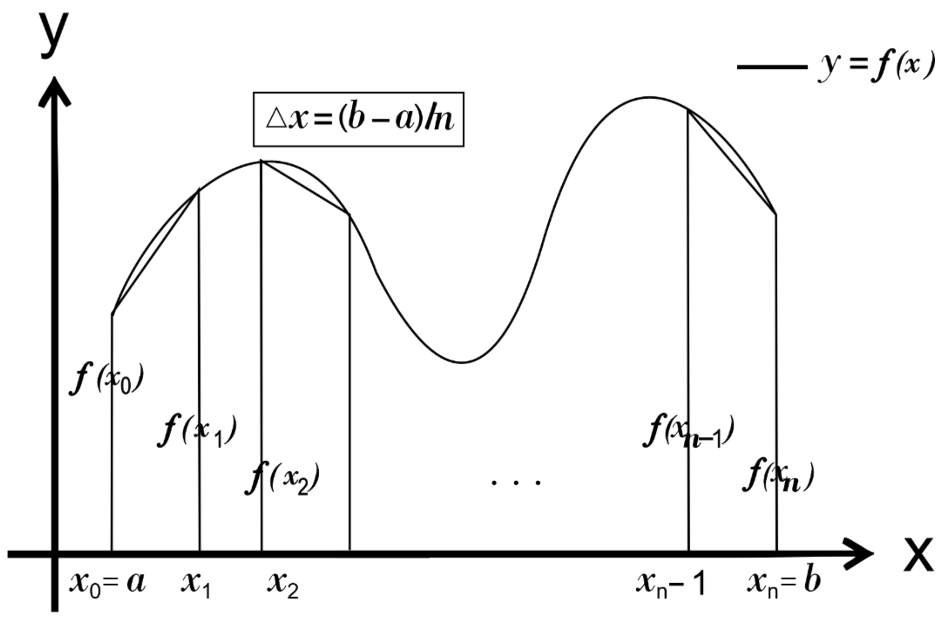
$$S = \frac{0,5}{2} [1 + 2(0,6666 + 0,5 + 0,4) + 0,3333]$$

$$S \cong 1,1166.$$

O valor calculado retorna uma diferença de $0,018$ para o valor exato da área, o que equivale a 1,64% de erro na medição. Para diminuir consideravelmente esse erro, basta dividir o intervalo [a, b] em $n$ subintervalos, com um $n$ bem maior.

De um modo geral, a Regra dos Trapézios se define calculando a soma das áreas dos trapézios definidos **(Fig. 24)** em cada subintervalo, sob a curva f(x), no intervalo [a, b] de interesse.

**Figura 24.** Generalização da Regra dos Trapézios.




Fonte: Arquivo do autor (2022).

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].\frac{\Delta x}{2}$$

É importante destacar que a análise numérica do cálculo de áreas envolve outros conceitos importantes como, por exemplo, a estimação do erro de medição, que não serão tratados aqui em detalhes pelo fato de usarmos apenas as ideias de soma de áreas de polígonos conhecidos para dar uma estimativa do cálculo da área de uma região plana de interesse, para fins didáticos em sala de aula, no Ensino Básico.

# 4. PRODUTO EDUCACIONAL: SEQUÊNCIA DIDÁTICA: CÁLCULO DE ÁREAS DE REGIÕES PLANAS IRREGULARES

## 4.1 Apresentação

O presente documento descreve uma proposta de atividades destinada a professores de Matemática do segundo ano do Ensino Médio. Tem a intenção de formecer um material de apoio ao professor para diversificação de suas aulas, proponto uma atividade experimental com o cálculo de áreas de regiões planas irregulares através dos métodos numéricos, regra do ponto médio e regra dos trapézios.

Como professor da rede públida, da educação básica há vários anos, venho percebendo o desinteresse de grande parte dos alunos nos conteúdos de matemática. Muitos, inclusive, mostrando certo medo a cerca da disciplina de matemática, pois associam essa disciplina com outras afins, ministradas por professores anteriores que muitas vezes não eram da área e mesmo assim as lecionavam ou que, mesmo sendo, apresentavam aulas muito tradicionais e não despertavam interesse algum nesse tipo de aula. Então me perguntava: Porque a Matemática causa tanto desinteresse em alguns alunos se ela tem tantas alternativas? Percebi então que o desinteresse desses alunos pode estar relacionado com as aulas tradicionais, com o uso apenas do quadro (lousa) e do giz (pincel) onde o aluno é um mero expectador do professor. Existem muitos meios para atrair a atenção do aluno, para praticar uma aula diferente. O tema abordado nesse trabalho foi o cálculo de áreas de regiões planas irregulares, muito pouco trabalhado em sala de aula. Esse tema foi escolhido devido ao grande número de conceitos que envolvem o conteúdo e pelo fato de que os livros didáticos na sua maioria, não trazem o conteúdo de forma explícita. Os livros didáticos trazem apenas cálculo de áreas de figuras regulares onde há uma fórmula pré-determinada para o cálculo. Além disso, a abordagem da proposta encontra-se de acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, para o ensino da Matemática do Ensino Médio como mostra o (**Quadro 2)**.

A motivação pela escolha da turma do segundo ano do Ensino Médio se deu pelo fato de que os alunos já estudaram o conteúdo abordado, cálculo de áreas de figuras planas (**Quadro 1**), o que facilitará a compreensão para o cálculo de áreas de regiões planas irregulares.

O objetivo da proposta é calcular área de regiões planas irregulares reais do município de Belém do São Francisco – PE (e/ou de outras regiões). Para tal, os alunos irão utilizar instrumentos de desenho, como régua e/ou esquadro, podem usar também a calculadora, e ainda uma planilha eletrônica como o Microsoft Excel para a organização dos cálculos.

Aproveitando o conhecimento adquirido nas séries anteriores, espera-se que os alunos não tenham grandes dificuldades para realizar a tarefa proposta. A tarefa será calcular a área de regiões planas irregulares utilizando métodos numéricos, como a regra do ponto médio e a regra dos trapézios.

A seguir, tem-se a proposta do produto educacional; nela, consta o cronograma das atividades desenvolvidas no decorrer dos três encontros propostos, bem como a estruturação de cada um deles.

## 4.2 Sequência de Atividades

Este produto educacional se constitui em uma sequência de atividades direcionada a professores da disciplina de Matemática do segundo ano do Ensino Médio, com o intuito de mobilizar o conhecimento de cálculo de áreas de regiões planas irregulares. Para alcançar esse propósito, segue algumas atividades, utilizando situações concretos do município de Belém do São Francisco – PE e outras localidades. Uma síntese das informações gerais da proposta é apresentada no **Quadro 5**.

**QUADRO 5**. Informações gerais sobre o tema da sequência didática.

| Cálculo de áreas de figuras planas irregulares | |
|---|---|
| Temática | Cálculo de áreas |
| Público-alvo | Estudantes do 2º ano do Ensino Médio |
| Duração | 3 momentos de 50 minutos cada |
| Objetivo | Calcular a área de regiões planas irregulares |
| Habilidade da BNCC | (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes, etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. |

Fonte: Arquivos do autor (2023).

A sequência de atividades é composta por 3 momentos com 50 minutos de duração cada um. O **Quadro 6** dispõe um resumo das atividades a serem executadas nos 3 encontros.

**QUADRO 6**. Síntese de aplicação da sequência de atividades

| Momento | Síntese das ações |
|---|---|
| 1º | Parte 1 - Apresentação da proposta e motivação<br>Parte 2 – Apresentação dos métodos<br>Parte 3 – Revisão e separação dos pequenos grupos de alunos para realização das atividades propostas. |
| 2º | Resolução de atividades relacionadas ao cálculo de áreas aproximadas de regiões planas irregulares pelo método do ponto médio e pelo método do trapézio. |
| 3º | Socialização (Avaliação). |

Fonte: Arquivos do autor (2023).

A seguir, serão dados os detalhes de cada um dos encontros, inclusive com orientações ao professor que queira aplicar ou adaptar essa sequência com suas turmas.

**I Momento**

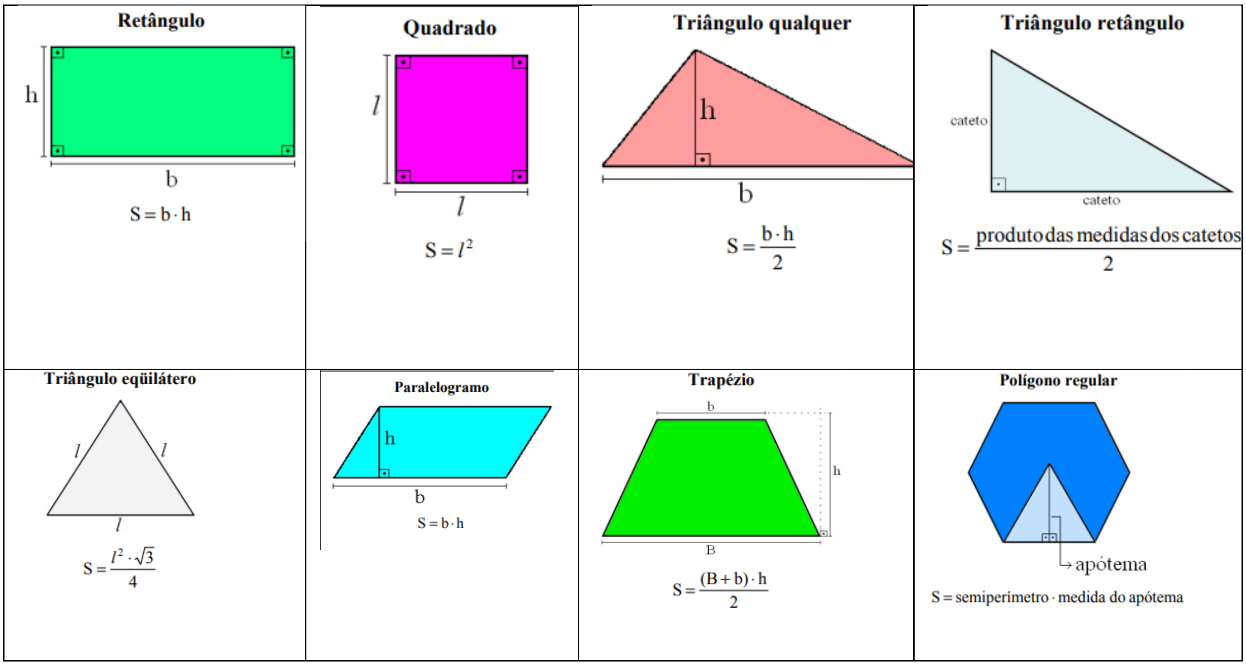
Apresentação da proposta e motivação

A proposta é uma atividade experimental, que propõe calcular áreas de regiões planas irregulares localizadas ou não no município de Belém do São Francisco – PE, utilizando conhecimentos adquiridos pelos alunos, utilizando os métodos numéricos como a regra do ponto médio e regra do trapézio.

A apresentação pode ser realizada em sala de aula, com o auxílio de projetor multimídia e lousa. Sugere-se que nessa parte do Encontro 1, o professor/mediador possa fazer uma revisão de conceitos e de fórmulas relativas ao cálculo de áreas de regiões planas conhecidas. Como por exemplo:

CÁLCULO DA ÁREA DE ALGUMAS FIGURAS PLANAS

**Figura 25**. Fórmulas da área de algumas figuras geométricas planas




Fonte: https://alexfisica.files.wordpress.com/2011/12/geometria-area.pdf

Em seguida, é indicado que alguns problemas usuais/conhecidos (aplicados ou não) sejam solucionados analiticamente na lousa, com a participação dos alunos. Na sequência, sugere-se que o professor apresente aos alunos algumas regiões planas irregulares reais (de preferência, locais). É preferível que essas regiões sejam de interesse para a discussão de outros aspectos. Por exemplo, o conhecimento da área de um município é importante para que se possa determinar a densidade demográfica do local (n° de habitantes/área do município); a determinação da área da seção de um rio, em determinado local que se deseja construir uma ponte, é necessária para que se possa calcular a vazão de água naquele local e, assim, projetar uma estrutura que suporte àqueles esforços relativos à dinâmica da água.

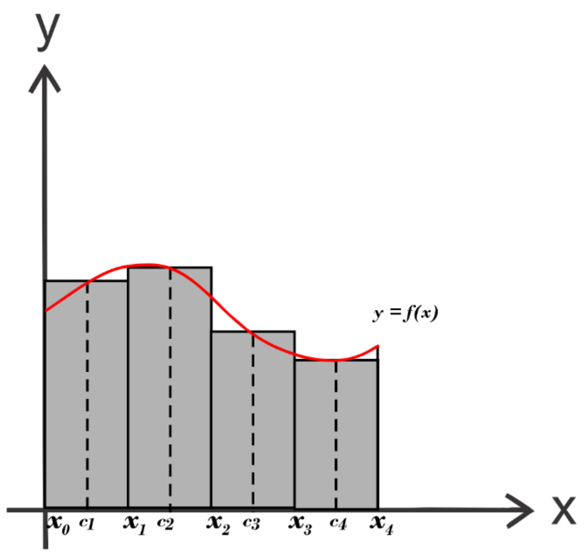
Após a motivação inicial, pode-se perguntar aos alunos como eles poderiam solucionar esses problemas de áreas (que são necessários à solução de problemas reais) se elas não representam uma região regular com área calculada pelas fórmulas aprendidas anteriormente na escola? Será que os conhecimentos adquiridos sobre o tema não servirão para solucionar problemas na prática? O estudo de áreas de regiões planas visto na escola não é significativo?

O professor deve enfatizar aos alunos que, na prática, existem casos como os que foram apresentados, em que não há uma lei de formação específica para o cálculo da área e, assim, estimulá-los a propor soluções para esses problemas. Após ouvir e discutir possíveis sugestões, o mediador deve continuar a apresentação informando que existem outros métodos para o cálculo da área dessas regiões irregulares, de fácil entendimento e que são baseados nas fórmulas conhecidas.

Apresentação dos métodos

A regra do ponto médio, vai requerer do aluno apenas o conhecimento do cálculo da área do retângulo, que é o produto da sua base pela sua altura (**figura 26)**.

**Figura 26.** Área definida por retângulos




Fonte: Arquivos do autor (2022).

Para a regra do ponto médio, o cálculo da área aproximada de uma região plana irregular pode ser estimada pela soma das áreas de retângulos que a compõem, como ilustrado **(fig. 27(b))** a seguir. Para tal, nesse exemplo, segue o passo a passo (**Quadro 7**).

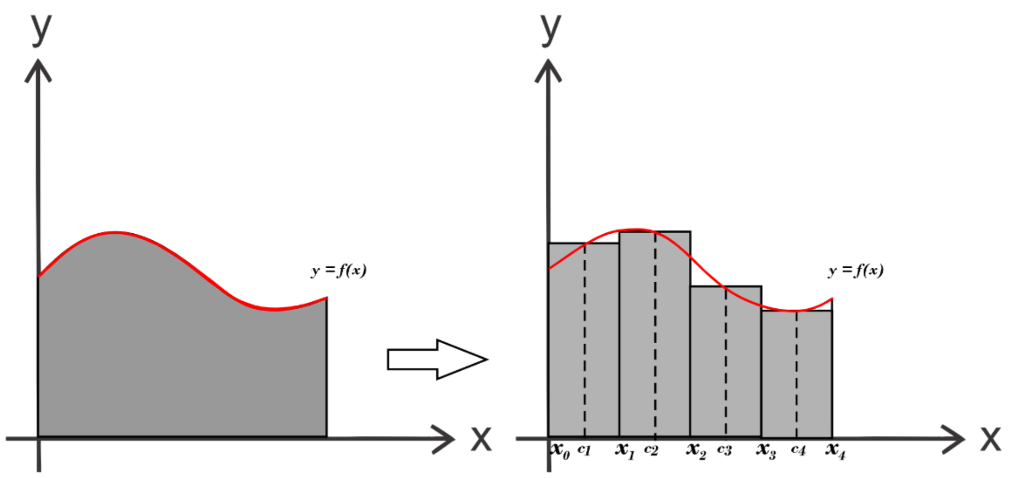
**QUADRO 7**. Passo a passo para a regra do ponto médio

| | |
|---|---|
| 1º) | divide-se o intervalo de $x_0$ até $x_4$ em 4 partes iguais, $\overline{x_0x_1}$, $\overline{x_1x_2}$ , $\overline{x_2x_3}$ e $\overline{x_3x_4}$ (subintervalos), determinando o valor de cada subintervalo; |
| 2º) | toma o ponto médio de cada subintervalo, $c_1$, $c_2$, $c_3$ e $c_4$; |
| 3º) | dada a função f(x), estime os valores de $f(c_1)$, $f(c_2)$, $f(c_3)$ e $f(c_4)$ (as imagens dos pontos médio de casa subintervalo); |
| 4º) | demarca sobre a figura os 4 retângulos possíveis que podem ser formados, com bases $\overline{x_0x_1}$, $\overline{x_1x_2}$ , $\overline{x_2x_3}$ e $\overline{x_3x_4}$ e alturas $f(c_1)$, $f(c_2)$, $f(c_3)$ e $f(c_4)$; |
| 5º) | calcula de forma aproximada a área irregular no plano delimitado por f(x) |

| | |
|---|---|
| | e $x_0$ a $x_4$ através da soma das áreas dos 4 retângulos formados. |

Fonte: Arquivos do autor (2023).

**Figura 27**. Área sob a curva f(x) (a) e área formada por 4 retângulos (b)




Fonte: Arquivo do autor (2023)

A área da região plana destacada cinza pode ser estimada pela soma das áreas dos quatro retângulos que compõem aproximadamente esta área.

Para a regra do trapézio

Segue o passo a passo para a utilização da regra dos trapézios (**Quadro 8**)

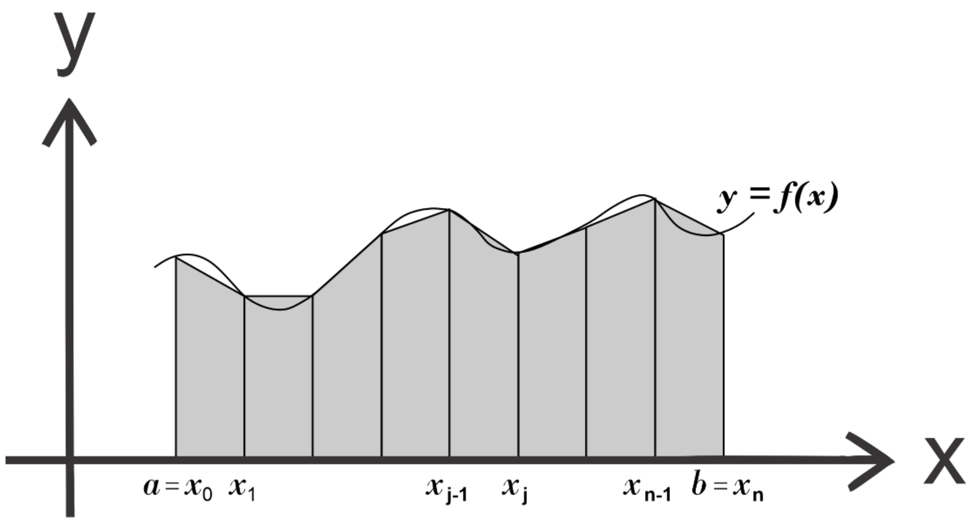
**QUADRO 8**. Passo a passo para a regra dos trapézios

| | |
|---|---|
| 1º) | divide-se o intervalo de a até b em $n$ partes iguais, (subintervalos), determinando o valor de cada subintervalo, denominando de $\Delta x$ **(Fig. 28)**; |
| 2º) | toma-se os pontos das extremidades de cada subintervalo, $x_0, x_1, \ldots x_n$; |
| | dada a função f(x), estime os valores de f($x_0$), f($x_1$),... f($x_n$) (as imagens dos pontos das extremidades de casa subintervalo); |

| | |
|---|---|
| 3º) | demarca-se sobre a figura trapézios possíveis que podem ser formados, com bases $f(x_0), f(x_1), \ldots f(x_n)$ e alturas $\Delta x$. Por exemplo, o primeiro trapézio que você deve demarcar na figura é o trapézio com bases f($x_0$) e f($x_1$) e altura $\Delta x$ e assim por diante para os demais trapézios; |
| 4º) | calcula-se de forma aproximada a área irregular no plano delimitado por f(x) e no intervalo de [a, b] através da soma das áreas desses trapézios formados. |

Fonte: Arquivo do autor (2023)

**Figura 28.** Área formadas por trapézios



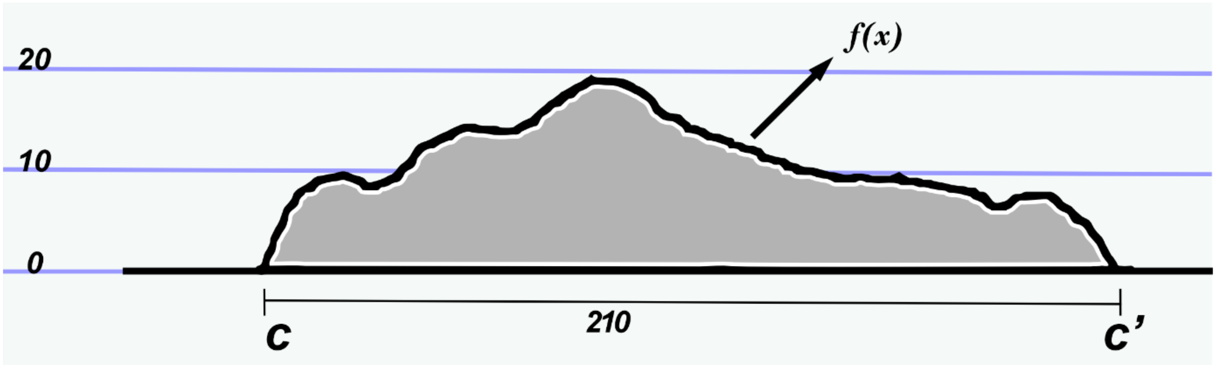

Fonte: Arquivo do autor (2023)

A seguir, um exemplo de aplicação dos métodos que o professor pode propor para a aplicação da teoria apresentada.

Exemplo 1

Este primeiro exemplo mostra o passo a passo para estimar a área da região delimitada por f(x) e o segmento $\overline{CC'}$, ilustrada na **figura 29**, utilizando a regra do ponto médio (**Apêndice A**) e pela regra do trapézio (**Apêndice B**).

**Figura 29.** Ilustração da área da região plana entre f(x) e o segmento $\overline{CC'}$




Fonte: Arquivo do autor (2023)

Parte 3 – Revisão e separação dos pequenos grupos

No primeiro encontro, é necessário retomar o que os estudantes conhecem sobre o cálculo de áreas de figuras geométricas planas, mesmo eles tendo estudado o conteúdo em anos anteriores. Para a formação dos grupos (de cinco integrantes) será previamente formado conforme orientação do professor, que conhece bem a turma. Pode-se ainda, como sugestão, unir em um mesmo grupo, integrantes que sejam oriundos da zonal rural e em outro mesmo grupo integrantes oriundos da zona urbana, já que as situações problemas apresentadas serão voltadas para zona rural e urbana. Caso não exista essa distinção, sugiro sorteio simples.

**II Momento**

Neste encontro será apresentada as atividades para os grupos como sugestão para o professor trabalhar em sala de aula, com algumas orientações para a realização das atividades propostas.

Para cada atividade sugerida a seguir, o professor deve mostrar que deve ser colocado, na melhor posição possível, um referencial para que o aluno tenha uma noção de referências de medições, tanto no eixo x quanto no eixo y.

Durante este período, o professor marcará encontros na escola para orientação com os alunos para tirar dúvidas.

Outra informação importante que o professor deve passar para os alunos é a questão de escala. Como por exemplo, na figura (**APÊNDICE F**) da Ilha, a escala é de 1:200 (1cm no papel corresponde a 200m). O aluno deverá fazer a conversão das medidas para encontrar o valor da área real. Para isso, poderá fazer pela regra de três simples:

| Tamanho no desenho (cm) | | Tamanho real (m) |
|---|---|---|
| 1 | ------------------ | 200 |
| n | ------------------- | x |

o que implica em x = 200.n, ou seja, se por exemplo, uma medida no desenho for de 2 cm, implica que no real sua medida será de x = 200.2 = 400m.

Em todas as situações será necessário utilizar esse procedimento para encontrar o tamanho real da área de cada região.

O professor pode confeccionar uma tabela para o aluno (ou grupo) usar nos experimentos para preencher e ficar mais organizada a evolução dos cálculos, como nos **APÊNDICES G** e **H**.

A seguir, seguem sugestões de atividades experimentais que podem ser apresentadas aos alunos para se trabalhar o tema de cálculo de áreas irregulares.

Atividade 1

Belém do São Francisco é um município brasileiro do estado de Pernambuco. Ficou nacionalmente conhecida em 2004 por ser a terra da personagem Maria do Carmo, vivida por Susana Vieira na novela Senhora do Destino. Com uma área de aproximadamente 1.831 km² e 119 anos de história conta com uma população de aproximadamente 18.321 habitantes e é reconhecida como a terra dos primeiros bonecos gigantes, Zé Pereira e Vitalina.

Calcular a área aproximada do município de Belém do São Francisco seguindo as orientações (**Quadro 9**).

**Quadro 9**. Orientações para os grupos a cerca da atividade 1

| | |
|---|---|
| Grupo 1 | Calcular a área aproximada do município de Belém do São Francisco (atividade 1), utilizando a regra do ponto médio, subdividindo em 5 subintervalos. |
| Grupo 2 | Calcular a área aproximada do município de Belém do São Francisco (atividade 1), utilizando a regra do ponto médio, subdividindo em 14 subintervalos. |
| Grupo 3 | Calcular a área aproximada do município de Belém do São Francisco (atividade 1), utilizando a regra do ponto médio, subdividindo em 28 subintervalos. |

Fonte: Arquivo do autor (2023)

Lembrando que para o cálculo da medida de cada subintervalo deve-se usar a seguinte fórmula: Chamando esse subintervalo de $\Delta x$, segue que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, onde a e b são os extremos do intervalo e n o número de subintervalos.

Como exemplo de aplicação dos métodos acima mencionados, aplicando os dois métodos, regra do ponto médio e a regras dos trapézios, calcular a área aproximada do município de Belém do São Francisco.

Utilizando a regra dos trapézios. Segue o passo a passo (**Quadro 10**)

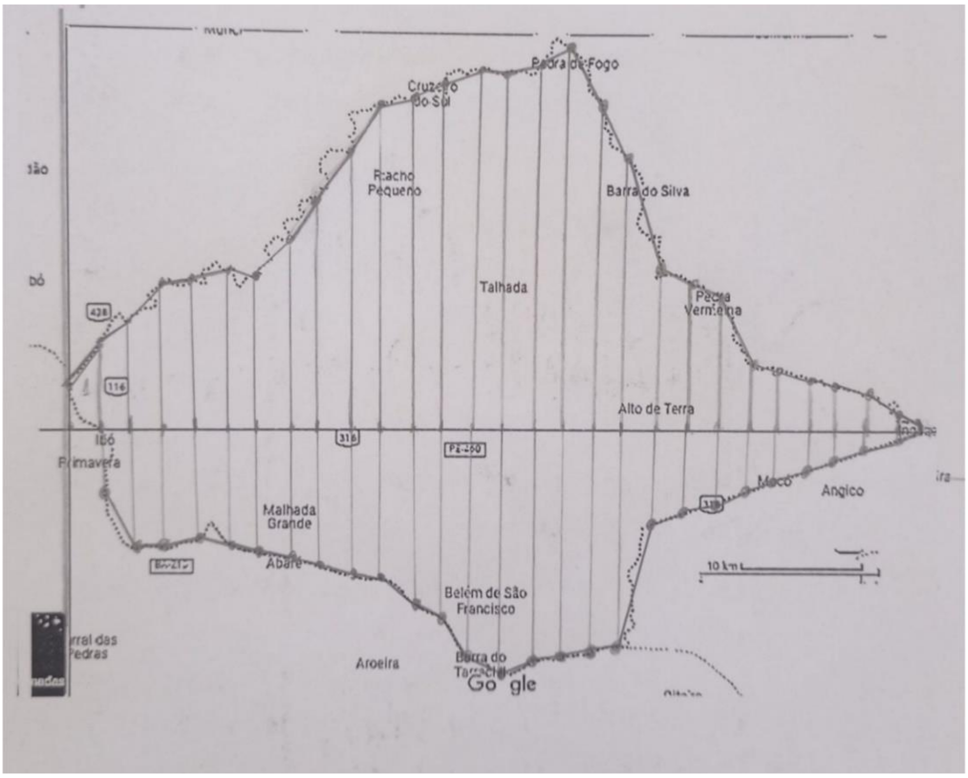
**Quadro 10.** Passo a passo para a regra dos trapézios

| | |
|---|---|
| 1º passo | Definir onde e traçar os eixos perpendiculares x e y; |
| 2º passo | Observar que a escala é de 1cm:5 km **(Fig.28)**, ou seja, 1cm no desenho equivale a 5 km no tamanho real; |
| 3º passo | Definir o tamanho do suintevalo, no nosso caso, dividir em 28 subintervalos. Como o intervalo é de 14 cm, então cada subintervalo terá 0,5 cm; |
| 4º passo | Traçar as alturas (segmentos que vão do eixo x até a extremidade do mapa), na parte acima do eixo e e na parte abaixo do eixo x; |
| 5º passo | Demarcar sobre a figura os 28 trapézios acima do eixo x e os 27 trapézios abaixo do eixo x; |
| 6º passo | Calcular de forma aproximada a área do município de Belém do São Francisco, pela soma dos trapézios formados. |

Fonte: Arquivo do autor (2023)

Na **figura 30**, observa-se que nos trapézios formados a altura é a mesma para todos, 0,5 cm ou 2,5 km, com isso, pode-se colocar a altura em evidência na soma das áreas dos trapézios.

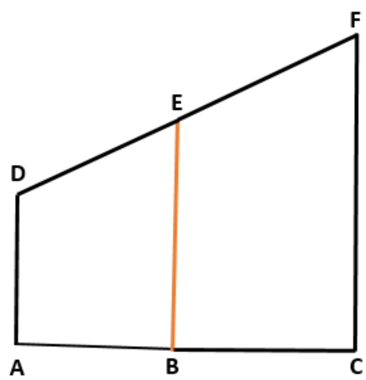
**Figura 30.** Área do município de Belém do São Francisco – PE




Fonte: Google Maps (2023).

Observa-se também que as bases intermediárias pertencam a dois trapézios, então, todas as bases intemediárias serão multiplicadas por 2, exceto as dos extremos, como por exemplo, nos trapézios ABDE e BCFE, a base $\overline{BE}$ pertence aos dois trapézios. (Fig. 31).

**Figura 31**. Dois trapézios adjacentes




Fonte: Arquivo do autor (2023)

Com isso, por simplificação, calcula-se a área da região da seguinte forma:

Cálculo da área ($A_1$) localizada acima do eixo x:

$$A_1 \approx \frac{2,5}{2}[3,5 + 2(7,5 + 8,5 + 11,5 + 12 + 12,5 + 12 + 15,5 + 19 + 23 + 26 + 27 + 28 + 30 + 29 + 29,5 + 31 + 26,5 + 22,5 + 10,5 + 12 + 11 + 5,5 + 5 + 4 + 4 + 3 + 1,5) + 1]$$

$$A_1 \approx \frac{2,5}{2}[3,5 + 2(427,5) + 1]$$

$$A \approx \frac{2,5}{2}[3,5 + 855 + 1)$$

$$A_1 \approx \frac{2,5}{2}.859,5 \approx 1.074,375\ km^2.$$

Cálculo da área ($A_2$) localizada abaixo do eixo x. Note que na parte de baixo só existem 27 trapézios (o primeiro subintervalo é descartado) **(Fig. 29).**

O cálculo se procede da mesma forma acima.

$$A_2 \approx \frac{2,5}{2}[5 + 2(9,5 + 9,5 + 8,5 + 9,5 + 10 + 10,5 + 11 + 12 + 12 + 15 + 15,5 + 18,5 + 20 + 19 + 18,5 + 18,5 + 18 + 8 + 7 + 6,5 + 5 + 4 + 3,5 + 2,5 + 1,5 + 1) + 0,5]$$

$$A_2 \approx \frac{2,5}{2}[5 + 2(295,5) + 0,5]$$

$$A_2 \approx \frac{2,5}{2}(596,5) \approx 745,625\ km^2.$$

Então, a área total da região do município de Belém do São Francisco, é de aproximadamente,

$$A = A_1 + A_2 = 1.074,375 + 745,625 = 1.821\ \mathrm{k}m^2.$$

As tabelas (**APÊNDICE G**) e (**APÊNDICE H**) com as medidas da altura e bases em cm e em km e ainda a soma das bases (b1 + b2), pois outro método para calcular a área poderia ser calculando e somando as áreas dos trapézios construídos, pela fórmula da área do trapézio:

$$A_T = (b + B)\frac{h}{2},$$

Onde b é a base menor, B é a base maior e h a altura.

Observação: Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE, o município de Belém do São Francisco possui uma área de aproximadamente 1.831 Km². O nosso cálculo obteve um valor de aproximadamente 1.821 km². O que representa um erro de (1831-1821)/1831 = 0,55%. Para diminuir esse erro, basta aumentar o número de subintevalos.

Como verificado anteriormente, também é possível calcular essa área usando a regra do Ponto Médio. Nesse caso, pode-se considerar os eixos cartesianos na mesma posição que a apresentada na **Fig. 29**. Da mesma forma que no método anterior, pode-se dividir os 14 cm no eixo horizontal (que delimitam a região horizontalmente) em n=28 subintervalos (bases dos retângulos, com 0,5 cm de comprimento cada um).

Escolher um n igual ao usado com o método dos Trapézios é interessante porque os grupos de alunos podem comparar os resultados obtidos usando as duas técnicas.

Na continuidade da execução do método, com as 28 bases medindo 0,5 cm (ou 2,5 km), pede-se que os alunos calculem as alturas dos retângulos que sobrepõem cada parte da região a qual se deseja calcular a área. Essas alturas são determinadas pelo valor das imagens (altura) relativas aos pontos médios de cada subintervalo.

Dessa forma, com as bases e alturas dos retângulos convertidos para km, calculam-se e somam-se as 28 áreas dos retângulos acima e também abaixo do eixo horizontal para que a área seja estimada.

Da mesma forma que a proposta anteriormente, o professor pode propor uma tabela (Quadro 11) em que os alunos podem completá-la com os dados experimentais obtidos

**Quadro 11.** Cabeçalho de tabela para anotações dos registros de dados experimentais obtidos, utilizando a regra do Ponto Médio.

| Subintervalo #i, i= 1, 2, 3, ... 28 | Base (cm) | Base (km) | Altura do ponto médio (cm) | Altura do ponto médio (km) | Área do retângulo relativa ao subintervalo (km$^2$) |
|---|---|---|---|---|---|
| #1 | | | | | |

Fonte: Arquivos do autor (2023).

É importante destacar que, os erros de medição irão acontecer na execução dos dois métodos, por conta das ferramentas associadas, como lápis, régua, etc. e até mesmo pelas ações do próprio observador no manuseio dessas ferramentas e leitura dos dados.

Como se viu, no cálculo da área realizado acima, houve um erro de 0,55%, esse valor pode ser melhorado tanto quanto se queira. Na solução dos grupos 1, 2 e 3 da atividade 1, serão comparados os resultados e feita essa análise de erros.

Atividade 2

Belém do São Francisco – PE possui uma das maiores exportadoras de manga do Brasil, mas, no município se produz outras culturas, como frutas e hortaliças.

Calcular a área aproximada da área cultivada de uma propriedade rural (**APÊNDICE D**). Para essa atividade, o professor pode fazer as seguintes variações (**Quadro 12**).

**QUADRO 12.** Orientações para os grupos a cerca da atividade 2

| | |
|---|---|
| Grupo 1 | Calcular a área aproximada da área cultivada da propriedade (atividade 2), utilizando a regra do trapézio, subdividindo em 14 subintervalos. |

| | |
|---|---|
| Grupo 2 | Calcular a área aproximada da área cultivada da propriedade (atividade 2), utilizando a regra do trapézio, subdividindo em 28 subintervalos. |
| Grupo 3 | Calcular a área aproximada da área cultivada da propriedade (atividade 2), utilizando a regra do ponto médio, subdividindo em 28 subintervalos. |

Fonte: Arquivos do autor (2023).

Atividade 3

No município de Belém do São Francisco, existem duas faculdades. Em uma delas há uma pequena praça em seu jardim onde alunos e pessoas da comunidade apreciam suas plantas e bancos.

Calcular a área aproximada dessa praça (**APÊNDICE E**). Para essa atividade, o professor fará algumas variações para o número de subintervalos escolhidos e ao final fará as comparações de resultados.

Atividade 4

O município de Belém do São Francisco, localizado no Sertão pernambucano, possui um total de 88 ilhas. Uma delas é a Ilha do Cachauí. Nessa ilha além de ponto turístico, também se produz várias culturas para destinar para a feira da cidade e outros centros e criação de animais (caprinos, ovinos e bovinos).

Calcular a área aproximada da ilha (**APÊNDICE F**). Para essa atividade, o professor fará algumas variações para o número de subintervalos escolhidos e ao final fará as comparações de resultados.

Pelos exemplos resolvidos durante a sequência, o professor pode discutir com os alunos que resultados de cálculo de áreas mais próximos do valor real podem ser obtidos a partir do momento em que se divide o intervalo determinado em maior quantidade de subintervalos.

Em outras palavras, os alunos devem verificar que quanto maior o número de subintervalos, mais aproximado é o valor da área desejada. Isso deve ser percebido com a utilização das duas regras numéricas propostas.

Dessa forma, é consideréval desenvolver em sala de aula, e em construção de conhecimento geométrico com os estudantes do Ensino Médio, práticas como essas, para maximizar a teoria com a prática.

### 4.2.3 Terceiro encontro – Socialização dos resultados

Nesta sequência didática, após a divisão dos grupos e apresentação da proposta, após o cálculo das áreas das regiões irregulares, teremos o último encontro, onde haverá a socialização dos trabalhos onde cada grupo apresentará os resultados encontrados. A apresentação dos resultados se dará através de tabelas (em Datashow), onde cada grupo terá 10 minutos para tal.

Cada grupo será avaliado quanto:

- à escolha do referencial (eixos perpendiculares, x e y);

- à escolha da quantidade de subintervalos definidos;

- aos cálculos efetuados, seguindo os métodos apresentados anteriormente;

- à conversão de unidades de acordo com a escala dada e a aproximação do valor da área real da região pedida.

A Atividade 1, mesmo tendo sido feita pelo professor, também será avaliada, pois, mesmo os alunos tendo feito como o mesmo número de subintervalos, o resultado final pode ser diferente. Isso pode acontecer de acordo com as ferramentas utilizadas.

Contudo, é importante salientar que para o cálculo de áreas nas atividades propostas nesta sequência didática, foram usados dois métodos, o do ponto médio e a regra dos trapézios. Assim, o professor, como mediador do processo de aprendizagem, pode propor adaptações e até mesmo sugerir outros métodos de cálculo de áreas, utilizando outras ferramentas de medição, usuais ou não, e comparar os resultados obtidos com os alunos. O objetivo é mostra-los que mesmo seguindo diferentes métodos para obtenção da solução, os resultados serão próximos uns dos outros, e que os erros experimentais estarão associados à execução da técnica numérica escolhida, das ferramentas de medição e até mesmo das ações de medição do observador.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Neste estudo que teve como objetivo propor uma sequencia didática mobilizando aspectos teóricos/práticos do cálculo de áreas de regiões planas de regiões irregulares, evidenciou que a pergunta de invertigação pôde ser respondida de forma clara e objetiva.

A temática do cálculo de áreas de regiões planas na BNCC foi mostrada e discutida em detalhes e retornou a sua importância para a formação do aluno nos vários níveis escolares da Educação Básica no Brasil.

Em adição, verificou-se que o tema se mostra atual na área de pesquisa em Ensino de Matemática, e tem sido enfatizado na literatura com propostas metodológicas alternativas para a melhoria do ensino de Matemática.

Dada a importância do tema, buscou-se apresentar a sua evolução temporal, a teoria envolvida e seus desdobramentos para as diversas aplicações que lhe competem.

Todos esses conceitos apresentados e discutidos foram essenciais para que se pudessem apresentar técnicas numéricas para o cálculo aproximado de áreas de regiões planas irregulares, bem conhecidas no Ensino Superior, mas pouco difundidas no Educação Básica mesmo com potencial de usabilidade demonstrado. Assim, conceitos básicos das regras do Ponto Médio e dos Trapézios foram adaptados ao nível escolar trabalhado, para o desenvolvimento de uma proposta de sequência didática interdisciplinar, com linguagem acessível ao público alvo, que envolveu o cálculo de áreas de regiões planas irregulares reais localizadas em Belém do São Francisco e no seu entorno, que podem ser facilmente encontradas na internet, com o uso da ferramenta gratuita Google Maps.

Com a Proposta do uso da Matemática para o cálculo de áreas territoriais, de praças, de propriedades rurais, ilhas, entre outros, a sequência didática buscou ressignificar os conhecimentos a cerca e lhes mostrar a aplicação de conceitos matemáticos para a solução de problemas com apelo local e de ordem prática.

Com base no que foi desenvolvido até aqui, planeja-se que a continuidade do trabalho envolva a execução de um estudo de caso com os alunos de escolas públicas em Belém do São Francisco, aplicando a sequência didática em sala de aula, e avaliando os resultados práticos da pesquisa com base na teoria apresentada. Com a hipótese de obtenção de aprendizagens significativas, pretende-se divulgar os resultados da pesquisa com a publicação do trabalho em revista científica da área de Ensino de Matemática. Com isso, espera-se que esse trabalho possa servir como ferramenta de ensino para os professores de Matemática que desejam aplicar e ressignificar conceitos de Matemática para a solução de problemas práticos no próprio ambiente escolar.

## REFERÊNCIAS


Barbosa, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 1997.

Barbosa, R.; Feitosa S. **OBMEP – Banco de Questões 2016.** Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1Q0ScrnLgeMfVjhmC6K6tUfP1xehz10lc/view. Acesso em 30 de novembro de 2022.

Bigode, Antônio José Lopes. **A Matemática hoje é feita assim**. São Paulo: FTD, 2000.

Boyer, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 26 de março de 2021.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática /Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

Cardoso, R. da T. **O ensino de medida de área por atividade** / Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

Charnei, M. **Dificuldade de aprendizagem do cálculo de área de figuras planas retangulares: uma possibilidade através do GeoGebra.** Anais dos Workshops do VIII Congresso Brasileiro de Informática na Educação (WCBIE 2019).

Chavante, Eduardo Rodrigues. **Convergências Matemática**. Ensino fundamental: anos finais, 6º ano. 2ª ed. – São Paulo: Edições SM, 2018.

Chavante, Eduardo Rodrigues. **Convergências Matemática**. Ensino fundamental: anos finais, 9º ano. 2ª ed. – São Paulo: Edições SM, 2018.

Cordeiro NETO, A. A. **Cálculo integral para o Ensino Médio**. Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática, PMO v.7, n.1, 2019.

COSTA, Márcia. **Lei do Georreferenciamento: o que é e para que serve?** MK Avaliações Imobiliárias. 2018. Disponível em: https://mkavaliacoesimobiliarias.com.br/lei-do-georreferenciamento-o-que-e-e-para-que-serve/. Acesso em: 31 de agosto de 2022.

Dante, Luiz Roberto. **Contexto & Aplicações**. 2ª ed. – São Paulo: Ática, 2013.

ENEM 2008 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2008/2008_amarela.pdf. Acessado em 30 de novembro de 2022.

Flemming, D. M; Gonçalves, M. B, **Cálculo A. Funções, limites, derivação e integração**. 6ª edição, Pearson, 2006.

FREITAS, M. V. C; BITTAR, M. **O Ensino do Volume dos Sólidos Geométricos em Livros Didáticos do Ensino Médio Sobre a Ótica da TAD**. I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática, Bonito - Mato Grosso do Sul – Brasil, 2016.

Giovanni Júnior, J, R; Castrucci, B. **A Conquista da Matemática**: 7º ano, Ensino Fundamental, anos finais / José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. — 4. ed. — São Paulo: FTD, 2018

Himonas, A; Howard, A. **Cálculo, Conceitos e Aplicações**, LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S. A. Rio de Janeiro, 2005.

Leithold, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Vol 1. 3ª Edição. Editora HARBA ltda. 1994.

Magnago, F. K; Oliveira, L. **Uma proposta de ensino por meio da modelagem matemática: cálculo do volume e da área superficial de um reservatório de água**. Ciência e Natura, vol. 37, núm. 3, 2015, pp. 308-317Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, Brasil.

Nós, R.L; Fernandes, M.F. **Equicomposicão de polígonos e o cálculo de áreas.** Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

OLIVEIRA, A do C; SOUZA, A. de M.; GOECKING, B. L; BEIJO, L. A; OLIVEIRA, A. J. **MATEMÁTICA PARA A CIDADANIA: Calculando Perímetro e Área em Situações do Cotidiano**. Revista Extensão e Cidadania, v. 8, n. 13, p. 211-227, jan./jun. 2020.

Paiva, Manoel. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.

Pautz, E. A **Importância do Georreferenciamento: Desafios e Possibilidades**.

Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação. São Paulo, v.7.n.11.nov. 2021.

Pernambuco. Secretaria de Educação e Esportes. **Currículo de Pernambuco**: ensino fundamental/Secretaria de Educação e Esportes, União dos Dirigentes Municipais de Educação. Recife: A Secretaria, 2019.

Pernambuco. Secretaria de Educação e Esportes. **Currículo de Pernambuco**: ensino médio/Secretaria de Educação e Esportes, União dos Dirigentes Municipais de Educação. Recife: A Secretaria, 2021.

Prina, B. Z. **Georreferenciamento de imóveis rurais: Análise do cálculo de área.** Revista do Departamento de Geografia – USP, Volume 29 (2015), p. 116 a 136.

PUHL, C. S; DIAS, T. M. **Desmatamento no interior de Bom Princípio: A área desmatada na última década**. Scientia Cum Industria. V.5, n.3, PP 183 – 185, 2017

ROCHA, T. de O; SILVA, J.N.D. **O cálculo de perímetro e de área de figuras planas: dificuldades encontradas pelos alunos da EJA**. Com a palavra o Professor, Vitória da Conquista (BA), v.5, n. 11, janeiro-abril/2020.

Stewart, J. **Cálculo**, volume I, 5ª ed. – São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

# APÊNDICE A – PASSO-A-PASSO PARA A SOLUÇÃO DA QUESTÃO DO EXEMPLO 1 USANDO A REGRA DO PONTO MÉDIO

**1° passo:** Divida o segmento CC’ em 5 partes iguais (5 subintervalos, denominados $\Delta X1, \Delta X2, \Delta X3, \Delta X4, \Delta X5$, de C para C’). Determine o tamanho de cada $\Delta X$;

**2° passo**: Marque o ponto médio de cada subintervalo e os denomine de C1, C2, C3, C4 e C5, respectivamente;

**3° passo:** Dada a função f(x), estime os valores de f(C1), f(C2), f(C3), f(C4) e f(C5) (as imagens dos pontos médios de cada subintervalo);

**4° passo:** Demarque sobre a figura os 5 retângulos possíveis que podem ser formados, com bases $\Delta X$ e alturas f(Ci). Por exemplo, o primeiro retângulo que você deve demarcar na figura é o retângulo com base $\Delta X1$ e altura f(C1) e assim por diante para os outros 4 retângulos;

**5° passo:** Calcule de forma aproximada a área irregular no plano delimitada por f(x) e o segmento CC’ através da soma das áreas dos 5 retângulos formados sob a curva.

# APÊNDICE B - PASSO A PASSO PARA A SOLUÇÃO DA QUESTÃO DO EXEMPLO 1 UTILIZANDO A REGRA DO TRAPÉZIO

Para este caso, descola-se o eixo X algumas unidades para baixo. Chamando o novo eixo de X'.

1º Passo: Divida o segmento CC' em 5 partes iguais (5 subintervalos, denominados $\Delta X1, \Delta X2, \Delta X3, \Delta X4, \Delta X5$, de C para C'). Determine o tamanho de cada $\Delta X$;

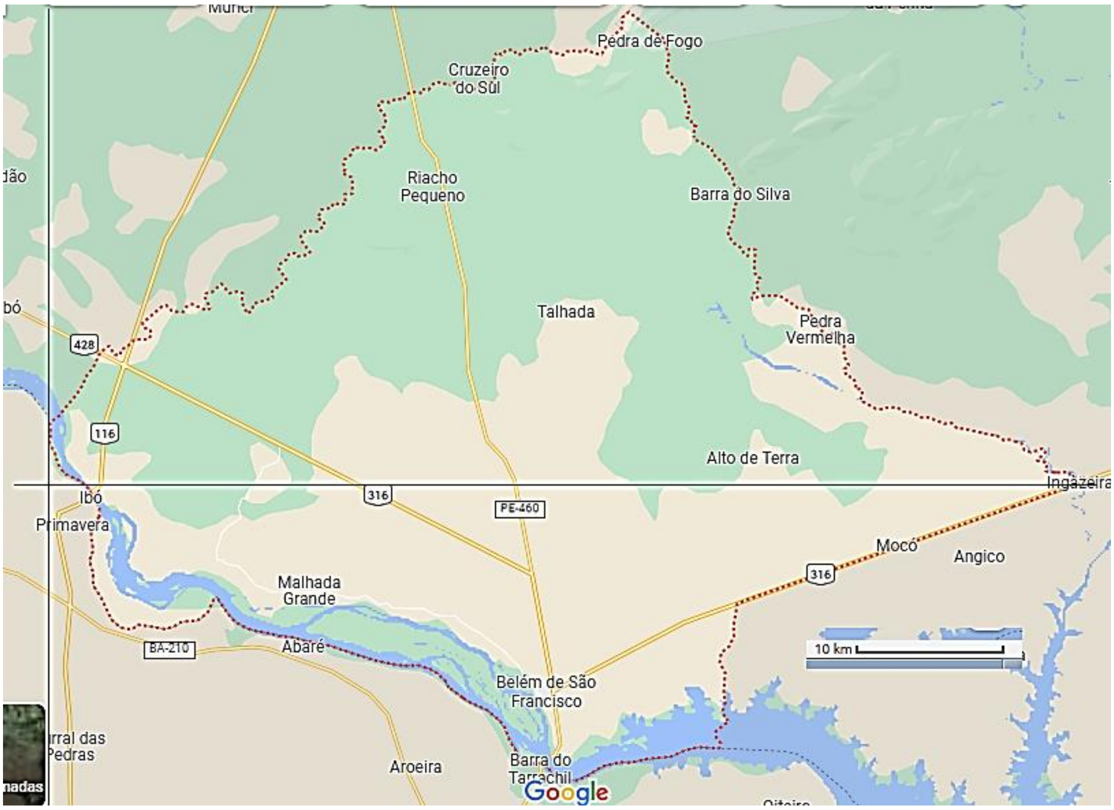
2º Passo: Marque os pontos dos extremos de cada subintervalo no eixo X e os denomine de C1, C2, C3, C4, C5 e C6, respectivamente e marque os pontos dos extremos de cada subintervalo no eixo X' e os determine de C'1, C'2, C'3, C'4, C'5 e C'6, respectivamente;

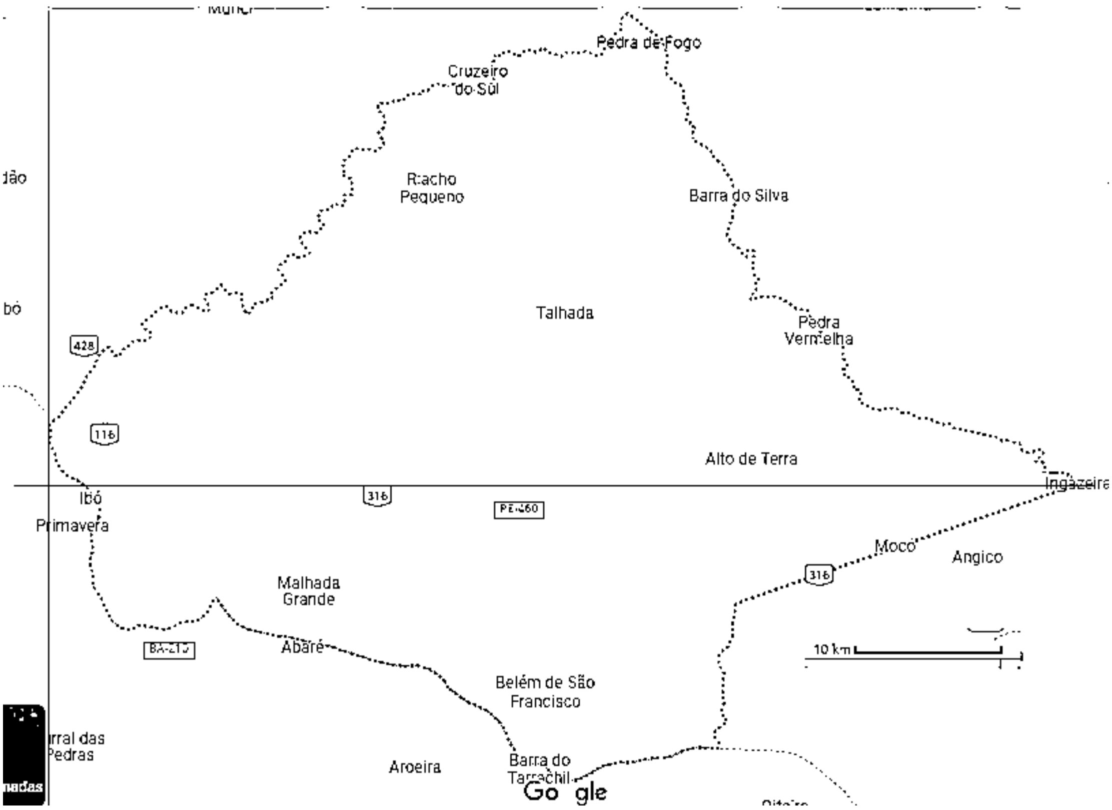
3° passo: Dada a função f(x), estime os valores de f(C'1), f(C'2), f(C'3), f(C'4), f(C'5) e f(C'6) (as imagens dos pontos extemos cada subintervalo no eixo X');

4° passo: Demarque sobre a figura os 5 trapézios possíveis que podem ser formados, com bases formados pelos segmentos $\overline{C'\imath f(C'\imath)}$ e altura igual a $\Delta X$. Por exemplo, o primeiro trapézio que você deve demarcar na figura é o trapézio com bases $\overline{C'1f(C'1)}$ e $\overline{C'2f(C'2)}$ e altura $\Delta X$ e assim por diante para os outros 4 trapézios;

5° passo: Calcule de forma aproximada a área irregular no plano delimitada por f(x) e o segmento CC' através da soma das áreas dos 5 trapézios, descontando a área dos 5 retângulos formados entre o eixo X e o eixo X', que possuem áreas iguais. .

**APÊNDICE C - MAPA DO MUNICÍPIO DE BELÉM DO SÃO FRANCISCO - PE**



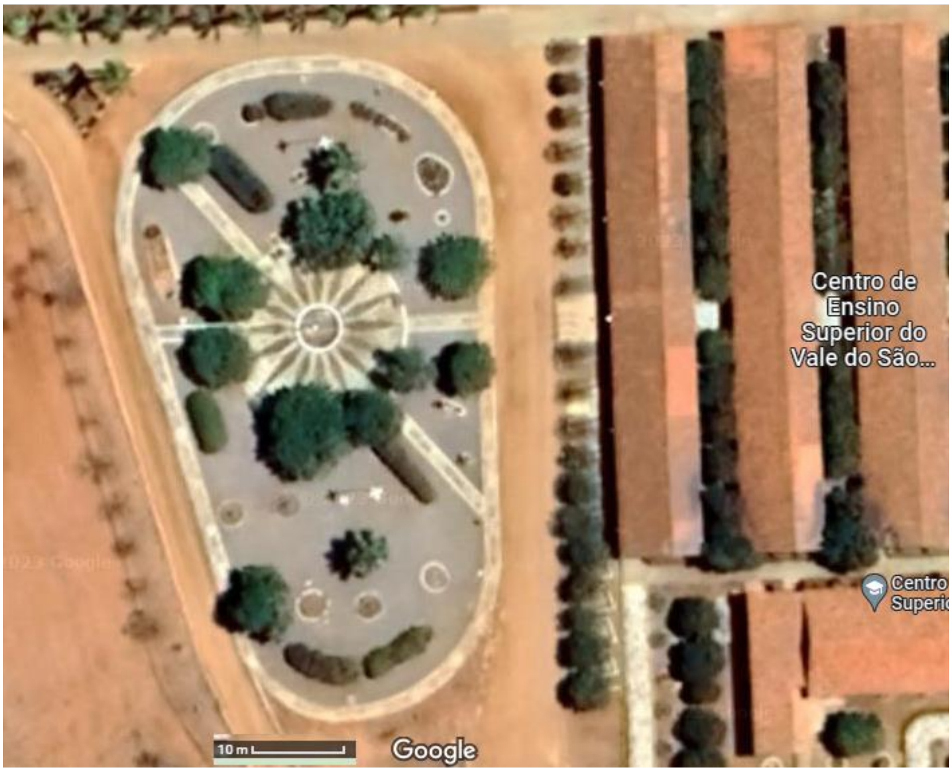

Fonte: Google Maps (2023).

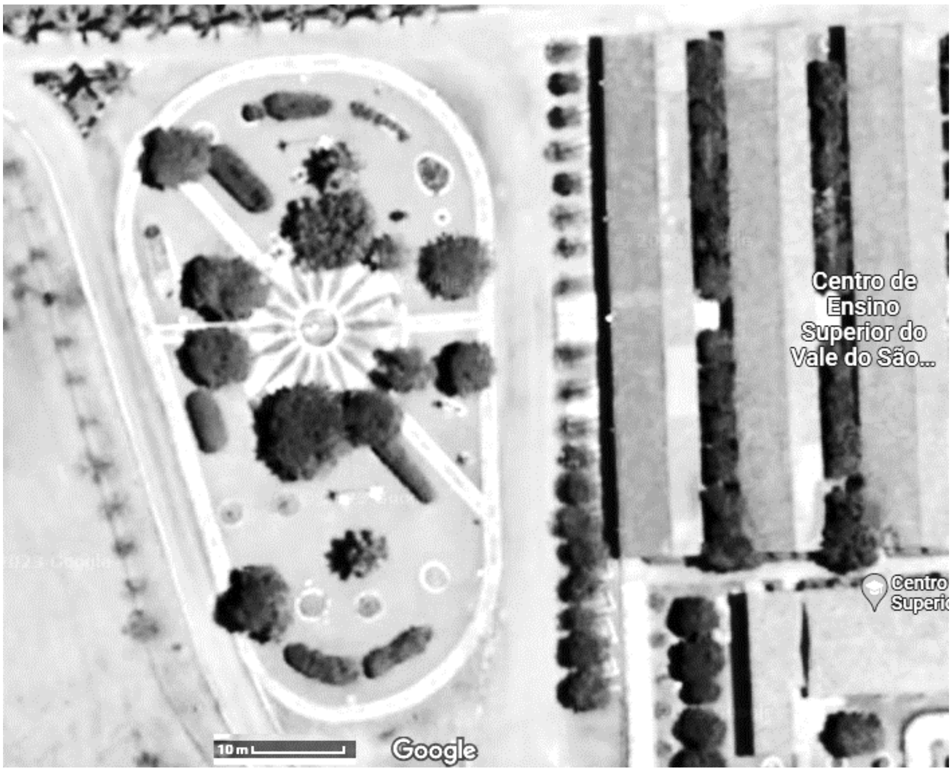
# APÊNDICE D – VISTA AÉREA DE SATÉLITE DE UMA ÁREA RURAL EM CABROBÓ-PE (LOCALIZAÇÃO: 8°34'19.0"S 39°15'47.0"W)



Fonte: Google Maps (2023).

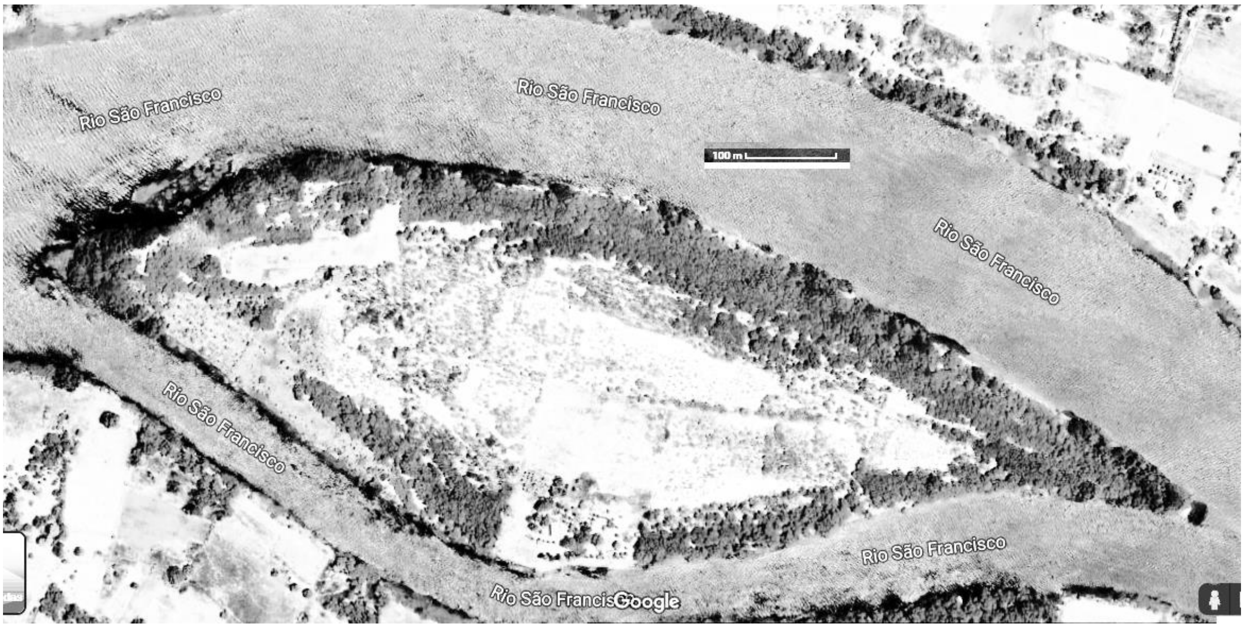
**APÊNDICE E - VISTA AÉREA DE SATÉLITE DE UMA PRAÇA, EM BELÉM DO SÃO FRANCISCO-PE (LOCALIZAÇÃO: 8°46'02"S 38°57'18"W)**




Fonte: Google Maps (2023).

## APÊNDICE F - VISTA AÉREA DE SATÉLITE DE UMA ILHA EM BELÉM DO SÃO FRANCISCO-PE (LOCALIZAÇÃO: 8°43'49"S 39°01'38"W)


Fonte: Google Maps (2023).

**APÊNDICE G. QUADRO 9. VALORES DA ALTURA, BASES E SOMA DAS BASES DA REGIÃO ACIMA DO EIXO X**

| Sub-intervalo | Altura (cm) | Altura (km) | Base 1 (cm) | Base 1 (km) | Base 2 (cm) | Base 2 (km) | Base 1 + Base 2 (km) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,5 | 2,5 | 0,7 | 3,5 | 1,5 | 7,5 | 11 |
| 2 | 0,5 | 2,5 | 1,5 | 7,5 | 1,7 | 8,5 | 16 |
| 3 | 0,5 | 2,5 | 1,7 | 8,5 | 2,3 | 11,5 | 18 |
| 4 | 0,5 | 2,5 | 2,3 | 11,5 | 2,4 | 12 | 23,5 |
| 5 | 0,5 | 2,5 | 2,4 | 12 | 2,5 | 12,5 | 24,5 |
| 6 | 0,5 | 2,5 | 2,5 | 12,5 | 2,4 | 12 | 24,5 |
| 7 | 0,5 | 2,5 | 2,4 | 12 | 3,1 | 15,5 | 27,5 |
| 8 | 0,5 | 2,5 | 3,1 | 15,5 | 3,8 | 19 | 34,5 |
| 9 | 0,5 | 2,5 | 3,8 | 19 | 4,6 | 23 | 42 |
| 10 | 0,5 | 2,5 | 4,6 | 23 | 5,2 | 26 | 49 |
| 11 | 0,5 | 2,5 | 5,2 | 26 | 5,5 | 27,5 | 53,5 |
| 12 | 0,5 | 2,5 | 5,5 | 27,5 | 5,7 | 28,5 | 56 |
| 13 | 0,5 | 2,5 | 5,7 | 28,5 | 6 | 30 | 58,5 |
| 14 | 0,5 | 2,5 | 6 | 30 | 5,8 | 29 | 59 |
| 15 | 0,5 | 2,5 | 5,8 | 29 | 5,9 | 29,5 | 58,5 |
| 16 | 0,5 | 2,5 | 5,9 | 29,5 | 6,2 | 31 | 60,5 |
| 17 | 0,5 | 2,5 | 6,2 | 31 | 5,3 | 26,5 | 57,5 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 0,5 | 2,5 | 5,3 | 26,5 | 4,5 | 22,5 | 49 |
| 19 | 0,5 | 2,5 | 4,5 | 22,5 | 2,1 | 10,5 | 33 |
| 20 | 0,5 | 2,5 | 2,1 | 10,5 | 2,4 | 12 | 22,5 |
| 21 | 0,5 | 2,5 | 2,4 | 12 | 2,2 | 11 | 23 |
| 22 | 0,5 | 2,5 | 2,2 | 11 | 1,1 | 5,5 | 16,5 |
| 23 | 0,5 | 2,5 | 1,1 | 5,5 | 1 | 5 | 10,5 |
| 24 | 0,5 | 2,5 | 1 | 5 | 0,8 | 4 | 9 |
| 25 | 0,5 | 2,5 | 0,8 | 4 | 0,8 | 4 | 8 |
| 26 | 0,5 | 2,5 | 0,8 | 4 | 0,6 | 3 | 7 |
| 27 | 0,5 | 2,5 | 0,6 | 3 | 0,3 | 1,5 | 4,5 |
| 28 | 0,5 | 2,5 | 0,3 | 1,5 | 0,2 | 1 | 2,5 |

Fonte: Arquivo do autor (2023)

**APÊNDICE H. QUADRO 10 - VALORES DA ALTURA, BASES E SOMA DAS BASES DA REGIÃO ABAIXO DO EIXO X**

| Sub-intervalo | Altura (cm) | Altura (km) | Base 1 (cm) | Base 1 (km) | Base 2 (Cm) | Base 2 (km) | Base 1 + Base 2 (km) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,5 | 2,5 | 1 | 5 | 1,9 | 9,5 | 14,5 |
| 2 | 0,5 | 2,5 | 1,9 | 9,5 | 1,9 | 9,5 | 19 |
| 3 | 0,5 | 2,5 | 1,9 | 9,5 | 1,7 | 8,5 | 18 |
| 4 | 0,5 | 2,5 | 1,7 | 8,5 | 1,9 | 9,5 | 18 |
| 5 | 0,5 | 2,5 | 1,9 | 9,5 | 2 | 10 | 19,5 |
| 6 | 0,5 | 2,5 | 2 | 10 | 2,1 | 10,5 | 21,5 |
| 7 | 0,5 | 2,5 | 2,1 | 10,5 | 2,2 | 11 | 21,5 |
| 8 | 0,5 | 2,5 | 2,2 | 11 | 2,4 | 12 | 23 |
| 9 | 0,5 | 2,5 | 2,4 | 12 | 2,4 | 12 | 24 |
| 10 | 0,5 | 2,5 | 2,4 | 12 | 3 | 15 | 17 |
| 11 | 0,5 | 2,5 | 3 | 15 | 3,1 | 15,5 | 30,5 |
| 12 | 0,5 | 2,5 | 3,1 | 15,5 | 3,7 | 18,5 | 34 |
| 13 | 0,5 | 2,5 | 3,7 | 18,5 | 4 | 20 | 38,5 |
| 14 | 0,5 | 2,5 | 4 | 20 | 3,8 | 19 | 39 |
| 15 | 0,5 | 2,5 | 3,8 | 19 | 3,7 | 18,5 | 37,5 |
| 16 | 0,5 | 2,5 | 3,7 | 18,5 | 3,7 | 18,5 | 37 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 0,5 | 2,5 | 3,7 | 18,5 | 3,6 | 18 | 36,5 |
| 18 | 0,5 | 2,5 | 3,6 | 18 | 1,6 | 8 | 28 |
| 19 | 0,5 | 2,5 | 1,6 | 8 | 1,4 | 7 | 25 |
| 20 | 0,5 | 2,5 | 1,4 | 7 | 1,3 | 6,5 | 23,5 |
| 21 | 0,5 | 2,5 | 1,3 | 6,5 | 1 | 5 | 11,5 |
| 22 | 0,5 | 2,5 | 1 | 5 | 0,8 | 4 | 9 |
| 23 | 0,5 | 2,5 | 0,8 | 4 | 0,7 | 3,5 | 7,5 |
| 24 | 0,5 | 2,5 | 0,7 | 3,5 | 0,5 | 2,5 | 6 |
| 25 | 0,5 | 2,5 | 0,5 | 2,5 | 0,3 | 1,5 | 4 |
| 26 | 0,5 | 2,5 | 0,3 | 1,5 | 0,2 | 1 | 2,5 |
| 27 | 0,5 | 2,5 | 0,2 | 1 | 0,1 | 0,5 | 1,5 |

Fonte: Arquivo do autor (2023)