**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO**
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**
**PROFMAT**

**ROBSON FRANKLIN DE AGUIAR COUTO**

# DESIGUALDADES DAS MÉDIAS: uma ferramenta para resolução de problemas de otimização

**JUAZEIRO - BA**
**2019**

**ROBSON FRANKLIN DE AGUIAR COUTO**

# DESIGUALDADES DAS MÉDIAS: uma ferramenta para resolução de problemas de otimização

Trabalho apresentado à Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, Campus Juazeiro, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Fábio Henrique de Carvalho

**JUAZEIRO - BA**
**2019**

C871d

Couto, Robson Franklin de Aguiar.
Desigualdade das médias: uma ferramenta para resolução de de problemas de otimização / Robson Franklin de Aguiar Couto. -- Juazeiro, 2019.
xii; 89 f. il. 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro-BA, 2019.

Orientador: Prof. Me. Fábio Henrique de Carvalho.

1. Otimização. 2. Matemática – Resolução de problemas. I. Título. II. Carvalho, Fábio Henrique. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 519.3

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Renato Marques Alves, CRB 5 – 1548.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO**
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

# FOLHA DE APROVAÇÃO

Robson Franklin de Aguiar Couto

DESIGUALDADES DAS MÉDIAS: uma ferramenta para resolução de problemas de otimização

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Aprovada em: 19 de junho de 2019.

**Banca Examinadora**

Prof. Msc. Fábio Henrique de Carvalho, PROFMAT/UNIVASF

Prof. Dr. Sérgio Floquet Sales, PROFMAT/UNIVASF

Profa. Dra. Mônica Aparecida Tomé Pereira, CPSI/UNIVASF

Eu dedico este trabalho em especial a minha esposa, companheira e amiga Maria Cilane e a minha amada filha Ohanna Raíza, ao meu pai Roberval Couto de Lima (in memória), a minha mãe conhecida carinhosamente por Gracinha Aguiar, a todos os meus irmãos e familiares.

## AGRADECIMENTOS

Eu agradeço a Deus, primeiramente, pois sem sua presença nada seria possível.

A minha mãe, por ter me apoiado em toda minha vida, sempre me incentivando para romper os obstáculos oferecidos pela vida.

A minha amada esposa, companheira e amiga Maria Cilane pelos incentivos e apoio, como também pela compreensão nos momentos em que estive ausente.

A todos os meus professores, coordenadores, diretores, técnicos administrativos, auxiliares de serviços gerais, vigias, cozinheiras. Pois sem vocês não era possível chegar até aqui.

Aos meus colegas de trabalho, que mesmo de longe me deram suporte.

Ao CESVASF por sempre me apoiar em todos os momentos.

Ao meu orientador, Prof Msc. Fábio Henrique de Carvalho, pela paciência e dedicação no desenvolvimento desse trabalho.

Aos Professores Beto Rober Bautista Saavedra, Nancy Lima Costa, Lino Marcos da Silva, Alexandre Ramalho Silva, Edson Leite Araújo, Carlos Antônio Freitas da Silva e Lucília Batista Dantas Pereira, como também a Manoel Pereira da Silva Filho assistente administrativo do PROFMAT/Juazeiro-BA e a toda equipe do PROFMAT pela dedicação e compromisso e por sempre estarem nos motivando e apoiando.

"A educação tem raízes amargas, mas os seus frutos são doces "

Aristóteles

# RESUMO

Problemas que envolvem o cálculo de valores extremos de uma função, máximo ou mínimo, também denominados problemas de otimização, são comumente encontrados em diversas situações do nosso cotidiano. Porém, frequentemente, a determinação desses valores extremos envolve conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, dificultando assim a abordagem desses problemas no ensino básico. Neste trabalho, buscamos alternativas para resolução dos mesmos, motivados pela necessidade de exploração destes no âmbito da matemática básica, sem que seja utilizado conhecimentos sobre o Cálculo. Para isso, apresentamos a desigualdade das médias como uma ferramenta para resolução dos mesmos. Definimos média quadrática, aritmética, geométrica e harmônica, com suas respectivas representações geométricas para dois números, demonstramos a desigualdade das médias para uma lista de $n$ números positivos e finalizamos aplicando essas desigualdades na resolução de alguns problemas de otimização, além de apresentar algumas Desigualdades Clássicas da Matemática, como por exemplo a desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz.



**Palavras-chave:** Médias. Desigualdade. Otimização.

**ABSTRACT**

In the world of Mathematics, all problems that involve the calculation of extreme values of a function, maximum or minimum, also called optimization problems, they are commonly found in several situations day by day in our lives. However, the determination of these extreme values often involves concepts of Differential and Integral Calculus, making it difficult to approach these problems in elementary education. In this work, we search for alternatives to solve these problems also motivated by the need to explore them in the scope of basic mathematics, without using any knowledge about mathematical calculus. So, this way, we present the inequality of measure as a tool to solve them. Defined quadratic, arithmetic, geometric and harmonic mean, with their respective geometric representations for two numbers, we demonstrated the inequality of the means for a list of $n$ positive numbers and we finished applying these inequalities in solving some optimization problems, besides presenting some Classical Inequalities of Mathematics, like the Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz's inequality.

**Keywords:** Mean. Inequality. Optimization.

## LISTA DE FIGURAS


1.1 Representação Geométrica da Média Aritmética para dois números positivos. . . . . . 22
1.2 Representação Geométrica 1 da Média Geométrica de dois números positivos. . . . . . 23
1.3 Representação Geométrica 2 da Média Geométrica de dois números positivos. . . . . . 23
1.4 Representação Geométrica 1 da Média Harmônica para dois números positivos . . . . . . 24
1.5 Representação Geométrica 2 da Média harmônica para dois números positivos . . . . . . 24
1.6 Representação Geométrica da Média Quadrática para dois números positivos. . . . . . 25

2.1 Comparação de áreas . . . . . . 33
2.2 Representação Geométrica da Desigualdade das Médias Quadrática e Aritmética para dois números positivos . . . . . . 37
2.3 Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica de dois números positivos. . . . . . 38
2.4 Representação Geométrica da Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica para dois números positivos. . . . . . 39
2.5 Representação Geométrica da Desigualdade das Médias Geométrica e Harmônica para dois números positivos . . . . . . 40
2.6 Representação da Desigualdade das Médias para dois números positivos . . . . . . 41

3.1 Área máxima . . . . . . 51
3.2 Gráfico da função $S(x) = 12x - x^2$ . . . . . . 52
3.3 Área máxima . . . . . . 52
3.4 Perímetro mínimo . . . . . . 54
3.5 Problema do Tanque. . . . . . . 56
3.6 Planificação do tanque . . . . . . 56

3.7 Problema da lata. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
3.8 Planificação da lata. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
3.9 Problema do Paralelepípedo. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
3.10 Ângulo máximo de visão. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61
3.11 Ângulo máximo de visão 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61
3.12 Área do retângulo inscrito na elipse. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64
3.13 Retângulo com diagonal fixa . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65
3.14 Paralelepípedo de menor volume possível . . . . . . . . . . . . . . . . . 66

4.1 Desigualdade Triangular . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 69
4.2 Problema da central de energia . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72
4.3 Triângulo retângulo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74
4.4 Gráfico de uma função convexa . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77
4.5 Relação convexidade, reta tangente e reta secante. . . . . . . . . . . . 80

SUMÁRIO

Introdução 12

1 ESTUDO DAS MÉDIAS 15

1.1 Médias . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

1.1.1 Médias Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática para dois números positivos e suas representações geométricas . . . . . . . . 21

2 DESIGUALDADE DAS MÉDIAS 27

2.1 Desigualdade . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

2.2 Relação Binária . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

2.3 Propriedades do corpo ordenado dos reais . . . . . . . . . . . . . 30

2.4 Desigualdades Básicas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

2.5 Desigualdade das Médias para dois números positivos . . . . . . 35

2.5.1 Desigualdade das Médias Quadrática e Aritmética para dois números positivos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

2.5.2 Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica para dois números positivos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37

2.5.3 Desigualdade das Médias Geométrica e Harmônica para dois números positivos. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

2.6 Desigualdade das Médias para $n$ números positivos . . . . . . . . 41

2.6.1 Desigualdade das Médias Quadrática e Aritmética . . . . . . . . . . . 41

2.6.2 Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica . . . . . . . . . . 43

2.6.3 Desigualdade das Médias Geométrica e Harmônica . . . . . . . . . . 46

3 APLICAÇÃO DAS DESIGUALDADES DAS MÉDIAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO 48

3.1 Resolução de problemas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49

4 DESIGUALDADES CLÁSSICAS DA MATEMÁTICA 69
4.1 Desigualdade triangular . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 69
4.2 Desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz . . . . . . . . . . 72
4.3 Desigualdade de Minkowski . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74
4.4 Desigualdade de Jensen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 76
4.5 Desigualdade de Young . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 82
4.6 Desigualdade de Hölder . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
5 CONCLUSÃO 84
REFERÊNCIAS 88

# INTRODUÇÃO

Problemas de otimização são aqueles em que estudamos os valores extremos (máximo e mínimo) que uma função pode assumir num determinado intervalo. Esses problemas são comumente verificados em diversas situações no nosso cotidiano, como por exemplo: no cálculo do nível de produção mais econômico para confecção de embalagens em forma de um cilindro circular reto utilizando a menor quantidade de material, na construção de galpões a fim de determinar o menor perímetro para se cercar um terreno na forma retangular com uma determinada área constante, na medicina, quando se quer determinar a sensibilidade máxima da reação do organismo à administração de um determinado medicamento, entre outros. Ademais, muitos problemas de otimização são resolvidos com o uso de alguma desigualdade. É comum alunos em sua formação básica terem acesso apenas as inequações do 1º e 2º grau; um exemplo é o currículo de Matemática do Ensino Médio do Estado de Pernambuco. Com isso o estudo do máximo e/ou mínimo de uma função em um determinado intervalo fica limitado ao estudo das coordenadas do vértice do gráfico das funções quadráticas, ou seja, os problemas de máximo e/ou mínimo de uma função fica restrito as funções quadráticas. Além do mais, sem o uso das desigualdades, muitos dos problemas de otimização só são resolvidos com o uso do Cálculo Diferencial.

Diante do exposto, entende-se que uma abordagem mais detalhada e profunda sobre as desigualdades matemáticas no Ensino Básico seja uma excelente oportunidade para os alunos vislumbrarem esse estudo como uma eficiente ferramenta na resolução de problemas de otimização, fornecendo aos mesmos uma aprendizagem mais significativa, contribuindo assim para um melhor desempenho tanto na sua vida escolar como nas avaliações externas, como Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB, Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, Olimpíada Brasileira de Matemática – OBM, dentre outras, pois esse estudo os auxilia na resolução de um conjunto amplo de problemas, sem deixar de comentar a expansão do potencial de pensamento e abstração.

O objetivo geral do trabalho é abordar a desigualdade da médias e sua utilização na resolução de problemas de otimização, para isso vamos: definir as médias quadrática, aritmética, geométrica e harmônica; demonstrar desigualdades básicas;

demonstrar a desigualdade das médias para dois números positivos e para uma lista de $n$ números positivos; representar geometricamente as médias e a desigualdade das médias para dois números positivos e aplicar a desigualdade das médias na resolução de problemas de otimização e em outros resultados envolvendo desigualdades.

Além disso, temos o intuito de fornecer aos professores do Ensino Básico um material de apoio com aplicações da desigualdade das médias na resolução de problemas de otimização que possa ser utilizado como uma extensão do currículo tradicional, já que os livros didáticos não tratam desse conteúdo, e existem poucos materiais sobre o mesmo. Além do mais, esses tópicos são recorrentes em provas externas de habilidades matemáticas.

A motivação para escrever esse trabalho surge no primeiro semestre do ano 2017 quando ao cursar a disciplina Matemática Discreta tive o contato com o capítulo: Médias e Princípio das Gavetas. A partir desse momento, começo a perceber a importância da Desigualdade das Médias na resolução de diversos problemas. Desde então, comecei a pesquisar e analisar diversos materiais sobre o assunto. Surge então, a vontade de escrever um trabalho que pudesse auxiliar os professores e os alunos do ensino básico quanto a essa questão. Salientamos também que a pesquisa foi digitada no programa TeXstudio e as figuras foram criadas no programa geogebra Classic $5$.

A metodologia utilizada nesse trabalho foi uma revisão bibliográfica, com o intuito de aprofundar o conhecimento sobre algumas desigualdades, especificamente a desigualdade das médias, com ênfase na resolução de problemas de otimização. Valendo salientar que se entende o termo pesquisa bibliográfica na perspectiva das autoras Marconi e Lakatos (2003, p. 157) como um apanhado geral sobre os principais trabalhos já realizados, revestidos de importância, por serem capazes de fornecer dados atuais e relevantes relacionados com o tema. Dessa forma, a pesquisa foi pautada na leitura detalhada de diversos trabalhos publicados: livros, artigos e materiais disponibilizados na internet, tendo como fontes principais Hardy et al. (1934), Alsina e Nelsen (2009), Cvetkoski (2012), Rigodanzo (2016). Dessa forma, dividimos o trabalho em quatro capítulos.

No primeiro capítulo, são definidas as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática para uma lista de $n$ números positivos, em seguida relatamos a importância de cada uma dessas médias no cotidiano dos alunos do Ensino Básico apresentando quatro situações-problema. Seguindo, definimos essas médias para dois números positivos, bem como indicamos suas representações geométricas.

No segundo capítulo, são demonstradas as desigualdades das médias quadrática-aritmética, aritmética-geométrica e geométrica-harmônica para dois números positivos com suas respectivas representações geométricas, e, logo em seguida, demonstramos as mesmas desigualdades para uma lista de $n$ números positivos e, por fim, a desigualdade das médias quadrática-aritmética-geométrica-harmônica para $n$ números positivos.

No terceiro capítulo, são utilizadas as desigualdades provadas no segundo capítulo na resolução de problemas de otimização, ou seja, problemas que envolvem valores máximos e/ou mínimos, sendo que resolvemos a primeira situação-problema de três maneiras distintas: a primeira resolvida através do conhecimento sobre função quadrática, isto é, determinamos o valor máximo da função através do vértice do gráfico da função quadrática, em seguida utilizamos conhecimento do Cálculo Diferencial e Integral, mais precisamente o conhecimento sobre derivadas, conteúdo ministrado em alguns cursos no Ensino Universitário, e por fim utilizamos a desigualdade das médias aritmética-geométrica.

No quarto capítulo, foi feita uma explanação sobre o surgimento da Desigualdade Triangular na Geometria Euclidiana e sua evolução para outros campos da Matemática, apresentando-a e demonstrando-a para os números reais. Além disso, enunciamos e demonstramos a Desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz, de Minkowski, Jensen, Young e Hölder. Ademais, definimos função convexa, mostrando a convexidade das funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = \dfrac{1}{x}$, pois esse conceito é essencial para a demonstração da desigualdade de Jensen.

# Capítulo 1

## ESTUDO DAS MÉDIAS

### 1.1 Médias

Neste capítulo faremos um breve estudo sobre as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática para uma lista de $n$ números positivos, em seguida vamos definir essas médias para dois números positivos, bem como indicaremos suas representações geométricas.

Percebe-se ao analisar as obras de Garcia e Souza (2016), Dante (2016), Prestes e Chavantes (2016), Paiva (2015), O Plano Nacional do Livro Didático (PNLD, 2018) e os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) que o estudo sobre médias fica limitado a média aritmética simples e a média aritmética ponderada. Além disso, as médias aritmética e aritmética ponderadas são utilizadas por muitas escolas como base para aprovação de seus alunos.

Assim, não se pode deixar de comentar a importância das médias quadrática, geométrica e harmônica no cotidiano dos alunos, pois segundo Pereira (2014), as médias aritmética e harmônica são importantes na resolução de problemas envolvendo matemática financeira, velocidade média, custo médio de bens comprados com uma quantia fixa, enquanto que a média quadrática é muito utilizada na Estatística e na Física: um exemplo prático é a tensão elétrica de sua casa, que oscila periodicamente de forma senoidal, e na média (simples) tem valor nulo (Muniz, p. 276).

É frequente verificar que o aluno do Ensino Básico, ao se deparar com uma situação-problema que envolva média, recorra de imediato à média aritmética na resolução do mesmo, dessa forma o seu conhecimento fica fragmentado e o mesmo fica sem ferramentas para resolver uma gama de problemas que envolvam as médias geométrica, harmônica e quadrática. Nessa perspectiva, nota-se a importância do conhecimento dessas médias no cotidiano. Para ilustrar essa importância apresentamos três situações-problema retiradas do livro de Morgado e Carvalho (2015, p.163 e 169).

- **Situação-problema 1**

  Uma empresa produziu, durante o primeiro trimestre do ano passado, $500$, $200$ e $200$ unidades, em janeiro, fevereiro e março, respectivamente. Pergunta-se qual foi a média mensal nesse trimestre?

- **Situação-problema 2**

  Uma empresa aumentou sua produção durante o primeiro trimestre do ano passado. Em janeiro e em fevereiro, as taxas de aumento foram de $21\%$ e $8\%$, respectivamente. Qual foi a taxa média mensal?

- **Situação-problema 3**

  Um carro percorre metade de certa distância $d$ com velocidade $v_1$ e percorre a outra metade com velocidade $v_2$. Qual é sua velocidade média?

Apresentaremos a seguir as definições das médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, retiradas de Muniz Júnior (2016, p. 2, 6, 9 e 11).

**Definição 1.1** *A média aritmética (simples) é a média com respeito a operação de adição, dessa forma, a média aritmética de uma lista de $n$ números $x_1, x_2, ..., x_n$ é um número $M_A$ tal que*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \underbrace{M_A + \ldots + M_A}_{n \text{ parcelas}} = nM_A.$$

*Assim,*

$$M_A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

**Definição 1.2** *A média geométrica é a média com respeito a operação de multiplicação, dessa forma, a média geométrica de uma lista de $n$ números positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ é um número $M_G$ tal que*

$$x_1 x_2 \cdots x_n = \underbrace{M_G \cdots M_G}_{n \text{ parcelas}} = (M_G)^n.$$

*Assim,*

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

**Definição 1.3** *A média harmônica é a média com respeito a operação de adição dos inversos, dessa forma, a média harmônica de uma lista de $n$ números positivos*

*$x_1, x_2, ..., x_n$ é um número $M_H$ tal que*

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{M_H} + \ldots + \frac{1}{M_H}}_{n \text{ parcelas}} = n\frac{1}{M_H}.$$

*Assim,*

$$\frac{1}{M_H} = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n}.$$

*De onde,*

$$M_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

**Definição 1.4** *A média quadrática é a média em relação à adição dos quadrados, dessa forma, a média quadrática de uma lista de $n$ números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é um número $M_Q$ tal que*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \underbrace{(M_Q)^2 + (M_Q)^2 + \ldots + (M_Q)^2}_{n \text{ parcelas}},$$

*ou*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n(M_Q)^2.$$

*Ou ainda,*

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} = (M_Q)^2,$$

*de onde,*

$$M_Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

Voltando as situações-problema citadas acima, é de se esperar que um aluno que só tem contato com a média aritmética resolva as situações-problema da seguinte forma:

- **Situação-problema 1**

$$M_A = \frac{500 + 200 + 200}{3} = 300 \text{ unidades.}$$

- **Situação-problema 2**

$$M_A = \frac{21\% + 8\%}{2} = 14,5\%.$$

- **Situação-problema 3**

$$M_A = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Nesse contexto, percebe-se que além do aluno ter contato com as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, ele deve ter clareza da definição de média como um valor que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar uma certa característica da mesma, ou seja, ele tem que saber qual operação matemática está envolvida na situação-problema para que consiga fazer o uso correto de cada uma das médias mencionadas. Apresentaremos abaixo as resoluções das situações-problema que mencionamos acima.

- **Situação-problema 1**

A média $M$ é tal que se a produção mensal fosse igual a $M$, a produção trimestral seria a mesma. Como a produção trimestral foi $500 + 200 + 200$ e levando em conta que a média da produção mensal é sempre $M$, temos

$$M + M + M = 500 + 200 + 200.$$

Assim,

$$3M = 900,$$

de onde,

$$M = 300.$$

Nota-se que a média desejada é a média aritmética dos números $500$, $200$ e $200$.

- **Situação-problema 2**

A taxa $i$ é tal que se em todos os meses as taxas de aumento fossem iguais a $i$, o aumento bimestral seria o mesmo. Calculando o aumento no bimestre, temos

$$100 \overset{21\%}{\longmapsto} 100 \cdot 1,21 \overset{8\%}{\longmapsto} 100 \cdot 1,21 \cdot 1,08 = 130,68.$$

Logo, o aumento no bimestre foi $30,68\%$. Se em todos os meses tivéssemos um aumento com a taxa $i$, teríamos

$$100 \overset{i\%}{\longmapsto} 100(1+i) \overset{i\%}{\longmapsto} 100(1+i)(1+i) = 100(1+i)^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 100(1+i)^2 = 100 \cdot 1,21 \cdot 1,08 \quad &\Leftrightarrow \quad (1+i)^2 = 1,21 \cdot 1,08 \\ &\Leftrightarrow \quad 1+i = \sqrt{1,21 \cdot 1,08} \\ &\Leftrightarrow \quad i \cong 1,1432 - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad i \cong 0,1432 \\ &\Leftrightarrow \quad i \cong 14,32\%. \end{aligned}$$

Nota-se que a média desejada é a média geométrica das taxas $21\%$ e $8\%$.

- **Situação-problema 3**

Sabe-se que a velocidade média é a razão entre o espaço percorrido e o intervalo de tempo para percorrer este espaço. Logo,

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Vamos dividir a resolução em duas etapas.

$1^a$ **etapa**

O carro percorre a primeira metade com velocidade $v_1$. Assim,

$$v_1 = \frac{\frac{d}{2}}{t_1} \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{\frac{d}{2}}{v_1}.$$

$2^a$ **etapa**

O carro percorre a segunda metade com velocidade $v_2$. Assim,

$$v_2 = \frac{\frac{d}{2}}{t_2} \quad \Leftrightarrow \quad t_2 = \frac{\frac{d}{2}}{v_2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Delta s &= \frac{d}{2}+\frac{d}{2}\\ &= d,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_1+t_2\\ &= \frac{\frac{d}{2}}{v_1}+\frac{\frac{d}{2}}{v_2}\\ &= \frac{(v_1+v_2)d}{2v_1v_2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{d}{\frac{(v_1+v_2)d}{2v_1v_2}}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}.$$

Nota-se que a velocidade média é a média harmônica das velocidades $v_1$ e $v_2$.

Como citado acima a média quadrática é bastante utilizada na Estatística e na Física. Desta forma, apresentaremos aqui uma situação-problema envolvendo essa média no cálculo do desvio padrão.

- **Situação-problema 4**

  Um determinado aluno fez seis atividades para média do segundo bimestre na disciplina de matemática. Suas notas foram: $9$, $8$, $7$, $6$, $4$, $2$. Qual será seu desvio padrão?

Sabemos da Estatística que o desvio padrão é uma medida que expressa o grau de dispersão de um conjunto de dados, ou seja, o desvio padrão indica quanto o conjunto de dados é uniforme.

Sendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma amostra de dados, o desvio relativo de um elemento $x_i$ é dado por:

$$D_i = x_i - M_A.$$

Assim, $D_1 = x_1 - M_A, D_2 = x_2 - M_A, \ldots, D_n = x_n - M_A$.

e o desvio padrão dessa amostra por:

$$DP = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_A)^2}{n}}.$$

Dessa forma, podemos definir o desvio padrão como sendo a média quadrática dos desvios, ou seja,

$$DP = \sqrt{\frac{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2}{n}}.$$

Assim, temos $M_A = \dfrac{9+8+7+6+4+2}{6} = 6$, $D_1 = 9-6 = 3$, $D_2 = 8-6 = 2$, $D_3 = 7-6 = 1$, $D_4 = 6-6 = 0$, $D_5 = 4-6 = -2$ e $D_6 = 2-6 = -4$.

Logo,

$$DP = \sqrt{\frac{3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-4)^2}{6}}$$

$$DP = \sqrt{\frac{9+4+1+0+4+16}{6}}$$

$$DP = \sqrt{\frac{34}{6}}$$

$$DP \cong 2,37.$$

### 1.1.1 Médias Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática para dois números positivos e suas representações geométricas

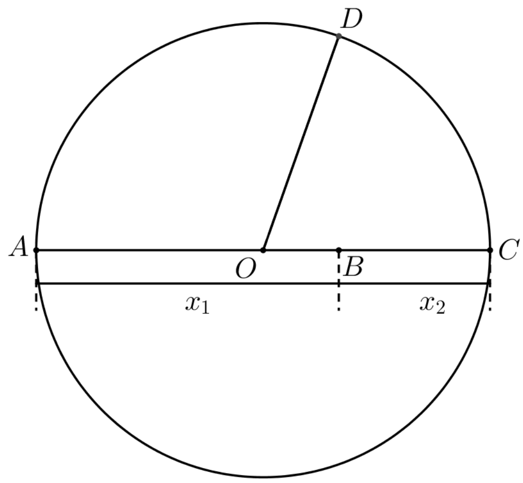
Aqui apresentamos as médias aritméticas, geométrica, harmônica e quadrática para dois números positivos $x_1$ e $x_2$, bem como suas representações geométricas, sendo essas adaptadas de Muniz Júnior (2016). O intuito de se mostrar a representação geométrica dessas médias para dois números é fornecer ao aluno uma visualização que possa ajudar a compreender visualmente cada uma delas.

**Definição 1.5** *A média aritmética para dois números positivos $x_1$ e $x_2$ é o número $M_A$ tal que*

$$M_A = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Sua representação geométrica é apresentada a seguir.

**Figura 1.1** – Representação Geométrica da Média Aritmética para dois números positivos.




Fonte: o autor

Na figura (1.1) sejam os segmentos colineares $x_1 = \overline{AB}$ e $x_2 = \overline{BC}$. Traçando-se uma circunferência $\lambda$ de centro $O$, que passa pelos pontos $A$ e $C$, observa-se que o segmento $\overline{AC}$ é o diâmetro de $\lambda$.

Assim,

$$2R = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Logo,

$$R = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

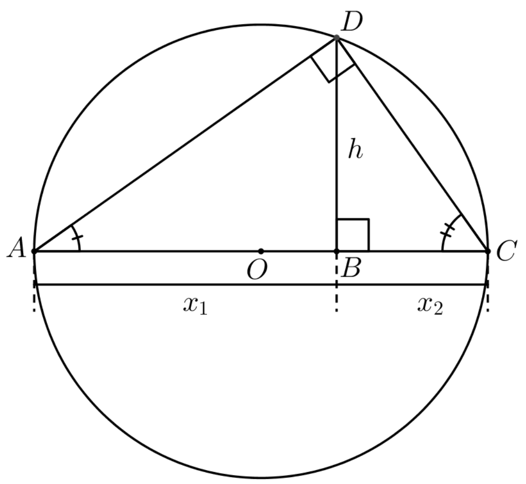
Portanto, o raio $R$ de $\lambda$ representa geometricamente a média aritmética dos números positivos $x_1$ e $x_2$.

**Definição 1.6** *A média geométrica para dois números positivos $x_1$ e $x_2$ é o número $M_G$ tal que*

$$M_G = \sqrt{x_1 x_2}.$$

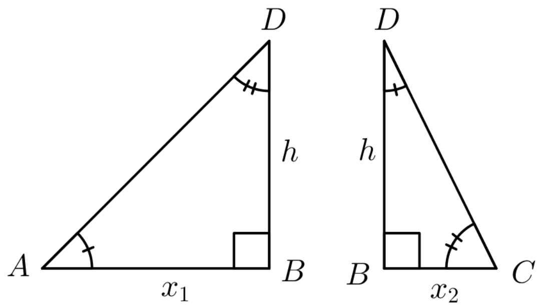
Sua representação geométrica é apresentada a seguir.

**Figura 1.2** – Representação Geométrica 1 da Média Geométrica de dois números positivos.




Fonte: o autor

**Figura 1.3** – Representação Geométrica 2 da Média Geométrica de dois números positivos.




Fonte: o autor

Na figura (1.2) consideremos os segmentos colineares $x_1 = \overline{AB}$ e $x_2 = \overline{BC}$. Traçando-se uma circunferência $\lambda$ de centro $O$ que passa pelos pontos $A$ e $C$, um segmento perpendicular ao segmento $\overline{AC}$ no ponto $B$ e um triângulo $ADC$ inscrito em $\lambda$. Podemos observar que o triângulo $ADC$ é retângulo em $D$, pois está inscrito em uma semicircunferência. Por outro lado, na figura (1.3) notamos que os triângulos $ABD$ e $DBC$ são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}},$$

de onde,

$$\frac{x_1}{h} = \frac{h}{x_2}$$

ou

$$h^2 = x_1 x_2.$$

Assim,

$$h = \sqrt{x_1 x_2}.$$

Portanto, $h$ é a média geométrica dos números positivos $x_1$ e $x_2$.

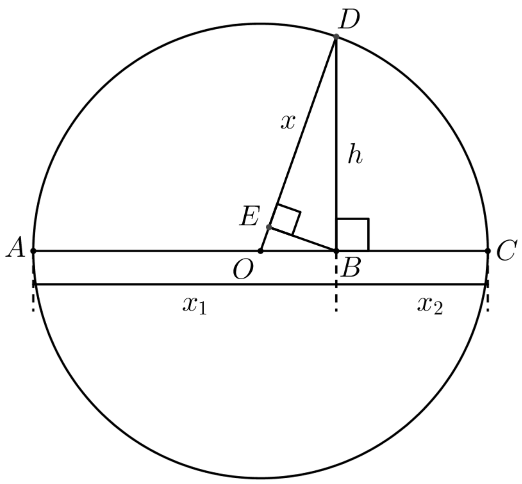
**Definição 1.7** *A média harmônica para dois números positivos $x_1$ e $x_2$ é o número*

$M_H$ *tal que*

$$M_H = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}.$$

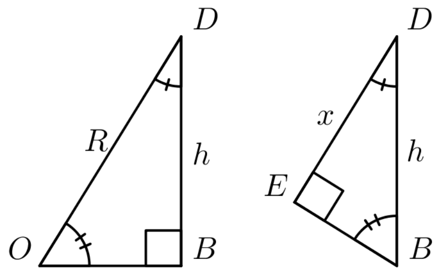
Sua representação geométrica é dada abaixo.

**Figura 1.4** – Representação Geométrica 1 da Média Harmônica para dois números positivos




Fonte: o autor

**Figura 1.5** – Representação Geométrica 2 da Média harmônica para dois números positivos




Fonte: o autor

Na figura (1.4) consideremos os segmentos colineares $x_1 = \overline{AB}$ e $x_2 = \overline{BC}$. Traçando-se uma circunferência $\lambda$ de centro $O$ que passa pelos pontos $A$ e $C$, um segmento perpendicular ao segmento $\overline{AC}$ no ponto $B$, o raio $R = \overline{OD}$, um segmento $\overline{EB}$ perpendicular ao raio $R = \overline{OD}$ passando pelo ponto $B$, temos os triângulos $ODB$ e $BDE$. Observemos, na figura (1.5), que os triângulos $ODB$ e $BDE$ são semelhantes.

Logo, $\dfrac{\overline{OD}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DE}}$, de onde segue que, $\dfrac{R}{h} = \dfrac{h}{x}$, ou ainda, $x = \dfrac{h^2}{R}$. Mas, por outro lado, $R = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ e $h^2 = x_1x_2$. Assim, $x = \dfrac{x_1x_2}{\frac{x_1 + x_2}{2}}$. De onde concluímos que

$$x = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}.$$

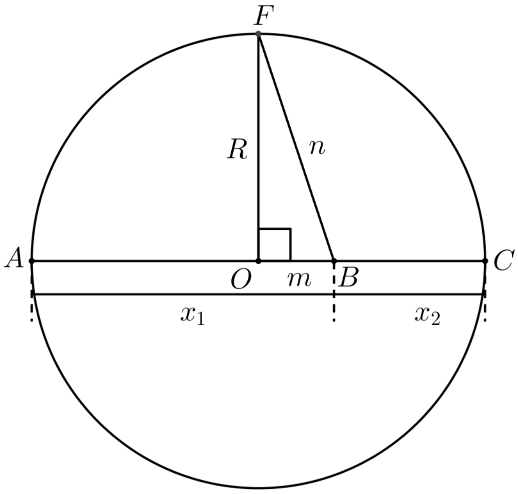
Portanto, $x$ é a média harmônica dos números positivos $x_1$ e $x_2$.

**Definição 1.8** *A média quadrática para dois números $x_1$ e $x_2$ é o número $M_Q$ tal que*

$$M_Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

Sua representação geométrica é apresentada a seguir.

**Figura 1.6** – Representação Geométrica da Média Quadrática para dois números positivos.




Fonte: o autor

Na figura (1.6) consideremos os segmentos colineares $x_1 = \overline{AB}$ e $x_2 = \overline{BC}$. Traçando-se uma circunferência $\lambda$ de centro $O$ que passa pelos pontos $A$ e $C$, o raio $R = \overline{OF}$ perpendicular a $\overline{AC}$, e o segmento $n = \overline{BF}$.

Pode-se observar que $\overline{AO} = \overline{OF} = R$ e, além disso, $\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OB} + \overline{BC}$, $R = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $\overline{OB} = m$ e $\overline{BC} = x_2$. De onde, segue que

$$2\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} + m + x_2,$$

ou seja,

$$m = \frac{x_1 + x_2}{2} - x_2.$$

Assim,

$$m = \frac{x_1 - x_2}{2}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$n^2 = m^2 + R^2.$$

Logo,

$$n^2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$$

ou

$$n^2 = \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4},$$

ou seja

$$n^2 = \frac{2(x_1^2 + x_2^2)}{4}.$$

Assim,

$$n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

Portanto, o segmento $n$ representa geometricamente a média quadrática dos números $x_1$ e $x_2$.

# Capítulo 2

## DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

### 2.1 Desigualdade

Hoje em dia as desigualdades matemáticas ocupam um lugar significativo na Matemática. Um exemplo disso, entre outros, é o seu uso na análise funcional. Porém, nem sempre foi assim, e esse fato pode ser atestado por muitos livros da História da Matemática, como História da Matemática (BOYER, 1974), História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos (ROQUE, 2012) e Introdução à História da Matemática (MOL, 2013), que não trazem nenhum capítulo ou tópico relacionado a desigualdades. Mas o que são Desigualdades Matemáticas?

Desigualdade matemática é uma expressão que estabelece uma relação de ordem entre dois elementos. Podemos representá-la pelos símbolos $<$, $\leq$, $>$, ou $\geq$ significando, respectivamente, menor do que, menor do que ou igual a, maior do que ou maior do que ou igual a.

Não se sabe ao certo quando se deu o início dos estudos sobre as desigualdades matemáticas, porém estima-se que esses estudos tenham ocorrido inicialmente no século IV a.C., com o enunciado da desigualdade triangular proposição 20 do livro 1 da obra “Os elementos” de Euclides (300 a.C) (CARVALHO, 2012). Sabe-se, também que os matemáticos antigos já possuíam conhecimentos sobre as desigualdades das médias aritméticas e geométricas para dois números, e que Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.) conhecia o que agora é chamada de desigualdade isoperimétrica (FINK, 2000). Deve-se perceber que nessa época as desigualdades eram sempre atribuídas a entes geométricos e não aritméticos.

Muitos matemáticos contribuíram para o desenvolvimento das Desigualdades Matemáticas, entre eles, Euclides (300 a.C), Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.), Jacques Bernoulli (1654 -1705), Newton (1643-1727), Cauchy (1789-1857) e, hoje em dia, já existem vários livros que só falam sobre desigualdades, como por exemplo, (HARDY et al., 1934, ALSINA e NELSEN, 2009, CVETKOSKI, 2012).

As desigualdades permeiam as nossas vidas até hoje e são bastante frequentes. Dessa forma, estudá-las no Ensino Básico é importante, pois de acordo com os

Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas (BRASIL, 2000, p. 40)

Nesse sentido, o estudo das desigualdades pode auxiliar os alunos a estruturar o pensamento, já que existe uma grande quantidade de desigualdades com níveis de complexidade diferente e muitas maneiras de demonstrá-las e resolvê-las, criando assim, um leque imenso de estratégias de resolução, com pensamentos variáveis, e muitas abstrações, contribuindo de forma significativa para o processo ensino/aprendizagem do aluno.

Nessa linha de raciocínio, vamos demonstrar neste capítulo algumas desigualdades básicas a partir das propriedades relativas ao corpo ordenado completo dos números reais, $\mathbb{R}$, com respeito a relação de ordem "$\leq$ (menor do que ou igual a)", em seguida demonstraremos a desigualdade das médias para dois números positivos $x_1$ e $x_2$, bem como ilustraremos suas representações geométricas. E, por fim, demonstraremos a desigualdade das médias para uma lista de $n$ números positivos.

Inicialmente vamos definir produto cartesiano, relação binária, relação de ordem parcial, relação de ordem total, e, logo a seguir apresentaremos algumas propriedades referentes ao corpo ordenado completo dos números reais.

Denotamos por $\mathbb{R}^*$ o conjunto dos números reais não nulos, por $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais não negativos e por $\mathbb{R}_+^*$ o conjunto dos números reais positivos.

## 2.2 Relação Binária

**Definição 2.1** *Dados dois conjuntos, $A$ e $B$, não vazios, chama-se produto cartesiano de $A$ por $B$, e denota-se por $A \times B$ (lê-se: $A$ cartesiano $B$), o conjunto formado por todos os pares ordenados $(x, y)$, com $x$ em $A$ e $y$ em $B$.*

*Em símbolos matemáticos, temos*

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \ \text{ e } \ y \in B\}.$$

**Definição 2.2** *Chama-se relação binária de $A$ em $B$ todo subconjunto $R$ de $A \times B$, ou seja, $R$ é uma relação de $A \times B$ se, e somente se, $R \subset A \times B$.*

Considerando os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Temos que o produto cartesiano de $A$ por $B$ é dado por $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$ e os subconjuntos $R_1 = \{(1, a), (2, c)\}$ e $R_2 = \{(1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$ de $A \times B$ são relações binárias com respeito $A \times B$.

Para indicarmos que o par ordenado $(x, y) \in R$, usaremos o símbolo $xRy$ que significa que $x$ está relacionado a $y$ com respeito a relação $R$. Caso contrário, usaremos $x\not{R}y$, que significa $x$ não está relacionado com $y$ com respeito a relação $R$. Assim, nos exemplos acima temos que $1R_1a$ e $1\not{R_1}b$ significam, respectivamente, que $1$ está relacionado a $a$ com respeito a relação $R_1$ e que $1$ não está relacionado a $b$ com respeito a relação $R_1$.

Quando $B = A$, dizemos que $R \subset A \times A$ é uma relação sobre o conjunto $A$.

**Definição 2.3** *Uma relação $R$ sobre um conjunto $A$ não vazio é chamada relação de ordem parcial sobre $A$ se, e somente se, $R$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Ou seja, $R$ cumpre respectivamente as seguintes propriedades.*

*i. se $x \in A$, então $xRx$;*

*ii. se $x, y \in A$, $xRy$ e $yRx$, então $x = y$;*

*iii. se $x, y, z \in A$, $xRy$ e $yRz$, então $xRz$.*

**Definição 2.4** *Seja $R$ uma relação de ordem parcial sobre $A$. Os elementos $a, b \in A$ se dizem comparáveis mediante $R$ se $aRb$ ou $bRa$.*

**Definição 2.5** *Se dois elementos quaisquer de $A$ forem comparáveis mediante $R$, então $R$ será dita relação de ordem total sobre $A$.*

A relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 2)(2, 6), (3, 3), (3, 6), (6, 6)\}$ de divisibilidade sobre $A = \{1, 2, 3, 6\}$ é uma relação de ordem parcial, mas não é uma relação de ordem total sobre $A$, pois, por exemplo, o elemento $2$ não divide $3$, ou seja, os elementos $2$ e $3$ não são comparáveis.

A relação "$\leq$" no corpo dos números reais é uma relação de ordem total, pois

i. Para todo $a \in \mathbb{R}$, tem-se $a \leq a$.

ii. Para todos $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a \leq b$ e $b \leq a$, temos que $a = b$.

iii. Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se $a \leq b$ e $b \leq c$, temos que $a \leq c$.

E, além disso, quaisquer dois elementos $a, b \in \mathbb{R}$ são comparáveis mediante $" \leq "$.

## 2.3 Propriedades do corpo ordenado dos reais

O motivo de começar nosso trabalho com as propriedades relativas à relação de ordem $" \leq "$ do corpo ordenado dos números reais $\mathbb{R}$ é que elas servem de base para demonstração de várias desigualdades básicas que serão utilizadas posteriormente para demonstrações mais elaboradas, dessa forma o leitor vai se apropriando de ferramentas para entender essas demonstrações . Além disso, a partir do capítulo três consideraremos sempre o conjunto $\mathbb{R}_+^*$.

Sejam $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$. Então

**Propriedade 2.6** *Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.*

**Propriedade 2.7** *Se $x \leq y$ e $a \leq b$, então $x + a \leq y + b$.*

**Propriedade 2.8** *Se $x \leq y$, então $x + z \leq y + z$.*

**Propriedade 2.9** *Se $x \leq y$ e $0 < a \leq b$, então $x\ a \leq y\ b$.*

**Propriedade 2.10** *Se $x \in \mathbb{R}$, então $0 \leq x^2$, com igualdade se, e somente se, $x = 0$. Mais geralmente, para $A_i \in \mathbb{R}_+^*$ e $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, tem-se:*

$$0 \leq A_1 \cdot x_1^2 + A_2 \cdot x_2^2 + ... + A_n \cdot x_n^2,$$

*com igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.*

**Observação**: escrever $x \leq y$ é equivalente a escrever $y \geq x$.

As propriedades 2.6, 2.7, 2.8,2.9 e 2.10 podem ser facilmente verificadas usando o seguinte fato:

$$x \leq y \text{ se, e somente se } y - x \geq 0.$$

### 2.4 Desigualdades Básicas

A maioria das desigualdades básicas desta seção são demonstradas usando a propriedade (2.10), ou seja, o fato de que

$$a^2 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}.$$

De onde segue que

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab. \tag{2 - 1}$$

**Proposição 2.11** *Para todo $x$ positivo, tem-se*

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

*Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $x = 1$.*

*Demonstração.* De fato, fazendo $a = \sqrt{x}$ e $b = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ em (2 - 1), temos:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

A igualdade ocorre quando $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$, ou seja, quando $\sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, de onde segue que $x = 1$. □

**Proposição 2.12** *Para todo $x, y > 0$, tem-se que*

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

*Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $x = y$.*

*Demonstração.* De fato, fazendo $a = x$, $b = y$ em (2 - 1) e dividindo por $xy$, temos

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} \geq 2 \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2. \end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $(x-y)^2=0$, de onde segue que $x=y$, ou seja,

$$\frac{x}{x}+\frac{x}{x}=1+1=2.$$

$\square$

**Proposição 2.13** *Para todo $x, y>0$, tem-se*

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4.$$

*Demonstração.* De fato, fazendo $a=x$, $b=y$ e somando-se $2xy$ a ambos os membros de (2 - 1), temos $x^2+xy+y^2+xy\geq 4xy \Leftrightarrow x(x+y)+y(x+y)\geq 4xy$. Dividindo-se essa desigualdade por $xy$, segue daí que

$$\begin{aligned}\frac{x(x+y)+y(x+y)}{xy}\geq\frac{4xy}{xy} &\Leftrightarrow \frac{x(x+y)}{xy}+\frac{y(x+y)}{xy}\geq 4\\ &\Leftrightarrow \frac{x+y}{y}+\frac{x+y}{x}\geq 4\\ &\Leftrightarrow (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4.\end{aligned}$$

$\square$

**Proposição 2.14** *Para todo $x, y\neq 0$, tem-se*

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\frac{2}{xy}.$$

*Demonstração.* De fato, fazendo $a=x$, $b=y$ em (2 - 1) e dividindo-a por $x^2y^2$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\geq\frac{2}{xy} &\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2y^2}+\frac{y^2}{x^2y^2}\geq\frac{2}{xy}\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\geq\frac{2}{xy}.\end{aligned}$$

$\square$

**Proposição 2.15** $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, *tem-se que*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz.$$

*Demonstração.* Note em (2 - 1), que $x^2 + y^2 \geq 2xy$, $x^2 + z^2 \geq 2xz$ e $y^2 + z^2 \geq 2yz$.

Somando membro a membro essas desigualdades e dividindo-se por $2$, obtemos:

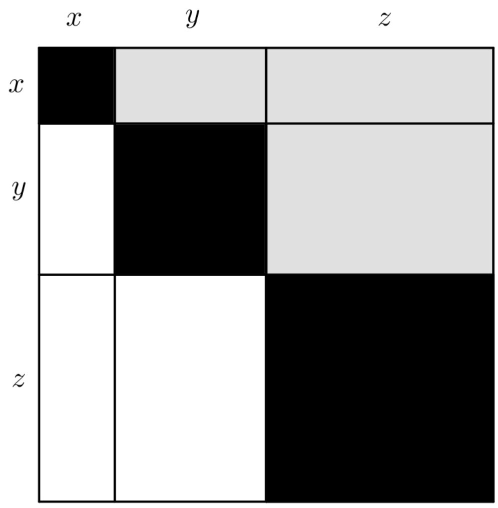
$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz.$$

□

Uma outra maneira de expressar essa proposição seria vendo-a como um problema de comparação de área, como vamos descrever a seguir.

Observe as regiões destacadas em preto e cinza na figura (2.1). Afirmamos que a região em preto tem área maior do que a região em cinza.

**Figura 2.1** – Comparação de áreas




Fonte: o autor

**Proposição 2.16** *Seja* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *uma sequência de números reais positivos. Tem-se que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2.$$

*Demonstração.* Note que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \quad \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right).$$

Usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, temos:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) &= x_1\frac{1}{x_1} + x_1\frac{1}{x_2} + x_1\frac{1}{x_3} + ... + x_1\frac{1}{x_n} \\ &+ x_2\frac{1}{x_1} + x_2\frac{1}{x_2} + x_2\frac{1}{x_3} + ... + x_2\frac{1}{x_n} \\ &+...+ x_n\frac{1}{x_1} + x_n\frac{1}{x_2} + x_n\frac{1}{x_3} + ... + x_n\frac{1}{x_n}.\end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) &= 1 + x_1\frac{1}{x_2} + x_1\frac{1}{x_3} + ... + x_1\frac{1}{x_n} + \\ &+ x_2\frac{1}{x_1} + 1 + x_2\frac{1}{x_3} + ... + x_2\frac{1}{x_n} + \\ &+...+ x_n\frac{1}{x_1} + x_n\frac{1}{x_2} + x_n\frac{1}{x_3} + ... + 1.\end{aligned}$$

Reorganizando, temos:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) &= (\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ parcelas}}) + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + ... + \left(\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}\right) \\ &+ \left(\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2}\right) + \left(\frac{x_2}{x_4} + \frac{x_4}{x_2}\right) + ... + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}}\right) \\ &= n + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \left(\frac{x_1}{x_3} + \frac{x_3}{x_1}\right) + ... + \left(\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}\right) \\ &+ \left(\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2}\right) + \left(\frac{x_2}{x_4} + \frac{x_4}{x_2}\right) + ... + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}}\right).\end{aligned}$$

Segue da proposição (2.12), que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n + 2 + 2 + ... + 2.$$

Devemos agora, calcular quantas vezes a parcela dois aparece na soma acima. Para isso, vamos usar análise combinatória. Perceba que cada parcela dois que aparece na soma corresponde a um par de números da nossa sequência $(x_1, x_2, ..., x_n)$, ou seja, devemos escolher dois elementos entre $n$. Assim, temos:

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Logo,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n + 2\left[\frac{n(n-1)}{2}\right] = n + n(n-1) = n + n^2 - n = n^2.$$

$\square$

## 2.5 Desigualdade das Médias para dois números positivos

Nota-se que os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) e os livros didáticos não abordam a desigualdade das médias, nem tampouco, suas representações geométricas para dois números positivos. Para Alsina e Nelsen (2009), o uso da visualização pode ser uma ferramenta poderosa para entender melhor algumas desigualdades matemáticas básicas.

Para os mesmos autores desenhar figuras, é um método bem conhecido para a solução de problemas, relatando ainda que um argumento geométrico pode não apenas mostrar duas coisas desiguais, mas também ajudar o observador a ver que são apenas desiguais. Continuando, acrescentam que vários argumentos visuais conhecidos, como demonstrações sem palavras, são publicados regularmente nas revistas Mathematics, The College Mathematics Journal, e outras publicações.

Portanto, o uso tanto das desigualdades quanto de suas representações podem auxiliar os alunos a encontrar soluções para vários problemas e contribuir de forma significativa no processo ensino/aprendizagem.

Nessa linha de pensamento demonstraremos nesta seção a desigualdade das médias para dois números positivos e apresentaremos suas representações geométricas. Utilizamos para isso Bonelli (2017), Lima (1991) e Muniz Júnior (2016).

### 2.5.1 Desigualdade das Médias Quadrática e Aritmética para dois números positivos

**Proposição 2.17** *Dados dois números positivos* $x_1$ *e* $x_2$*, tem-se*

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1+x_2}{2},$$

*ou seja,*

$$M_Q \geq M_A.$$

*Além disso, a igualdade vale se, e somente se,* $x_1 = x_2$.

*Demonstração.* De fato, fazendo $a = x_1$ e $b = x_2$ em (2 - 1) e depois somando-se $x_1^2 + x_2^2$ a ambos os membros, obtemos $2(x_1^2+x_2^2) \geq x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$, de onde segue que, $x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{(x_1+x_2)^2}{2}$. Multiplicando-se essa desigualdade por $\frac{1}{2}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2) \geq \frac{1}{2}\frac{(x_1+x_2)^2}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x_1^2+x_2^2}{2} \geq \frac{(x_1+x_2)^2}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x_1^2+x_2^2}{2} \geq \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1+x_2}{2}.
\end{aligned}$$

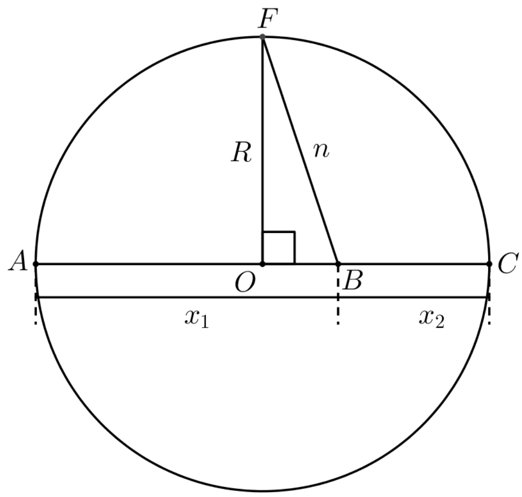
Portanto,

$$M_Q \geq M_A.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $(x_1 - x_2)^2 = 0$, de onde, concluímos que $x_1 = x_2$.
□

Geometricamente, observe na figura (2.2) que no triângulo $OFB$ retângulo em $O$, temos que, $R = \overline{OF}$ é a média aritmética e $n = \overline{FB}$ é a média quadrática. E, além disso, são respectivamente, cateto e hipotenusa do triângulo $OFB$. Logo, pela figura (2.2) podemos notar que a média quadrática é maior ou igual a média aritmética. Sendo que a igualdade ocorre quando $x_1 = \overline{AB} = \overline{BC} = x_2$, pois temos $B \equiv O$ e dessa forma, $n = R$.

**Figura 2.2** – Representação Geométrica da Desigualdade das Médias Quadrática e Aritmética para dois números positivos




Fonte: o autor

2.5.2 Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica para dois números positivos

**Proposição 2.18** *Dados dois números positivos $x_1$ e $x_2$, tem-se*

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2},$$

*ou seja,*

$$M_A \geq M_G.$$

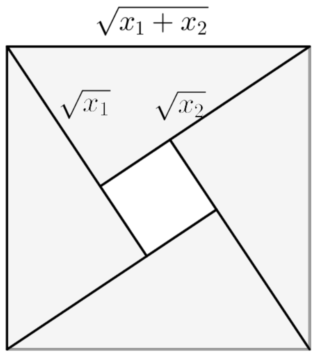
*Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $x_1 = x_2$.*

Segundo Lima (1991, p. 62) essa desigualdade é um dos resultados mais demonstrados da Matemática, existindo várias demonstrações, algumas simples e outras bem sofisticadas. Neste trabalho, abordaremos apenas duas demonstrações.

**Primeira**

Forme um quadrado de lado $\sqrt{x_1 + x_2}$ justapondo quatro triângulos retângulos congruentes, cada um deles tendo catetos $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$ e hipotenusa $\sqrt{x_1 + x_2}$. (O teorema de Pitágoras garante que, sendo $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ os catetos, a hipotenusa deve medir $\sqrt{x_1 + x_2}$. A área do quadrado, $x_1 + x_2$, é maior do que ou igual a quatro vezes a área de cada triângulo. Logo $x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2}$, ou seja, $M_A \geq M_G$. Tem-se igualdade somente quando desaparece o quadradinho do miolo. Como o lado desse quadradinho é $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}$, segue-se que $M_A = M_G$ somente quando $x_1 = x_2$. (LIMA, 1991, p. 62)

**Figura 2.3** – Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica de dois números positivos.




Fonte: o autor

**Segunda**

*Demonstração*. De fato, fazendo $a = \sqrt{x_1}$ e $b = \sqrt{x_2}$ em (2 - 1), obtemos

$$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}.$$

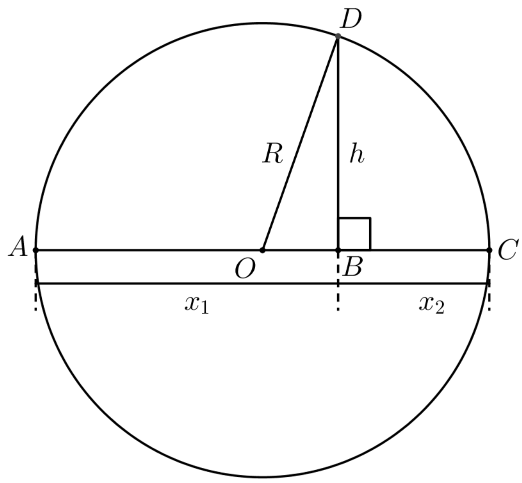
Logo,

$$M_A \geq M_G.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = 0$, ou seja, se, e somente se, $x_1 = x_2$. $\square$

Geometricamente, observe na figura (2.4) que no triângulo $ODB$ retângulo em $B$, temos que, $R = \overline{OD}$ é a média aritmética e $h = \overline{DB}$ é a média geométrica. E, além disso, são respectivamente, hipotenusa e cateto. Logo, pela figura (2.4) podemos notar que a média aritmética é maior ou igual a média geométrica. Sendo que a igualdade ocorre quando $x_1 = \overline{AB} = \overline{BC} = x_2$, pois temos $B \equiv O$ e dessa forma, $h = R$.

**Figura 2.4** – Representação Geométrica da Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica para dois números positivos.




Fonte: o autor

2.5.3 Desigualdade das Médias Geométrica e Harmônica para dois números positivos.

**Proposição 2.19** *Dados dois números positivos $x_1$ e $x_2$, tem-se*

$$\sqrt{x_1x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}},$$

*ou seja,*

$$M_G \geq M_H.$$

*Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2$.*

*Demonstração.* Aplicando a desigualdade das Médias Geométrica e Aritmética para os números positivos $\dfrac{1}{x_1}$ e $\dfrac{1}{x_2}$, obtemos $\sqrt{\dfrac{1}{x_1}\dfrac{1}{x_2}} \leq \dfrac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2}$, de onde segue que

$$\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2}.$$

Assim,

$$\sqrt{x_1x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}.$$

Logo,

$$M_G \geq M_H.$$

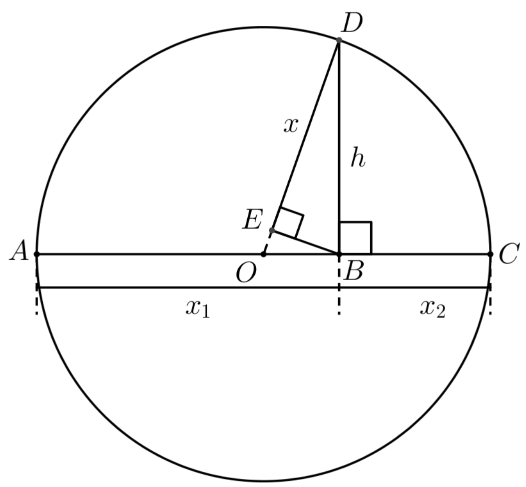
Supondo $M_G = M_H$, temos

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x_1x_2} = \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x_1x_2} = \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2} \\
&\Leftrightarrow \quad x_1x_2 = \frac{4x_1^2x_2^2}{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2} \\
&\Leftrightarrow \quad x_1^2+x_2^2+2x_1x_2 = 4x_1x_2 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1^2+x_2^2-2x_1x_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x_1-x_2)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2.
\end{aligned}
$$

Portanto, a igualdade vale se, e somente se, $x_1 = x_2$. □

Geometricamente, observe na figura (2.5) que no triângulo $EDB$ retângulo em $E$, temos que, $x = \overline{ED}$ é a média harmônica e $h = \overline{DB}$ é a média geométrica. E, além disso, são respectivamente, cateto e hipotenusa. Logo, pela figura (2.5) podemos notar que a média geométrica é maior ou igual a média harmônica. É fácil perceber que quando o ponto $B \equiv O$, o ponto $E \equiv O$, pois o segmento $\overline{BE}$ é perpendicular ao $\overline{BD} = \overline{OD}$. Assim, $x = \overline{DE} = \overline{BD} = h$, ou seja, igualdade vale para $x_1 = x_2$.

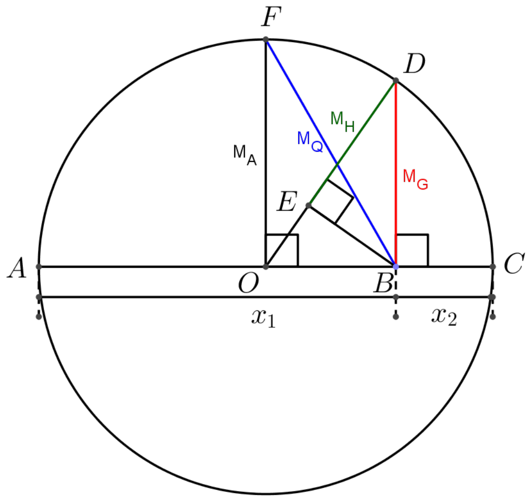
**Figura 2.5** – Representação Geométrica da Desigualdade das Médias Geométrica e Harmônica para dois números positivos




Fonte: o autor

Observe na figura (2.6) que:

**Figura 2.6** – Representação da Desigualdade das Médias para dois números positivos




Fonte: o autor

1. A média quadrática é maior do que a média aritmética, pois no triângulo retângulo $OFB$ temos que $M_Q$ é a hipotenusa enquanto que $M_A$ é um dos catetos .

2. A média aritmética é maior do que a média geométrica, pois o segmento $\overline{OF}$ é maior do que segmento $\overline{BD}$.

3. A média geométrica é maior do que a média harmônica, pois no triângulo retângulo $EDB$ temos que $M_G$ é a hipotenusa enquanto que $M_H$ é um dos catetos.

## 2.6 Desigualdade das Médias para $n$ números positivos

Nesta seção serão apresentadas as demonstrações das desigualdades das médias quadrática-aritmética, aritmética-geométrica, geométrica-harmônica e desigualdade das médias para $n$ números positivos, que servirão de base para resolução de problemas de otimização.

### 2.6.1 Desigualdade das Médias Quadrática e Aritmética

**Proposição 2.20** *Dados $n$ números positivos $x_1, x_2, ..., x_n$, tem-se*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

*ou seja,*

$$M_Q \geq M_A.$$

*Além disso, a igualdade vale se, e somente se,* $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2 & = & (x_1-x_2)^2 & + & (x_1-x_3)^2 & + & (x_1-x_4)^2 & +\ldots+ & (x_1-x_{n-1})^2 & + & (x_1-x_n)^2 \\
 & & & + & (x_2-x_3)^2 & + & (x_2-x_4)^2 & +\ldots+ & (x_2-x_{n-1})^2 & + & (x_2-x_n)^2 \\
 & & & & & + & (x_3-x_4)^2 & +\ldots+ & (x_3-x_{n-1})^2 & + & (x_3-x_n)^2 \\
 & & & & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & & & & & \ldots & (x_{n-2}-x_{n-1})^2 & + & (x_{n-2}-x_n)^2 \\
 & & & & & & & & & + & (x_{n-1}-x_n)^2.
\end{array}$$

Assim,

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j,$$

de onde conclui-se que

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \geq 2\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j, \tag{2 - 2}$$

pois

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2 \geq 0.$$

Somando-se $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2$, em ambos os membros de (2 - 2), temos

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}x_i^2 \geq 2\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

segue-se que

$$n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2.$$

Multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por $\dfrac{1}{n^2}$, temos

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \geq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2,$$

ou seja,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2,$$

tomando a raiz quadrada em ambos os membros, obtém-se

$$\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) \geq \left(\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Assim,

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Portanto,

$$M_Q \geq M_A.$$

A igualdade ocorre se, e somente se,

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} (x_i - x_j)^2 = 0.$$

O que é verdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$. □

2.6.2 Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica

Para demonstrar a desigualdade das médias aritméticas e geométricas para $n$ números positivos vamos utilizar o lema a seguir.

**Lema 2.21** *Dados $n$ números positivos $x_1, x_2, ..., x_n$.*

*Se*

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 1,$$

*então*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

*Demonstração.* Por indução sobre $n$. Para $n = 1$, temos $x_1 = 1$. Para $n = 2$, temos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ e $x_1 x_2 = 1$. Sabendo que

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{1} = 1,$$

segue que

$$x_1 + x_2 \geq 2.$$

Suponha que se $x_1 x_2 \cdots x_k = 1$, então $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq k$ para algum $k \geq 2$.

Vamos mostrar que se $x_1 x_2 \cdots x_k x_{k+1} = 1$, então $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$.

De fato:

Se $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_k = x_{k+1} = 1$, temos $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{k \text{ vezes}} + 1 = k + 1$.

Caso contrário, existe pelo menos um $x_i > 1$ e um $0 < x_j < 1$. Supondo sem perda de generalidade que $x_k > 1$ e $0 < x_{k+1} < 1$. Assim,

$$(x_k - 1)(1 - x_{k+1}) = x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} - 1 > 0,$$

o que acarreta

$$x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} > 1.$$

De onde,

$$k + x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} > k + 1.$$

Se

$$\underbrace{x_1 x_2 \cdots (x_k x_{k+1})}_{k \text{ números positivos}} = 1,$$

por hipótese de indução, temos

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + (x_k x_{k+1}) \geq k,$$

ou

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} \geq k - (x_k x_{k+1}).$$

Somando $x_k + x_{k+1}$ a ambos os membros dessa desigualdade, temos

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k - (x_k x_{k+1}) + x_k + x_{k+1} = k + x_k + x_{k+1} - (x_k x_{k+1}) > k + 1.$$

Portanto, se $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, então $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$, para todos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$.

$\square$

**Proposição 2.22** *Dados $n$ números positivos $x_1, x_2, ..., x_n$, tem-se*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

*ou seja,*

$$M_A \geq M_G.$$

*Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.*

*Demonstração.* De fato, temos que

$$M_A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

e

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Assim,

$$(M_G)^n = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Dividindo ambos os membros por $(M_G)^n$, obtemos

$$\frac{x_1}{M_G} \frac{x_2}{M_G} \cdots \frac{x_n}{M_G} = 1.$$

Aplicando o lema (2.21), temos

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{M_G} + \frac{x_2}{M_G} + ... + \frac{x_n}{M_G} \geq n \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{M_G}(x_1 + x_2 + ... + x_n) \geq n \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n M_G \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq M_G. \end{aligned}$$

Portanto,

$$M_A \geq M_G.$$

Supondo $M_A = M_G$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} = M_G \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x_1+x_2+...+x_n}{M_G} = n \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{M_G} + \frac{x_2}{M_G} + ... + \frac{x_n}{M_G} = n \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{M_G} = \frac{x_2}{M_G} = \frac{x_n}{M_G} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = M_G \\ x_2 = M_G \\ .......... \\ x_n = M_G \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = ... = x_n.
\end{aligned}$$

Logo, a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$. □

2.6.3 Desigualdade das Médias Geométrica e Harmônica

**Proposição 2.23** *Dados $n$ números positivos $x_1, x_2, ..., x_n$, tem-se*

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}},$$

*ou seja,*

$$M_G \geq M_H.$$

*Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.*

*Demonstração.* Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os números positivos $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}$, tem-se

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}.$$

Assim,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}.$$

Invertendo ambos os membros dessas desigualdade, obtemos

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \ldots = \frac{1}{x_n}$, ou seja, se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$. □

**Proposição 2.24** *(Desigualdade das médias) Para toda lista de $n$ números positivos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, tem-se*

$$M_H \leq M_G \leq M_A \leq M_Q.$$

*Além disso, em cada caso a igualdade ocorre se, e somente se,*

$$x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n.$$

*Demonstração.* Das proposições 2.20, 2.22 e 2.23, temos, respectivamente, que

$$M_Q \geq M_A, \quad M_A \geq M_G \text{ e } M_G \geq M_H.$$

O que é equivalente a

$$M_H \leq M_G, \quad M_G \leq M_A \text{ e } M_A \leq M_Q.$$

Como " $\leq$ " (menor do que ou igual a) é uma relação de ordem total sobre o corpo ordenado completo dos números reais, tem-se

$$M_H \leq M_G \leq M_A \leq M_Q.$$

Ocorrendo a igualdade em cada caso se, e somente se, $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n$. □

# Capítulo 3

## APLICAÇÃO DAS DESIGUALDADES DAS MÉDIAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Há séculos o homem se defronta com problemas que exigem a determinação de valores máximos e/ou mínimos de certas aplicações, um exemplo clássico é o de determinar dentre todas as curvas planas fechadas com um determinado comprimento, a que delimita maior área. Este problema é conhecido como problema isoperimétrico, que segundo Carvalho (2012) foi o primeiro problema de otimização discutido na literatura científica.

Os problemas onde se desejam determinar os pontos extremos de uma função (ponto mínimo ou máximo) em um determinado intervalo são denominados problemas de minimização e maximização e hoje em dia recebem a nomenclatura de problemas de otimização. São bastante comuns no nosso cotidiano, abrangendo diversas áreas do conhecimento como engenharia, biologia, economia e administração, sendo muitos deles resolvidos com o uso de matemática avançada (ou não elementar), mais precisamente com o uso da noção de derivada.

Porém, existem vários outros problemas de otimização que são resolvidos sem que haja a necessidade do uso da derivada, e nesse caso usaremos como ferramenta a desigualdade das médias, com ênfase maior na desigualdade das médias aritmética e geométrica. Para Rech (2008, p. 8)

> Os problemas de otimização despertam a curiosidade e desafiam os jovens a buscar soluções para situações de relevante importância para a sociedade moderna. Estimula-se assim o gosto pelo estudo e pela compreensão da matemática.

Dessa forma, o professor deve inserir esses problemas em suas aulas para oportunizar aos alunos um maior envolvimento com a matemática, incentivando-os a elaborarem caminhos e estratégias que levem a resolução dos mesmos, dando oportunidade para discussão e apresentação dessas estratégias. Em vista disso, abre-se um leque para novas ideias que podem contribuir de forma significativa para um melhor conhecimento matemático para vida desses alunos.

### 3.1 Resolução de problemas

Analisando (PERNAMBUCO, 2012) nota-se o destaque que aqueles parâmetros dão a importância da resolução de problemas como uma das metodologias a serem adotadas visando à melhoria do ensino-aprendizagem da disciplina. Ainda para (PERNAMBUCO, 2012) um primeiro caminho para levar o estudante a “fazer” Matemática é privilegiar a resolução de problemas como estratégia de ensino e aprendizagem.

Notadamente o estudo da matemática através da resolução de problemas vem crescendo a cada dia e teve como pilar o Matemático húngaro George Pólya que faleceu em setembro de 1985 e tem hoje como defensor o professor Luiz Roberto Dante que vê essa metodologia de ensino como ponto de partida para o ensino/aprendizagem da Matemática, pois para esses autores resolver problemas está no centro da Matemática.

Quando nos referimos a problemas matemáticos, sempre pensamos em situações nas quais o aluno consegue chegar a uma solução adequada, embora há problemas importantes e sem solução, usando uma ou mais estratégias para solucioná-lo. Para isso, é necessário compreensão do mesmo para que se consiga estabelecer uma linha de pensamento que o leve a solução.

Para Dante (1991), um problema matemático é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos específicos para solucioná-lo. Ressaltando ainda que o mesmo deve ser desafiador, real, interessante e acima de tudo ter um nível adequado de dificuldade.

Para o mesmo autor o objetivo da metodologia com resolução de problemas é fazer o aluno pensar produtivamente, desenvolver o raciocínio lógico, ensiná-lo a enfrentar situações novas, dar a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática, tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras e, equipá-lo com estratégias para resolver problemas dando-lhe uma boa base matemática.

Mesmo recomendada por (PERNAMBUCO, 2012) muitos professores não se sentem seguros em trabalhar com essa metodologia, seja por pouco conhecimento sobre a mesma, ou simplesmente pela sensação que esses professores têm de estar perdendo muito tempo tanto na hora de planejar como na hora de ministrar suas aulas, pois facilmente pode-se ocupar o tempo de uma aula inteira apenas com a discussão e compreensão de uma única situação-problema.

Pólya (1995) e Dante (1991) defendem que a aprendizagem através da metodologia de resolução de problemas consiste em um obstáculo a ser superado pelos professores, pois mesmo exigindo muito tempo para preparar e ministrar as aulas, quando bem aplicada essa metodologia torna os alunos autoconfiantes e dessa forma, deixam de ser meros expectadores e, passam a ser agentes ativos no processo ensino-aprendizagem.

De acordo com os PCNs (BRASIL, 2012) o conhecimento matemático decorre das necessidades cotidianas que fazem com que o aluno desenvolva uma habilidade prática que permita reconhecer os problemas, buscar e selecionar informações que possibilitem a resolução dos mesmos.

Para Polya o professor deve envolver os alunos na resolução de problemas que sejam compatíveis com os seus conhecimentos, auxiliando-os por meios de indagações que os instiguem a criarem uma estratégia para resolvê-los, e dessa maneira, estimular o gosto pelo raciocínio independente, dando-lhes oportunidade para descobrirem os seus talentos.

Para o mesmo autor, ao se resolver um problema deve-se seguir as seguintes etapas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto, sem que nenhuma etapa seja eliminada.

Nessa perspectiva, a metodologia resolução de problema pode ajudar a tornar as aulas mais prazerosas e produtivas, fazendo com que o aluno se sinta mais seguro e comece a buscar métodos, estratégias e seleção de informações. Essa metodologia, pode auxiliar nas tomadas de decisões, na compreensão de conceitos, culminando com uma base sólida e com isso desenvolvendo capacidade para lidar com a atividade matemática dentro e fora do âmbito escolar.

Por conseguinte, iniciaremos nossas aplicações com um problema de otimização que pode ser modelado por uma função quadrática de três maneiras diferentes: a primeira será através do vértice do gráfico dessa função, a segunda será por derivada e a terceira aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica. Em seguida resolveremos outros problemas utilizando somente a desigualdade das médias.

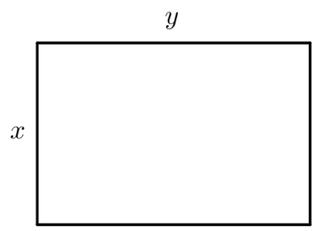
**Aplicação 1** *Um agricultor deseja criar frangos para produção de carne. Sabendo que o número de aves é de 8 a 10 cabeças por metro quadrado e que ele possui 24 metros de tela para construir um galpão na forma retangular, quais devem ser as*

*dimensões desse galpão para um melhor aproveitamento da área?*
*Fonte: o autor*

De acordo com Os Parâmetros Curriculares de Matemática do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO) o aluno deve reconhecer, na representação gráfica da função do segundo grau, elementos como zeros, intersecção com o eixo das ordenadas, eixo de simetria, concavidade e pontos de máximo/mínimo. Então, é de se esperar que o aluno do Ensino Básico de Pernambuco use a seguinte estratégia para resolução da aplicação (1) :

Seja o retângulo da figura (3.1) cujas as dimensões dos seus lados são, respectivamente, $x$ e $y$.

**Figura 3.1** – Área máxima




Fonte: o autor

Assim, temos que o perímetro é igual a $p = 2(x + y) = 24$ e a área $S = xy$.

De onde, temos

$$y = 12 - x$$

e

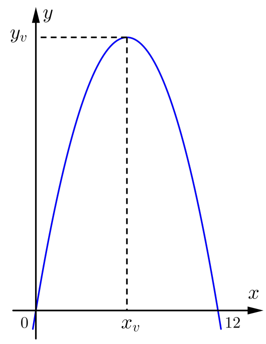
$$S = xy.$$

Substituindo $y = 12 - x$ em $S = xy$, obtemos:

$$S(x) = x(12 - x) = 12x - x^2.$$

Cujo gráfico é

**Figura 3.2** – Gráfico da função $S(x) = 12x - x^2$




Fonte: o autor

Fazendo o estudo dessa função através de seu gráfico que é uma parábola, nota-se que a parábola tem concavidade voltada para baixo, pois $a < 0$.

Assim, a função possui valor máximo, e através da leitura das coordenadas do vértice dessa parábola, temos

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-1)} = 6$$

e

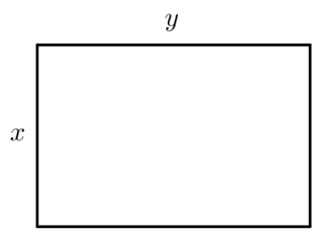
$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(12^2 - 4(-1)0)}{4(-1)} = \frac{-144}{-4} = 36.$$

Logo, conclui-se que a área é máxima quando $x = 6\ m$ e $y = 12 - 6 = 6\ m$, isto é, obtêm-se a área máxima quando o retângulo é um quadrado de lado $6\ m$.

Resolvendo a aplicação (1) com o uso da derivada, conteúdo ministrado no Ensino Superior, usa-se a seguinte estratégia de resolução:

Seja o retângulo da figura (3.3) onde as dimensões dos seus lados são, respectivamente, $x$ e $y$.

**Figura 3.3** – Área máxima




Fonte: o autor

Assim, temos que o perímetro é igual a $p = 2(x + y) = 24$ e a área $S = xy$.

De onde, temos

$$y = 12 - x$$

e

$$S = xy.$$

Substituindo $y = 12 - x$ em $S = xy$, obtemos:

$$S(x) = x(12 - x) = 12x - x^2.$$

Como o objetivo é obter a área máxima, temos que maximizar a função que representa a área do cercado que é dada por

$$S(x) = 12x - x^2; 0 \leq x \leq 12.$$

- Encontra-se a derivada primeira da função $S(x) = 12x - x^2$ no intervalo de $(0, 12)$.

$$S'(x) = (12x - x^2)' = 12 - 2x.$$

- Determina-se os pontos críticos fazendo $S'(x) = 0$.

$$12 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 12 \Leftrightarrow x = 6.$$

- Para encontrar a área máxima, basta comparar o valor da função S no ponto crítico encontrado e nos extremos do intervalo $[0, 12]$.

Assim,

$$S(0) = 12 \cdot 0 - 0^2 = 0, \quad S(6) = 12 \cdot 6 - 6^2 = 36 \text{ e } S(12) = 12 \cdot 12 - 12^2 = 0.$$

Daí concluímos, pelo teste da primeira derivada, que $S$ tem um máximo relativo em $x = 6$.

Portanto, a área é máxima para $x = 6m$ e $y = 12 - 6 = 6m$, isto é, obtemos área máxima quando o retângulo é um quadrado de lado $6m$ e área máxima igual a $36m^2$.

Agora, aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica para dois números, isto é, $M_G \leq M_A$, tem-se a seguinte estratégia:

Sejam $x$ e $y$ as dimensões dos lados do retângulo. Assim, temos que o perímetro é igual $p = 2(x+y) = 24$, de onde, segue que $x + y = 12$ e a área $S = xy$. Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os números positivos $x$ e $y$, tem-se

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad &\Leftrightarrow \sqrt{xy} \leq \tfrac{12}{2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{xy} \leq 6 \\ &\Leftrightarrow xy \leq 36. \end{aligned}$$

Como a igualdade ocorre se, e somente se $x = y$. Segue que $x^2 = 36$, de onde, $x = 6$.

Portanto, conclui-se que o valor máximo de $S = xy$ é $36m^2$, com $x = y = 6m$.

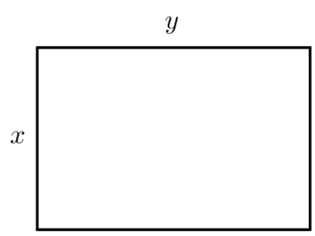
Modelando a aplicação (1) recaímos em uma função quadrática, cuja representação gráfica é uma parábola, dessa forma os alunos do Ensino Básico de Pernambuco podem usar o seu conhecimento sobre a representação gráfica e seus elementos notáveis para solucioná-lo. Porém, observamos que uma solução bem mais simples é aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os números $x$ e $y$.

**Aplicação 2** *Um empresário pretende construir um galpão retangular com $400\ m^2$ de área utilizando um menor perímetro possível. Quais devem ser as dimensões desse galpão?*
*Fonte: o autor*

Modelando a situação-problema, temos:

Seja o retângulo da figura (3.4) cujas as dimensões dos seus lados são, respectivamente, $x$ e $y$.

**Figura 3.4** – Perímetro mínimo




Fonte: o autor

Dessa maneira, a área é $S = xy = 400\ m^2$, de onde, $y = \dfrac{400}{x}$ $(i)$ e o perímetro é $p = 2x + 2y$ $(ii)$. Substituindo $(i)$ em $(ii)$, temos que o perímetro $p$ é uma função de $x$ dada por:

$$p(x) = 2x + \frac{800}{x}. \tag{3 - 1}$$

Para a solução dessa situação-problema deve-se mínimizar a função perímetro (3 - 1), que não é uma função quadrática. E, como de acordo com Pernambuco (2012) o único conhecimento sobre valores máximos e/ou mínimos de uma função fica restrito ao conhecimento gráfico da função quadrática e seus elementos notáveis, nota-se a impossibilidade de um aluno do Ensino Básico de Pernambuco resolver essa situação-problema. Porém, podemos aplicar o conhecimento sobre a derivada ou o conhecimento sobre a desigualdade das médias aritmética e geométrica. No nosso caso, utilizaremos o conhecimento sobre a desigualdade das médias.

Sejam $x$ e $y$ as dimensões do lado desse retângulo. Dessa forma, a área é $S = xy = 400\ m^2$ e o perímetro é $p = 2x + 2y$. Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os números $2x$ e $2y$, temos

$$\sqrt{(2x)(2y)} \leq \tfrac{2x+2y}{2} \quad \Leftrightarrow \sqrt{4xy} \leq \tfrac{2(x+y)}{2}.$$

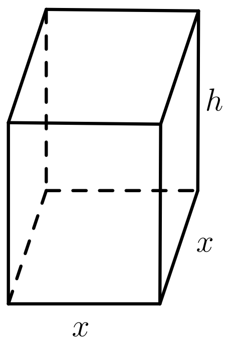
Substituindo $xy$ por $400$, segue que $\sqrt{1600} \leq x + y \Leftrightarrow 40 \leq x + y$. Como a igualdade ocorre se, e somente se, $x = y$, temos que $x = y = 20$. E, portanto, o retângulo de área $400\ m^2$ com menor perímetro é o quadrado de lados de medida iguais a $20\ m$.

Nessa situação-problema fica evidenciado que o uso da desigualdade das médias é a melhor das alternativas, já que para o uso da derivada precisamos definir o domínio da função, determinar a derivada primeira para encontrar os pontos críticos e, por fim, comparar o valor da função $p(x)$ nos pontos críticos encontrados e nos extremos do domínio.

**Aplicação 3** *Um pecuarista pretende construir um tanque na forma de uma paralelepípedo de base quadrada sem tampa em sua fazenda para acumular água da chuva com maior volume possível, sabendo que o mesmo dispõe de* $12\ m^2$ *de material para confeccioná-lo, quais as dimensões que o tanque deve ter?*
*Fonte: o autor*

Inicialmente, observe a figura (3.5) a seguir que representa o tanque a ser construído.

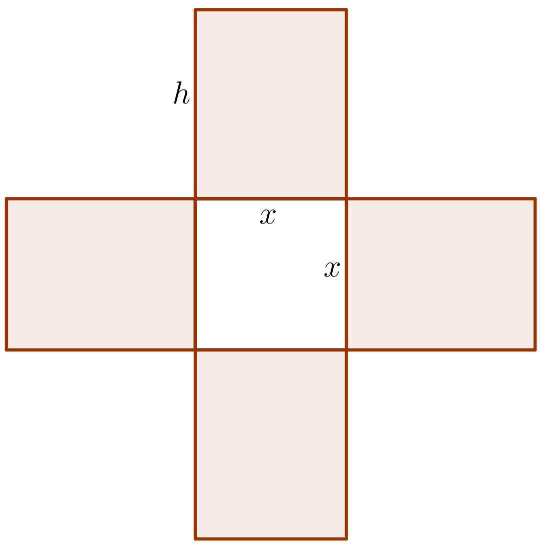
**Figura 3.5** – Problema do Tanque.




Fonte: o autor

A figura (3.6) representa a planificação do tanque.

**Figura 3.6** – Planificação do tanque




Fonte: o autor

Modelando a situação-problema, temos que a área total do tanque é quatro vezes a área de um retângulo de dimensões $x$ e $h$ mais uma vez a área de um quadrado de lado $x$, ou seja, a área total do tanque é $A_T = 4xh + x^2 = 12$, de onde $h = \dfrac{12 - x^2}{4x}$ $(i)$, e o volume é $V = x^2h$ $(ii)$. Substituindo $(i)$ em $(ii)$, temos que o volume do tanque é uma função de $x$ dada por:

$$V(x) = x^2\left(\frac{12 - x^2}{4x}\right). \tag{3 - 2}$$

Para resolver essa situação-problema deve-se minimizar a função volume (3 - 2), que não representa uma função quadrática e dessa forma deve-se usar ou a noção de derivada ou a desigualdade das médias aritméticas e geométricas. Usaremos aqui, a segunda possibilidade.

Dessa forma teremos a área total do tanque $A_T = 4xh + x^2 = 2xh + 2xh + x^2$, logo $2xh + 2xh + x^2 = 12$ e o volume é $V = x^2h$. Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os números $2xh$, $2xh$ e $x^2$, temos

$$\begin{aligned} \frac{2xh + 2xh + x^2}{3} \geq \sqrt[3]{(2xh)(2xh)x^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{12}{3} \geq \sqrt[3]{4(x^2h)^2} \\ &\Leftrightarrow \quad 4 \geq \sqrt[3]{4(x^2h)^2}. \end{aligned}$$

Substituindo $x^2h$ por $V$, temos $4 \geq \sqrt[3]{4V^2} \Leftrightarrow 4^3 \geq 4V^2$, de onde, segue $4^2 \geq V^2$, e, portanto, $4 \geq V$. Logo, o volume máximo do tanque é de $4m^3$, sendo que a igualdade ocorre, se e somente se, $2xh = x^2$. Como $2xh + 2xh + x^2 = 12$, então $3x^2 = 12$, ou seja, $x = 2$. Logo, $2h = x = 2$ implica $h = 1$.

Portanto, o agricultor deverá construir um tanque com $V = 4m^3$, com base quadrada de dimensões $x = 2m$ e altura $h = 1m$.

Vamos supor que um aluno ao tentar resolver o problema acima aplique a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os números $4xh$ e $x^2$. Como $A_T = 4xh + x^2 = 12$ e $V = x^2h$.Temos,

$$\begin{aligned} \frac{4xh + x^2}{2} \geq \sqrt{(4xh)x^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{12}{2} \geq \sqrt{4x(hx^2)} \\ &\Leftrightarrow \quad 6 \geq \sqrt{4x(hx^2)} \\ &\Leftrightarrow \quad 36 \geq 4x(hx^2) \end{aligned}$$

Como $x > 0$ e $V = hx^2$, segue que $\dfrac{36}{4x} \geq V$, de onde, concluímos que $\dfrac{9}{x} \geq V$, ou seja, o valor máximo de seria $V = \dfrac{9}{x}$, que é uma função de $x$.

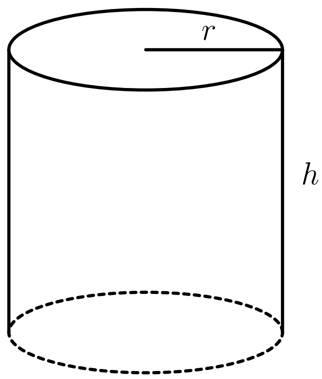
Por isso, que na resolução há necessidade de fazer o termo $4xh = 2xh + 2xh$ e depois aplicar desigualdade das médias para os números $2xh$, $2xh$ e $x^2$. Essa situação-problema contribui para aprendizagem significativa do aluno, pois lhe dá oportunidade de rever suas estratégias e corrigi-las e, ao mesmo tempo faz com que aprenda com os próprios erros.

Deve-se salientar ainda, que o aluno deve ter um prévio conhecimento de Geometria Espacial, em particular de área total e volume de figuras espaciais.

**Aplicação 4** *Se uma lata de zinco de volume $16\pi m^3$ deve ter a forma de um cilindro circular reto, quais devem ser a altura e o raio do cilindro para que a quantidade de material necessário para a sua fabricação seja a menor possível?*
*Fonte: (BONELLI-2017)*

Inicialmente observe a figura (3.7) abaixo que representa a lata a ser construída

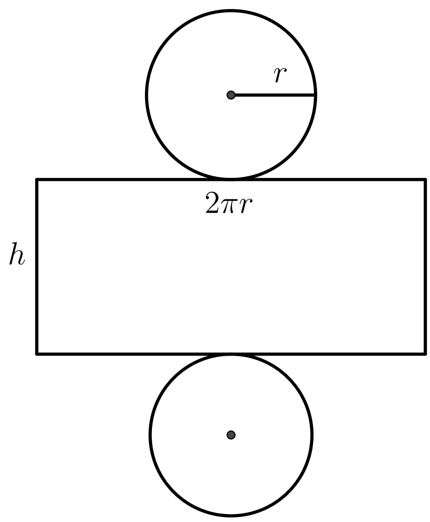
**Figura 3.7** – Problema da lata.




Fonte: o autor

Observe a figura (3.8) que representa a planificação da lata.

**Figura 3.8** – Planificação da lata.




Fonte: o autor

Pela planificação, temos que a área total da lata é duas vezes a área do círculo de raio $r$ mais a área do retângulo de dimensões $2\pi r$ e $h$, ou seja, a área total é igual a $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + \pi rh + \pi rh$, e o volume é $V = \pi r^2 h = 16\pi$, ou seja, $r^2 h = 16$. Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os números $2\pi r^2$, $\pi rh$ e $\pi rh$, e substituindo $2\pi r^2 + \pi rh + \pi rh$ por $A_T$ e $r^2 h$ por $16$, temos que $\dfrac{2\pi r^2 + \pi rh + \pi rh}{3} \geq \sqrt[3]{(2\pi r^2)(\pi rh)(\pi rh)} \Leftrightarrow \dfrac{A_T}{3} \geq \sqrt[3]{2\pi^3 (r^2 h)^2} = \sqrt[3]{2\pi^3 16^2}$. De onde, segue que $A_T \geq 3\sqrt[3]{2^9\pi^3}$, ou, $A_T \geq 3 \cdot 2^3\pi$. Assim, $A_T \geq 24\pi$.

De onde, concluímos que a área total mínima é $A_T = 24\pi$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $2\pi r^2 = \pi rh$, logo, $h = 2r$, e de $\pi r^2 h = 16\pi$ segue que $r^2(2r) = 16$. Assim, $r = 2$ e $h = 4$.

Portanto, a lata cilíndrica deverá ter área total mínima igual a $24cm^2$, com raio $r = 2cm$ e altura $h = 4cm$.

Observe também nessa questão, que se o aluno aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os números $2\pi r^2$ e $2\pi rh$, teremos $\dfrac{2\pi r^2 + 2\pi rh}{2} \geq \sqrt{(2\pi r^2)(2\pi rh)}$, de onde, $2\pi r^2 + 2\pi rh \geq 2\sqrt{4\pi^2 r(r^2 h)}$, como $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ e $r^2 h = 16$, segue que $A_T \geq 2\sqrt{4\pi^2 r \cdot 16}$, ou seja, $A_T \geq 2\sqrt{64\pi^2 r}$, isto é, $A_T \geq 16\pi\sqrt{r}$, de onde, conclui-se que a área mínima é dada por $V(r) = 16\pi\sqrt{r}$, que é uma função de $r$. Por isso a necessidade de fazer $2\pi rh = \pi rh + \pi rh$ e aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os números $2\pi r^2$, $\pi rh$ e $\pi rh$.

Também vale salientar aqui, que o aluno deve ter conhecimento de Geometria Espacial e que essa situação-problema também pode ser resolvida com a noção de derivada e, nesse caso, modelando a situação-problema (4) temos $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ $(i)$ e o volume $V = r^2 h = 16$ $(ii)$, de onde, concluímos que $h = \dfrac{16}{r^2}$ $(iii)$, substituindo $(iii)$ em $(i)$, temos que a área total $A_T$ é uma função de $x$ dada por

$$A_T(x) = 2\pi r^2 + \frac{32\pi}{r}. \tag{3 - 3}$$

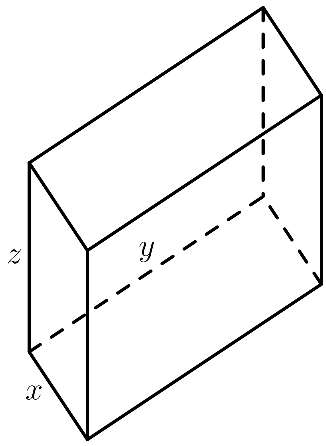
E minimizando a função $A_T$ através da derivada primeira chega-se a solução do mesmo.

**Aplicação 5** *No laboratório de Matemática de um colégio o professor pede aos alunos para construírem um paralelepípedo com maior volume possível. Sabendo-se que a* *soma das três arestas perpendiculares entre si é igual a $S$. Qual o volume máximo e qual é o paralelepípedo?*

*Fonte: o autor*

A figura (3.9) representa o paralelepípedo

**Figura 3.9** – Problema do Paralelepípedo.




Fonte: o autor

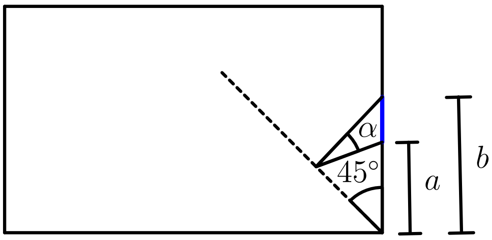
Seja $S = x+y+z$ a soma das arestas perpendiculares $x$, $y$ e $z$ do paralelepípedo e $V = xyz$ o seu volume. Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os números positivos $x$, $y$ e $z$, temos $\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \Leftrightarrow \dfrac{S}{3} \geq \sqrt[3]{V}$, de onde concluímos que $\left(\dfrac{S}{3}\right)^3 \geq V$. E, portanto, o volume máximo do paralelepípedo considerado é $V = \left(\dfrac{S}{3}\right)^3$ e o mesmo é um cubo, pois a igualdade ocorre se, e somente se, quando $x = y = z$.

Observe que nessa situação-problema o aluno aplica diretamente a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os números positivos $x$, $y$ e $z$, sem a necessidade de se aplicar nenhum artifício, além de ter um prévio conhecimento de Geometria Espacial.

**Aplicação 6** *Dentro de um campo de futebol, um jogador corre em direção à bandeirinha de escanteio do time adversário ao longo de uma reta que forma $45°$ com a linha de fundo do campo, ver figura (3.10).*

*Fonte: (COSTA DA FONTE-2013)*

**Figura 3.10** – Ângulo máximo de visão.



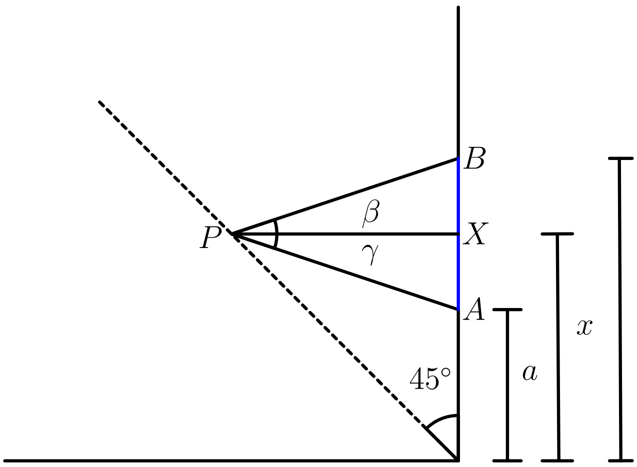

Fonte: o autor

Os postes da meta distam $a$ e $b$ (com $a < b$ ) da lateral do campo. Mostre que o jogador vê a meta sob ângulo $\alpha$ máximo quando sua distância $x$ ao fundo do campo é igual a

$$\sqrt{\frac{ab}{2}}.$$

Vamos resolver essa situação-problema para o caso em que $a \leq x \leq b$.

**Figura 3.11** – Ângulo máximo de visão 2




Fonte: o autor

Observe na figura (3.11) que o ângulo de visão do jogador $\alpha = \beta + \gamma$. E, sabendo-se que um ângulo agudo é máximo quando sua tangente é máxima, devemos então maximizar a tangente do ângulo $\alpha$.

Temos que,

$$tg\alpha = tg(\beta + \gamma) = \frac{tg\beta + tg\gamma}{1 - tg\beta tg\gamma}.$$

Ainda na figura (3.11) temos que $tg\gamma = \dfrac{\overline{AX}}{\overline{PX}} = \dfrac{x-a}{x}$ e $tg\beta = \dfrac{\overline{BX}}{\overline{PX}} = \dfrac{b-x}{x}$. Logo,

$$
\begin{aligned}
tg\alpha = \frac{\dfrac{x-a}{x}+\dfrac{b-x}{x}}{1-\left(\dfrac{x-a}{x}\right)\left(\dfrac{b-x}{x}\right)} &= \frac{\dfrac{x-a+b-x}{x}}{1-\dfrac{(x-a)(b-x)}{x^2}} \\
&= \frac{\dfrac{b-a}{x}}{\dfrac{x^2-(x-a)(b-x)}{x^2}} \\
&= \frac{b-a}{\dfrac{x^2-(x-a)(b-x)}{x}} \\
&= \frac{b-a}{x-\dfrac{(x-a)(b-x)}{x}}.
\end{aligned}
$$

Perceba que para maximizar o valor da $tg\alpha$, devemos minimizar

$$
x-\frac{(x-a)(b-x)}{x}.
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
x-\frac{(x-a)(b-x)}{x} &= x-\frac{bx-x^2-ab+ax}{x} \\
&= x-\frac{x(a+b)-x^2-ab}{x} \\
&= \frac{x^2-x(a+b)+x^2+ab}{x} \\
&= \frac{2x^2-x(a+b)+ab}{x} \\
&= 2x-(a+b)+\frac{ab}{x}.
\end{aligned}
$$

Para isto basta minimizar os termos que dependem de $x$. Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os números positivos $2x$ e $\dfrac{ab}{x}$, segue $M_A = \dfrac{2x+\dfrac{ab}{x}}{2} \geq \sqrt{2x\left(\dfrac{ab}{x}\right)} = \sqrt{2ab}$, de onde, $M_A \geq \sqrt{2ab}$.

Portanto, o valor mínimo para $M_A$ ocorre para $2x = \dfrac{ab}{x}$, ou seja, para $x = \sqrt{\dfrac{ab}{2}}$.

Pode-se observar que a solução dessa situação-problema requer do aluno conhecimento de trigonometria no triângulo retângulo, da soma de dois arcos nas relações trigonométricas, com destaque para a tangente da soma de dois arcos e de uma certa habilidade em Matemática, para finalmente aplicar a desigualdade das médias aritmética e geométrica, ou seja, o aluno tem que possuir um bom conhecimento matemático para resolver essa questão aplicando a ferramenta desigualdade das médias.

**Aplicação 7** *Determine o maior valor possível para* $sen\ x + cos\ x$*.*

*Fonte:* https://www.youtube.com/watch?v=0wSh6UMTmUc

Temos aqui uma situação-problema que envolve as funções trigonométricas seno e cosseno e de acordo com PERNAMBUCO (2012)

> Às funções trigonométricas, apresentam importante papel como modelos matemáticos para os fenômenos periódicos, devendo ser ressaltadas as funções seno e cosseno. Alguns tópicos usualmente privilegiados no estudo da trigonometria podem ser dispensados, como, por exemplo, as outras funções trigonométricas, as fórmulas arcos soma e diferença e as identidades trigonométricas.

Dessa forma, não podemos afirmar que um aluno do Ensino Básico do Estado de Pernambuco saberia ou não resolver essa situação-problema através do uso de trigonometria, pois se o professor dispensar em suas aulas as fórmulas do arco soma, necessário para resolução por trigonometria como veremos a seguir, o aluno não teria como resolver.

Resolvendo através da trigonometria. Considere $y = sen\ x + cos\ x$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos

$y^2 = [sen\ x + cos\ x]^2$

$y^2 = sen^2\ x + cos^2\ x + 2sen\ x\ cos\ x$

Como $sen^2\ x + cos^2\ x = 1$ e $2sen\ x\ cos\ x = sen\ 2x$, segue que

$y^2 = 1 + sen\ 2x \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 + sen\ 2x}$

Como queremos determinar o valor máximo, desprezamos o valor negativo. Assim, temos que $y$ é máximo quando $sen\ 2x$ é máximo, ou seja, quando $sen\ 2x = 1$, de onde segue que o valor máximo de $y$ é igual a $\sqrt{2}$, ocorrendo quando $2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, ou seja, quando $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$.

Agora, aplicando a desigualdade das médias quadrática e aritmética para os números os números positivos $sen\ x$ e $cos\ x$, temos

$$\frac{sen\ x + cos\ x}{2} \leq \sqrt{\frac{sen^2\ x + cos^2\ x}{2}}.$$

Como $sen^2\, x + cos^2\, x = 1$, segue que $\dfrac{sen\ x + cos\ x}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Daí, concluímos que, $sen\ x + cos\ x \leq \sqrt{2}$.

Portanto, o maior valor possível para $sen\ x + cos\ x$ é $\sqrt{2}$ e isso ocorre quando $sen\ x = cos\ x$, ou seja, quando $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

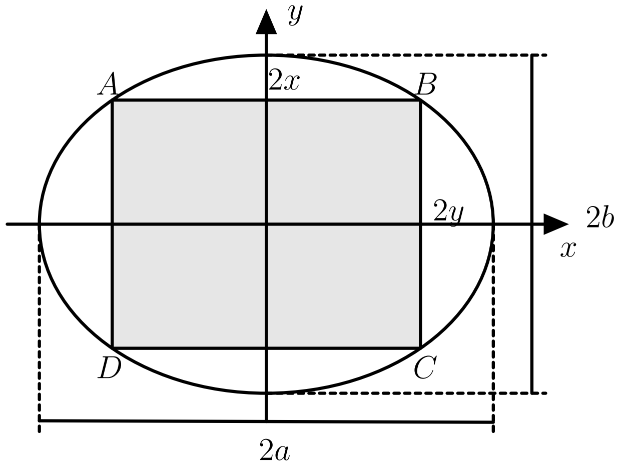
Observando as soluções, percebe-se que o uso da desigualdade das médias quadrática e aritmética é mais simples do que uso da trigonometria na solução dessa situação-problema.

**Aplicação 8** *Determine as dimensões do retângulo de área máxima, com seus lados paralelos aos eixos coordenados, que esteja inscrito em uma elipse de equação* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

*Fonte: (RIGODANZO, 2016)*

Seja o retângulo $ABCD$ de lados $2x$ e $2y$ inscrito na elipse $\varepsilon$ representado na figura (3.12).

**Figura 3.12** – Área do retângulo inscrito na elipse.




Fonte: o autor

Na figura (3.12) podemos observar que a área do retângulo inscrito na elipse $\varepsilon$ é dada por $(2x)(2y) = 4xy$. Aplicando a desigualdade das médias quadrática e geométrica para os números positivos $\dfrac{x}{a}$ e $\dfrac{y}{b}$, temos

$$\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right)} \leq \sqrt{\frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}{2}}.$$

Substituindo $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ por $1$, temos

$$\sqrt{\frac{xy}{ab}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

De $S=4xy$ temos $xy=\dfrac{S}{4}$, de onde segue que

$$\sqrt{\frac{S}{4ab}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{S}{4ab} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow S \leq 2ab.$$

Portanto, a área máxima é igual $S=2ab$ e ocorre quando $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

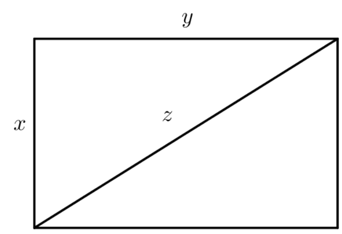
Essa situação-problema requer conhecimento sobre a equação da elipse e sua representação gráfica, ou seja, que o aluno saiba qual é o significado dos coeficientes $a$ e $b$, para poder modelar o problema. Em seguida, ele deve perceber que aplicando a média quadrática para os números positivos $\dfrac{x}{a}$ e $\dfrac{y}{b}$ vai obter o termo $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ para depois substituir por $1$. Dessa forma, o aluno vai desenvolvendo métodos e artifícios matemáticos para solução de situações-problema.

**Aplicação 9** *De todos os retângulos com a mesma medida de diagonal, determine qual tem maior perímetro?*

*Fonte: (RIGODANZO, 2016)*

Modelando a situação-problema, veja a figura (3.13)

**Figura 3.13** – Retângulo com diagonal fixa




Fonte: o autor

Sejam, respectivamente, $x$, $y$ e $z$, as dimensões dos lados e da diagonal do retângulo com $z$ fixo como mostra a figura (3.13). Dessa forma, temos que o perímetro $P=2(x+y)$ e que $z^2=x^2+y^2$.

Aplicando a desigualdade das médias quadrática e aritmética para os números positivos $x$ e $y$, temos $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} \geq \dfrac{x+y}{2}$, de onde segue que, $\sqrt{\dfrac{z^2}{2}} \geq \dfrac{x+y}{2}$. Assim, $\dfrac{z}{\sqrt{2}} \geq \dfrac{x+y}{2}$.

Multiplicando essa desigualdade por $2(\sqrt{2})^2$, obtemos

$$2\sqrt{2}z \geq 2(x+y).$$

De onde, concluímos que

$$P \leq 2\sqrt{2}z.$$

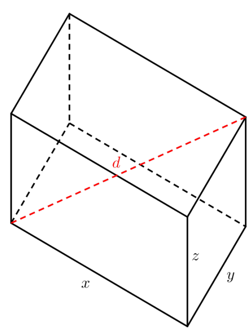
Portanto, o maior perímetro possível é $P = 2\sqrt{2}z$, ocorrendo quando $x = y$ e o retângulo que possui maior perímetro com diagonal fixa é o quadrado.

Nessa situação-problema temos dois fatos a serem considerados para sua solução, o primeiro é que a média quadrática dos números positivos nos possibilita o uso do teorema de Pitágoras para determinar a medida da diagonal do retângulo e o segundo é a manipulação algébrica para deixarmos de um lado da desigualdade o perímetro $P = 2(x+y)$ e com isso concluir a solução.

**Aplicação 10** *Determinar as dimensões do paralelepípedo retângulo de menor diagonal possível, sabendo que a soma dos comprimentos de todas suas arestas é 12. Fonte: (MUNIZ JÚNIOR, 2016)*

Consideremos um paralelepípedo retângulo cujas dimensões de suas arestas são, respectivamente, $x$, $y$ e $z$, com diagonal $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ como mostra a figura (3.14). Sabendo que a soma dos comprimentos de suas arestas é igual a $4x+4y+4z = 12$, podemos escrever $x+y+z = 3$.

**Figura 3.14** – Paralelepípedo de menor volume possível




Fonte: o autor

Aplicando a desigualdade das médias quadrática e aritmética para os números positivos $x$, $y$ e $z$, temos
$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3}.$$

Assim,
$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{3}} \geq 1.$$

Multiplicando-se essa desigualdade por $\sqrt{3}$, obtemos

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq \sqrt{3}.$$

De onde concluímos que $d \geq \sqrt{3}$.

Portanto, a menor diagonal possível é igual a $\sqrt{3}$, ocorrendo quando $x = y = z$, ou seja, quando $x = y = z = 1$.

Note que para aplicar a desigualdade das médias quadrática e aritméticas, o aluno precisa calcular antes o valor da diagonal do paralelepípedo retângulo, ou seja, é necessário conhecimento sobre Geometria Espacial e posteriormente visualizar que com o uso da desigualdade citada chega-se a solução da situação-problema.

**Aplicação 11** *Determine o valor máximo da função $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3(1-x)$.*

*Fonte:* https://www.youtube.com/watch?v=h-TBGzdi2k4&index

Note que $f(x) = x^3(1-x) = xxx(1-x)$. Assim, $\dfrac{f(x)}{27} = \left(\dfrac{x}{3}\right)\left(\dfrac{x}{3}\right)\left(\dfrac{x}{3}\right)(1-x)$.

Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os números positivos $\dfrac{x}{3}$, $\dfrac{x}{3}$, $\dfrac{x}{3}$ e $(1-x)$, temos

$$\frac{\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+(1-x)}{4} \geq \sqrt[4]{\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x}{3}\right)(1-x)},$$

ou seja,
$$\frac{1}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{f(x)}{27}}.$$

Elevando essa desigualdade a quarta potência e multiplicando por $27$, obtemos

$$\frac{27}{256} \geq f(x).$$

Daí concluímos que o maior valor da função $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3(1-x)$ é $f(x) = \dfrac{27}{256}$, ocorrendo se, e somente se, $\dfrac{x}{3} = (1-x)$, ou seja, quando $x = \dfrac{3}{4}$.

Essa situação-problema envolve o valor máximo de uma função explicita, que pode ser resolvida com o uso da noção derivada, já que a função acima é derivável em todo seu domínio. Porém, na solução apresentada utilizou-se a desigualdade das médias aritmética e geométrica, que necessita do aluno um boa habilidade com manipulações matemáticas.

Observe na resolução que o aluno deve perceber que a função $f(x) = x^3(1-x)$ pode ser escrita da seguinte forma $f(x) = xxx(1-x)$, em seguida observar que a soma $x + x + x + (1-x) = 2x + 1$ é um valor que depende de $x$, e que para obter um valor constante precisa-se dividir cada termo $x$ por $3$, obtendo, a seguinte soma $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{3} + (1-x) = 1$. Por isso, escrevemos $\dfrac{f(x)}{27} = \left(\dfrac{x}{3}\right)\left(\dfrac{x}{3}\right)\left(\dfrac{x}{3}\right)(1-x)$.

# Capítulo 4

## DESIGUALDADES CLÁSSICAS DA MATEMÁTICA

### 4.1 Desigualdade triangular

A desigualdade triangular surgiu na Geometria Euclidiana e representa uma reformulação do conceito intuitivo de que é mais curto o caminho reto entre $A$ e $B$ do que o caminho de $A$ até $C$ somado ao de $C$ até $B$ numa superfície plana idealizada, sendo essa a proposição $20$ do livro $I$ de "Os elementos"de Euclides.

Com desenvolvimento da Matemática essa teoria ganhou novos rumos, sendo hoje estudada em vários campos da Matemática. Como por exemplo, nos números reais, no $\mathbb{R}^n$, nos números complexos, nos espaços normados, nas integrais e, sua importância nos conceitos da Análise Matemática e Topologia à transformaram em um axioma na definição métrica, ou seja, toda métrica $d$ deve satisfazer

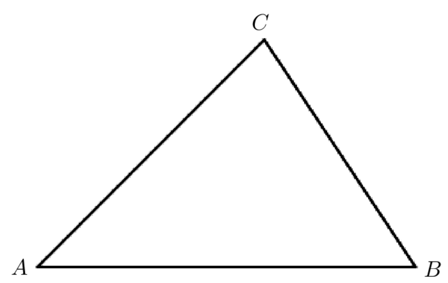
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Aqui enunciaremos a desigualdade na Geometria Euclidiana e no conjunto dos números reais, onde faremos a demonstração para a última com algumas de suas consequências.

**Teorema 4.1** *(Desigualdade triangular). Dado um triângulo $ABC$ o comprimento de um dos lados é sempre inferior à soma dos comprimentos dos outros dois lados, ou seja,*

$$AB < AC + CB, \quad AC < AB + BC \quad \text{e} \quad BC < BA + AC.$$

**Figura 4.1** – Desigualdade Triangular




Fonte: o autor

Para apresentar a Desigualdade Triangular para os números reais, consideremos a função real $|*|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Da definição, temos que:

$$|x| \geq 0, \quad |x|^2 = x^2, \quad |-x| = |x| \quad \text{e} \quad x \leq |x|.$$

Observe que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $|x| = max\{-x, x\}$.

**Teorema 4.2** *(Desigualdade triangular para números reais). Sejam $a$ e $b$ números reais quaisquer, então*

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

*Demonstração.*

Se $a+b \geq 0$, então $|a+b| = a+b \leq |a|+|b|$.

Se $a+b < 0$, então $|a+b| = -(a+b) = -a-b \leq |a|+|b|$. □

**Corolário 4.3** *Sejam $a$ e $b$ números reais quaisquer, então*

$$|a-b| \leq |a| + |b|.$$

*Demonstração.* Note que $|a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + |-b| = |a|+|b|$. □

**Corolário 4.4** *Sejam $a$ e $b$ números reais quaisquer, então*

$$|a-b| \geq |a| - |b|.$$

*Demonstração.* Note que $|a| = |b+(a-b)| \leq |b| + |a-b|$, subtraindo-se $|b|$ em ambos os membros, obtemos $|a|-|b| \leq |a-b|$, ou seja, $|a-b| \geq |a|-|b|$. □

**Corolário 4.5** *Sejam $a$ e $b$ números reais quaisquer, então*

$$|a-b| \geq ||a|-|b||.$$

*Demonstração.* Note que $|a| = |a-b+b| \leq |a-b|+|b|$.

Logo,

$$|a|-|b| \leq |a-b|. \tag{4 - 1}$$

Por outro lado,

$$|b| = |b-a+a| \leq |b-a|+|a|.$$

Donde

$$|b|-|a| \leq |b-a| = |a-b|.$$

Multiplicando-se essa desigualdade por $-1$, segue que

$$-|a-b| \leq |a|-|b| \tag{4 - 2}$$

De (4 - 1) e (4 - 2) tem-se que

$$-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|$$

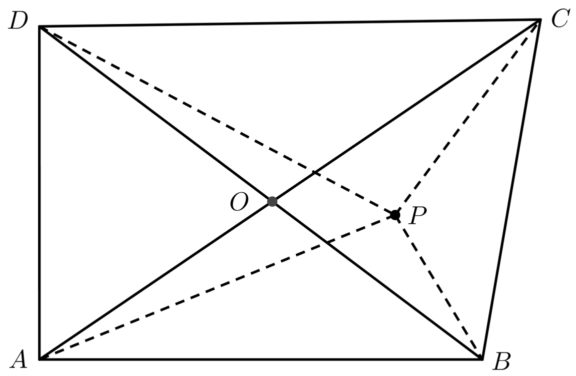
Portanto,

$$||a|-|b|| \leq |a-b|.$$

□

**Exemplo 4.6** *Quatro cidades rurais, $A$, $B$, $C$ e $D$, estão situadas geograficamente formando um quadrilátero convexo. Deseja-se construir uma central de distribuição de energia para as quatro cidades de modo que a soma total das distâncias da central a cada uma das quatro cidades seja a mínima possível. Vamos mostrar que a central deverá ser construída no ponto $O$ de intersecção das diagonais do polígono.*

**Figura 4.2** – Problema da central de energia




Fonte: o autor

De fato, seja o polígono $ABCD$, o ponto $0$ de intersecção das diagonais e um ponto $P$ diferente de $O$, representados na figura (4.2), a desigualdade triangular nos garante que

$$AO + OC = AC < AP + PC$$

e

$$BO + OD = BD < BP + PD,$$

de onde segue que

$$AO + OC + BO + OD < AP + PC + BP + PD,$$

como era esperado.

### 4.2 Desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz

Essa desigualdade foi enunciada pela primeira vez pelo matemático francês Augustin-Louis Cauchy em $1821$, no ano de $1859$ o matemático russo Viktor Yakovlevich Bunyakovsky, que trabalhou com Mecânica Teórica e Teoria dos Números apresentou uma demonstração para o caso dimensionalmente infinito, e a versão correspondente para espaços de produtos internos foi obtida pela H.A. Schwartz no ano de $1888$.

Aparece em vários ramos da Matemática, como por exemplo: em análise, nas séries infinitas e integração de produtos, na teoria de probabilidades aplicando-se as variâncias e covariâncias, em problemas de majoração de expressões algébricas e geométricas, etc.

**Teorema 4.7** *(Desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz). Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ números reais. Então,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2,$$

*isto é,*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2.$$

*A igualdade ocorre se, e somente se, as sequências $(a_1, a_2, ..., a_n)$ e $(b_1, b_2, ..., b_n)$ forem proporcionais.*

*Demonstração.* Consideremos o trinômio quadrado

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i x)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 - 2a_ib_ix + b_i^2x^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)x^2.$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i x)^2 \geq 0, \tag{4 - 3}$$

então o delta da equação do segundo grau (4 - 3) deve ser não positivo, ou seja,

$$\left(-2\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \leq 0,$$

ou seja,

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leq 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

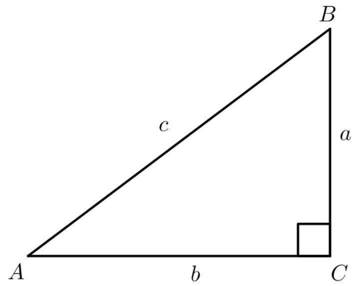
Portanto,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a_i - b_ix = 0$, $\forall i = 1, 2, ..., n$, isto é, se, e somente se, $a_i = b_ix$, $\forall i = 1, 2, .., n$. $\square$

**Exemplo 4.8** *Entre todos os triângulos retângulos de catetos $a$ e $b$ e hipotenusa $c$ fixada, o que tem maior soma dos catetos $s = a + b$ é o triângulo isósceles.*

**Figura 4.3** – Triângulo retângulo




Fonte: o autor

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schartz para os números reais $a$, $b$ e $1$, $1$ e, sabendo que $c^2 = a^2 + b^2$, temos que

$$s = a + b = a \cdot 1 + b \cdot 1 \leq (\sqrt{a^2 + b^2})(\sqrt{1^2 + 1^2}) = c\sqrt{2}$$

a igualdade ocorrendo quando $\lambda = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{1}$, ou seja, quando $a = b$.

### 4.3 Desigualdade de Minkowski

Essa desigualdade é um importante objeto de estudo da Matemática, pois a mesma estabelece que as funções de espaços integrais $\mathcal{L}_p$ são espaços vetoriais normados e, além disso, determina que $d(f, g) = N_p(f - g)$ é uma métrica sobre $\mathcal{L}_p$[1].

**Teorema 4.9** *(Desigualdade de Minkowski) Dados $a_i$, $b_i$ com $1 \leq i \leq n$, números reais, tem-se*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

*Demonstração.* Note que

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \tag{4 - 4}$$

[1] São espaços normados cujos pontos são sequências de números reais ou complexos

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz no lado direito de (4 - 4), temos que

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i} = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_1^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2 \qquad (4 - 5)$$

Tomando a raiz quadrada em ambos os membros de (4 - 5) obtemos

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

□

**Exemplo 4.10** *(APMO,2003) Sejam $a$, $b$ e $c$ lados de um triângulo, com $a+b+c=1$ e $n \geq 2$ um inteiro. Vamos mostrar que*

$$\sqrt[n]{(a^n+b^n)} + \sqrt[n]{(b^n+c^n)} + \sqrt[n]{(c^n+a^n)} < 1 + \frac{\sqrt[n]{2}}{2}.$$

*Demonstração.* Como $a$, $b$ e $c$ são lados de um triângulo, então existem números positivos $x$, $y$ e $z$ tais que $a = x+y$, $b = y+z$ e $c = x+z$. Tomando $x = \dfrac{a+c-b}{2}$, $y = \dfrac{a+b-c}{2}$ e $z = \dfrac{b+c-a}{2}$.

Temos que $x+y+z = \dfrac{1}{2}$. Assim, usando a Desigualdade de Minkowski, seque que

$$\begin{aligned}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}} = [(x+y)^n+(y+z)^n]^{\frac{1}{n}} &\leq (x^n+z^n)^{\frac{1}{n}} + (2y^n)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq ((x+z)^n)^{\frac{1}{n}} + y\sqrt[n]{2} \\ &= c + y\sqrt[n]{2}.\end{aligned}$$

Isto é,

$$\sqrt[n]{a^n+b^n} < c + y\sqrt[n]{2}.$$

Analogamente, temos:

$$\sqrt[n]{b^n + c^n} < a + z\sqrt[n]{2} \text{ e } \sqrt[n]{c^n + a^n} < b + x\sqrt[n]{2}.$$

Portanto,

$$\sqrt[n]{(a^n + b^n)} + \sqrt[n]{(b^n + c^n)} + \sqrt[n]{(c^n + a^n)} < a + b + c + \sqrt[n]{2}(x + y + z) = 1 + \frac{\sqrt[n]{2}}{2}.$$

$\square$

## 4.4 Desigualdade de Jensen

Essa Desigualdade estabelece em estatística um resultado no qual para algumas funções, o valor de $f(X)$ é maior ou igual que o valor $f(E(X))$.

Para demonstrarmos essa desigualdade vamos primeiramente definir função convexa, pois a mesma está relacionada ao conceito de convexidade.

**Definição 4.11** *Uma função* $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *é dita convexa se para quaisquer* $a, b \in [\alpha, \beta]$ *e para todo* $\lambda \in [0, 1]$ *satisfaz*

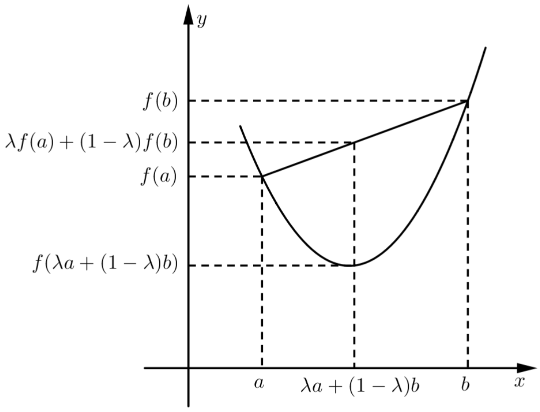
$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

*Quando apenas a desigualdade* $(<)$ *ocorre,* $f$ *é dita estritamente convexa.*

Observe que para todo $\lambda \in [0, 1]$, temos que $\lambda a + (1 - \lambda)b \in [a, b]$.

Geometricamente, a definição de convexidade significa que para cada par de pontos $a$ e $b$ escolhidos no intervalo $[\alpha, \beta]$ o gráfico da função encontra-se abaixo do segmento de reta secante que junta os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, como mostra a figura (4.4).

**Figura 4.4** – Gráfico de uma função convexa




Fonte: o autor

**Exemplo 4.12** *A função $f(x) = x^2$ é convexa em qualquer intervalo $[\alpha, \beta]$.*

Sejam $a, b \in [\alpha, \beta]$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que $a < b$. Então, para todo $\lambda \in [0, 1]$ valem as desigualdades

$$(\lambda a + (1-\lambda)b)^2 = \lambda^2 a^2 + (1-\lambda)^2 b^2 + 2\lambda(1-\lambda)ab$$

Como $a^2 + b^2 \geq ab$, segue que

$$\begin{aligned} \lambda^2 a^2 + (1-\lambda)^2 b^2 + 2\lambda(1-\lambda)ab &\leq \lambda^2 a^2 + (1-\lambda)^2 b^2 + \lambda(1-\lambda)(a^2 + b^2) \\ &= a^2[\lambda^2 + \lambda(1-\lambda)] + b^2[(1-\lambda)^2 + \lambda(1-\lambda)] \\ &= \lambda a^2 + (1-\lambda)b^2. \end{aligned}$$

Portanto, $(\lambda a + (1-\lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1-\lambda)b^2$, ou seja,

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b),$$

mostrando a convexidade da função $f(x) = x^2$.

**Exemplo 4.13** *A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é convexa em qualquer intervalo $[\alpha, \beta]$ com $\alpha$ positivo.*

De fato: Sendo $a, b \in [\alpha, \beta]$ com $a < b$, para todo $\lambda \in [0, 1]$ tem-se

$$\begin{aligned} 1 &= (\lambda + (1-\lambda))^2 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2 \end{aligned}$$

Como $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, temos que

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2 &\leq \lambda^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2 \\ &= \lambda^2 + \frac{a}{b}\lambda(1-\lambda) + \frac{b}{a}\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2 \\ &= \lambda a\left(\frac{\lambda}{a} + \frac{(1-\lambda)}{b}\right) + (1-\lambda)b\left(\frac{\lambda}{a} + \frac{(1-\lambda)}{b}\right) \\ &= (\lambda a + (1-\lambda)b)\left(\frac{\lambda}{a} + \frac{(1-\lambda)}{b}\right). \end{aligned}$$

Portanto, $1 \leq (\lambda a + (1-\lambda)b)\left(\frac{\lambda}{a} + \frac{(1-\lambda)}{b}\right)$, ou seja,

$$\frac{1}{\lambda a + (1-\lambda)b} \leq \lambda\frac{1}{a} + (1-\lambda)\frac{1}{b},$$

mostrando a convexidade da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Observemos que, usando a desigualdade das médias aritmética e quadrática para os números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ obtemos

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n},$$

isto é,

$$(M_A(a_1, a_2, \ldots, a_n))^2 \leq M_A(a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2). \tag{4 - 6}$$

Por outro lado, aplicando a desigualdade das médias harmônica e aritmética, obtemos

$$\frac{1}{M_A(a_1, a_2, \ldots, a_n)} \leq M_A\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right). \tag{4 - 7}$$

O seguinte resultado garante que as propriedades (4 - 6) e (4 - 7), satisfeitas pelas funções $x^2$ e $\frac{1}{x}$, são válidas para qualquer função convexa.

**Teorema 4.14** *Seja* $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *uma função convexa e sejam* $\lambda_i \in [0, 1] (i = 1, \ldots, n)$ *tais que* $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$*. Então, para quaisquer* $a_i \in [\alpha, \beta] (i = 1, \ldots, n)$ *vale*

$$f(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) \leq \lambda_1 f(a_1) + \cdots + \lambda_n f(a_n).$$

*isto é,*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i), \tag{4 - 8}$$

*A igualdade ocorre quando* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

*Demonstração.* Por Indução sobre $n$, temos

Se $n = 1$, temos $\lambda_1 = 1$, pois hipótese, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$. Assim,

$$f(\lambda_1 a_1) = f(1 \cdot a_1) = f(a_1) = 1 \cdot f(a_1) = \lambda_1 f(a_1).$$

Se $n = 2$, temos que $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, por hipótese. Agora, como $f$ é convexa em $(\alpha, \beta)$, segue que

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) &= f(\lambda_1 a_1 + (1 - \lambda_1) a_2) \leq \lambda_1 f(a_1) + (1 - \lambda_1) f(a_2) \\ &= \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) \end{aligned}$$

Logo,

$$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \leq \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2).$$

Suponhamos, agora, que dado $n$ natural vale (4 - 8), então temos que mostrar a validade de

$$f\left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j\right) \leq \sum_{j=i}^{n+1} \lambda_j f(a_j). \tag{4 - 9}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j + \left(1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right) a_{n+1} \qquad (4 - 10) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j} a_j\right) + \left(1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right) a_{n+1}. \end{aligned}$$

Assim, usando o fato que $\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\alpha} = 1$ e a hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j\right) &\leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j} a_j\right) + (1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j) f(a_{n+1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j} f(a_j)\right) + (1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j) f(a_{n+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(a_j), \end{aligned} \tag{4 - 11}$$

□

Note que, quando $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, a desigualdade (4 - 8) nos diz que

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)}{n},$$

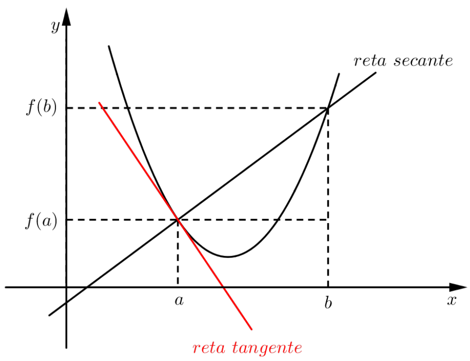
ou seja, $f(M_A(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \leq M_A(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$, quando a função $f(x)$ é convexa.

**Teorema 4.15** *Seja $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no intervalo aberto $(\alpha, \beta)$. Se $f$ é convexa em $[\alpha, \beta]$ então,*

$$f(b) \geq f(a) + f'(a)(b - a)$$

*para todo $a, b \in [\alpha, \beta]$.*

**Figura 4.5** – Relação convexidade, reta tangente e reta secante.




Fonte: o autor

*Demonstração.* Se $a = b$, temos $f(b) - f(a) = f(b) - f(b) \geq f'(a)(b - b)$.

Se $a \neq b$, sem perda de generalidade, é possível considerar $b > a$. Como $f$ é convexa, então, para todo $\lambda \in [0, 1]$, temos

$$f(\lambda b + (1 - \lambda)a) \leq \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a)$$

de onde segue que

$$f(\lambda b + a - \lambda a) \leq \lambda f(b) + f(a) - \lambda f(a),$$

ou seja,

$$f(\lambda(b - a) + a) \leq \lambda(f(b) - f(a)) + f(a). \tag{4 - 12}$$

Tomando $0 < h < b - a$ e fazendo $\lambda = \dfrac{h}{b - a}$, isto é, $h = \lambda(b - a)$ tem-se $h \in [0, 1]$ e portanto, de (4 - 12), se segue:

$$\begin{aligned} f(a + h) &\leq \frac{h}{b - a}(f(b) - f(a)) + f(a) \\ f(a + h) - f(a) &\leq \frac{h}{b - a}(f(b) - f(a)) \\ \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &\leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{aligned}$$

Como $f$ é diferenciável em a, fazendo $h$ tender a zero, temos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq f'(a)$$

$$f(b) - f(a) \geq f'(a)(b - a)$$

$$f(b) \geq f(a) + f'(a)(b - a).$$

□

## 4.5 Desigualdade de Young

Essa desigualdade é utilizada na demonstração da desigualdade de Hölder, sendo também utilizada no estabelecimento de estimativas com normas em espaços de Sobolev[2] com aplicações na teoria das EDPs não lineares.

**Teorema 4.16** *(Desigualdade de Young) Sejam* $p, q \geq 1$ *números reais tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Para quaisquer* $a, b \in \mathbb{R}_*^+$*, tem-se*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Demonstração.* A prova no caso $ab = 0$ é trivial, então consideramos $a, b > 0$. Caso tenhamos $a^p = b^q$, sabendo que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, temos

$$ab = a(b^q)^{1/q} = aa^{p/q} = a^{p/p}a^{p/q} = a^{p(1/p+1/q)} = a^p = a^p \cdot 1 = a^p \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

Agora, para o caso $a^p \neq b^p$, note que a função $f(x) = exp(x)$ é estritamente convexa, pois $f''(x) > 0$ para todo $x$ real. Então, para todo $\lambda$ no intervalo $(0, 1)$ e todos números reais $x, y$ com $x \neq y$, segue que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Apliquemos isso para $\lambda = \dfrac{1}{p}$, $1 - \lambda = \dfrac{1}{q}$, $x = ln\ a^p$ e $y = ln\ b^q$

$$ab = \exp(ln\ ab) = \exp\left(\frac{ln\ a^p}{p} + \frac{ln\ b^q}{q}\right) < \frac{\exp(ln\ a^p)}{p} + \frac{\exp(ln\ b^q)}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

que demonstra o resultado. □

---

[2] São espaços definidos sobre domínio arbitrário $\Omega \in \mathbb{R}^N$ e são subespaços vetoriais dos espaços $L^p(\Omega)$.

## 4.6 Desigualdade de Hölder

**Teorema 4.17** *(Desigualdade de Hölder) Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *e* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *números reais positivos, com* $n \in \mathbb{N}$*, e* $p, q \geq 1$ *tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Então,*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

*Demonstração*. Sejam $A$ e $B$ números reais positivos dados por $A = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ e $B = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$. Note que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq AB \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A} \cdot \frac{b_i}{B} \leq 1.$$

Vamos, então, provar que $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{A} \cdot \dfrac{b_i}{B} \leq 1$. Com efeito, fazendo $x_i = \dfrac{a_i}{A}$ e $y_i = \dfrac{b_i}{B}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p = \frac{1}{A^p} \sum_{i=1}^{n} a_i^p = \frac{1}{A^p} \cdot A^p = 1$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^q = \frac{1}{B^q} \sum_{i=1}^{n} b_i^q = \frac{1}{B^q} \cdot B^q = 1.$$

Assim, pela desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q}\right) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} x_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} y_i^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

□

# Capítulo 5

## CONCLUSÃO

Esperamos que essa pesquisa venha a atingir o seu objetivo maior: proporcionar aos professores de Matemática da Educação Básica um material de apoio que possa ser utilizado como uma extensão do currículo tradicional nas escolas brasileiras, tanto do segmento público quanto do privado. Neste trabalho acadêmico foi abordada a desigualdade das médias como uma ferramenta para resolução de problemas de otimização. Além disso, e para melhor enfoque sobre o assunto, foi efetuada uma ampliação dos conceitos das médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, com suas representações geométricas para dois números, frisando a importância dessas medidas no cotidiano dos alunos. Optou-se pela inclusão de tais informações tendo em vista o fato dos tradicionais livros didáticos destinados à Educação Básica no Brasil não abordarem esses conteúdos com maior propriedade. Observa-se que os tais livros só tratam das médias aritmética e aritmética ponderada, deixando um certo vácuo na compreensão e aquisição do conhecimento desse assunto.

Ademais, como pudemos observar na literatura consultada, geralmente é abordada e demonstrada a desigualdade das médias para dois números positivos, como também a desigualdade das médias para $n$ números positivos, mas não apresentam as respectivas representações geométricas para o caso de dois números. Observa-se também que esses conteúdos não são abordados na Educação Básica, o que denota uma certa falha nos currículos ou planos de ensino das escolas do país. É de importância extrema que os alunos e professores conheçam essas aplicações.

As ações proposta baseiam-se na desigualdade das médias, como uma ferramenta importante na resolução de problemas de otimização como podemos observar no capítulo $3$.

Enfatizamos o disposto no capítulo $4$, no que se refere à apresentação e demonstração da Desigualdade Triangular, de Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz, de Minkowski, Jensen, Young e Hölder como um ponto de partida para novas pesquisas acerca da noção de desigualdades e de sua relevância na história do desenvolvimento da disciplina.

Isto posto, proponho, ainda, que essa dissertação seja amplamente lida, analisada e utilizada para a melhor compreensão das noções básicas sobre a desigualdade das médias e que ela sirva como uma reflexão, ou um novo olhar, sobre o processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo tão importante à formação do conhecimento matemático nos alunos da educação básica em nosso pais.

# REFERÊNCIAS

ALSINA, Claudi; NELSEN, Roger B. **When less is more:** Visualizing Basic Inequalities. Dolciani Mathematical Expositions, 2009.

BONELLI, Rebeca Cristina. Desigualdades matemáticas e aplicações. Trabalho de Conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede. UNESP, 2017.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática:** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL, Parâmetro Curriculares Nacionais. Bases Legais. Brasília: MEC, 2000.

CARVALHO, Maria Alface da Costa. Problemas com desigualdades para o Ensino Secundário. Trabalho de Conclusão de Mestrado em Matemática para Professores. Universidade de Lisboa, 2012.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. Quadrante Matemática. $3^{\circ}$ Ano: Ensino Médio. 1. ed. - São Paulo: Edições SM, 2016.

CÔRREA, Sonia Dourado. **O uso de métodos numéricos em problemas de otimização**: Aplicações no Ensino Médio. Trabalho de Conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede. Campinas/SP: UNICAMP, 2016.

COSTA,Luís Carlos da. A evolução na resolução das equações algébricas. Trabalho de Conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede. UFCG, 2016.

CEVTKOVSKI, Z. **Inequalities:** Theorems, Techniques and Selected Problems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto e Aplicações. Volume 3. 3. ed. - São Paulo: Ática, 2015

DANTE, L. R. Didática da resolução de problemas de matemática. São Paulo: Ática, 1991.

LIMA, Elon Lages. Meu professor de matemática e outras histórias. 1 ed. Rio de Janeiro: Lamgraf, 1991.

FEITOSA, Osmilcy Lima. Algumas técnicas de resolução de problemas de mínimos e máximos na Geometria Euclidiana. Trabalho de Conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede. UFRR, 2015.

FINK, A. M. An Essay on the History of Inequalities. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2000.

FONTE, André Costa da. Médias, desigualdades e problemas de otimização. Trabalho de Conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede. UFRPE, 2013.

FREIRE, Elias das Neves. Aplicação da desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica na resolução de problemas em nível de Ensino Médio. Trabalho de Conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede. UFERSA, 2014.

Guia de livros didáticos: PNLD 2018: Matemática / Brasília: Ministério da Educação. Disponível em: https://www.fnde.gov.br/index.php/centrais-de-conteudos/publicacoes/category/125-guias?download=10744:guia-pnld-2018-matematica. Acesso: 30 de outubro de 2018.

HARDY, Godfrey Harold; LITTLEWOOD, John Edensor; PÓLYA, George. Inequalities. Cambridge Univerity Press - Londres, 1934

IZMAILOV, Alexey; SOLODOV, Mikhail. Condições de otimilidade, elementos de análise convexa e de dualidade. Volume L, 3. ed. Rio de Janeiro - IMPA, 2014.

MARCONE, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. Fundamentos de Metodologia Científica. 5. ed. - São Paulo : Atlas 2003.

MOL, Rogério Santos. Introdução à História da Matemática. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MORGADO, Augusto César. Matemática Discreta. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MORGADO, A.C.; CARVALHO, P.C.P. Matemática Discreta. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MUNIZ JÚNIOR, Carlos Alberto. **Matemática Discreta:** médias e princípio das gavetas. Trabalho de Conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede. UFPB, 2016.

MUNIZ, Sérgio Ricardo. Introdução à análise estatística de medidas. Disponível em https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/169799/mod_resource/content/0/Introducao_Estatistica_plc0016-14.pdf /Acesso: 30 de setembro de 2018.

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adám José Corcho. **Iniciação à Matemática:** um curso com problemas e soluções. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PAIVA, Manoel. **Matemática:** Paiva. Volume 3. 3. ed. - São Paulo: Moderna, 2015.

PEREIRA, Jackson Da Cruz. **Médias**: aritmética, geométrica e harmônica. Trabalho de Conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede. UNICAMP, 2014.

PERNAMBUCO, Secretária de Educação. Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Recife, SEDUC-PE, 2012.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. 2. reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

RECH, Roberto. Resolvendo problemas de otimização no ensino médio. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/705-4.pdf/Acesso em: 25 de outubro de 2018.

RIGODANZO, Mauro. Desigualdade das médias e a resolução de problemas geométricos. Trabalho de Conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede. UFSM, 2016.

ROQUE, Tatiane. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. ed Zahar. Edição digital, 2012.

SAMPAIO, Phillipe Rodrigues. Teoria, métodos e aplicações de otimização multiobjetivo. Trabalho de Conclusão do Mestrado em Ciências da Computação. USP, 2011.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jaqueline da Silva Ribeiro. #**Contato Matemática.** $3^\circ$ Ano. 1. ed. - São Paulo: FTD, 2016.