



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL- PROFMAT**

**TIAGO DE CASTRO SOUZA**

**O TEOREMA DE PAPPUS GULDIN E O PRINCÍPIO DE CAVALIERI:  
uma proposta de cálculo de volume de sólidos de revolução no  
ensino médio**

**JUAZEIRO-BA**

**2021**

**TIAGO DE CASTRO SOUZA**

**O TEOREMA DE PAPPUS GULDIN E O PRINCÍPIO DE CAVALIERI:  
uma proposta de cálculo de volume de sólidos de revolução no  
ensino médio**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Vale do São Francisco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Ma. Tuanny da Silva Maciel

**JUAZEIRO-BA**

**2021**

S729t Souza, Tiago de Castro.  
O Teorema de Pappus Guldin e o Princípio de Cavalieri: uma proposta de cálculo de volume de sólidos de revolução no ensino médio / Tiago de Castro Souza. – Juazeiro-BA, 2021.  
xii; 86 f. il.; 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro- BA, 2021.

Orientadora: Prof.(a) Ma. Tuanny da Silva Maciel

1. Geometria. I. Título. II. Maciel, Tuanny da Silva. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 514

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE**  
**NACIONAL- PROFMAT**

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

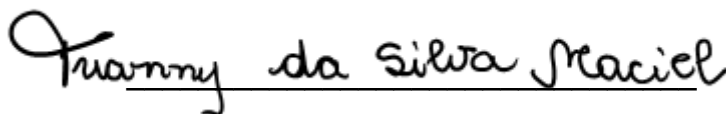
**TIAGO DE CASTRO SOUZA**

**O TEOREMA DE PAPPUS GULDIN E O PRINCÍPIO DE CAVALIERI:**  
**uma proposta de cálculo de volume de sólidos de revolução no**  
**ensino médio**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Aprovado em: 19 de novembro de 2021.

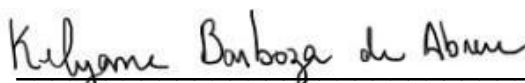
**Banca Examinadora**



Ma. Tuanny da Silva Maciel - UNIVASF



Dra. Lucília Batista Dantas Pereira - UPE



Dra. Kelyane Barboza de Abreu - UEPB

À minha família, minha esposa e meus queridos amigos, sem eles a vida não tem a  
menor graça.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus pela força para perseverar e nunca desistir diante dos obstáculos.

À minha família pelo apoio e incentivo.

À Professora Ma. Tuanny da Silva Maciel pela presteza e excelente orientação.

À banca examinadora por ter aceitado o convite de apreciar este trabalho.

Aos meus colegas do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Univasf, pelo apoio e cooperação.

Ao programa de pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Vale do São Francisco, em especial aos docentes do curso, pela grandiosa contribuição na minha formação.

"Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou a sua construção". – Paulo Freire

## RESUMO

O ensino da geometria é um dos grandes pilares na construção da Matemática e por meio dela é possível proporcionar ao aluno um maior entendimento de situações vivenciadas no dia a dia, desenvolvendo o pensar geométrico e uma maior compreensão de problemas que os cercam. A partir deste pensamento, este trabalho apresenta uma proposta para o ensino de cálculo de volume de sólidos de revolução no ensino médio e tem como objetivo mostrar a aplicação do Teorema de Pappus Guldin e do Princípio de Cavalieri para calcular o volume de sólidos de revolução no ensino médio utilizando a modelagem matemática como metodologia de ensino. Neste sentido, utiliza-se como metodologia a pesquisa do tipo básica, por meio do desenvolvimento de uma sequência didática, na qual a análise dos resultados matemáticos obtidos a partir do desenvolvimento de atividades desta sequência mostra sua viabilidade quanto à possibilidade de aplicação no ensino deste conteúdo, na referida etapa da educação básica. Os resultados se revelam adequados, na medida em que mostram que é possível determinar com certa facilidade as equações de volume do cilindro, cone e esfera e calcular, com valores razoavelmente aproximados, o volume de outros sólidos de revolução, que não possuem o formato dos citados anteriormente, mas que aparecem no cotidiano dos alunos, conferindo significado aos conceitos abordados.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática. Volume. Teorema de Pappus Guldin. Princípio de Cavalieri.



## ABSTRACT

The teaching of geometry is one of the great pillars in the construction of Mathematics and through it it is possible to provide the student with a greater understanding of situations experienced in daily life, developing geometric thinking and a greater understanding of the problems that surround them. Based on this thought, this work presents a proposal for teaching the calculation of the volume of solids of revolution in high school and aims to show the application of Pappus Guldin's Theorem and Cavalieri's Principle to calculate the volume of solids of revolution in high school using mathematical modeling as a teaching methodology. In this sense, the research of the basic type is used as a methodology, through the development of a didactic sequence, in which the analysis of the mathematical results obtained from the development of activities in this sequence shows its feasibility regarding the possibility of application in the teaching of this content, in the referred stage of basic education. The results are adequate, as they show that it is possible to determine with some ease the equations for the volume of the cylinder, cone and sphere and to calculate, with reasonably approximate values, the volume of other solids of revolution, which do not have the shape of previously mentioned, but that appear in the students' daily life, giving meaning to the approached concepts.

**Key-words:** Mathematical Modeling. Volume. Pappus Guldin's Theorem. Principle of Cavalieri.

## LISTAS DE FIGURAS

Figura 1- Cesta tecida construída no período neolítico.....	16
Figura 2 – Folha de rosto do livro Exame de Artilheiro, exemplar original datado de 1744.....	22
Figura 3 – Folha de rosto do livro Exame de Bombeiro, datado de 1748.....	22
Figura 4 – Boaventura Cavalieri.....	32
Figura 5 – Intersecção dos sólidos A e B com plano.....	33
Figura 6 – Cálculo do volume de sólidos.....	34
Figura 7 – Página de rosto da primeira impressão de <i>Coleção Matemática</i> .....	35
Figura 8 – Sólido formado pela rotação de um retângulo afastado do eixo de rotação.....	37
Figura 9 – Centro de gravidade ou baricentro.....	38
Figura 10- Baricentro G da figura plana F.....	39
Figura 11 – Rotação do retângulo.....	40
Figura 12 – Prisma e cilindro com áreas da base de mesma medida.....	40
Figura 13 – Rotação do triângulo retângulo.....	42
Figura 14 – Pirâmide e cone com áreas da base de mesma medida.....	42
Figura 15 – Rotação do semicírculo.....	44
Figura 16 – Sólido S.....	44
Figura 17 – Sólido S e esfera E sendo interseccionados pelo plano paralelo.....	45
Figura 18- Recipiente com 300 ml de creme de cabelo.....	51
Figura 19- Recipiente após corte simétrico.....	52

Figura 20- Figura plana obtida pelo contorno da parte do recipiente.....	53
Figura 21- Figura plana após substituição dos lados curvos.....	54
Figura 22- Recipiente com 100 ml de acetona.....	55
Figura 23- Recipiente após corte simétrico.....	56
Figura 24- Figura plana obtida pelo contorno do recipiente.....	56
Figura 25- Figura plana após substituição dos lados curvos.....	57
Figura 26- Recipiente com 150 ml de molho de alho.....	59
Figura 27- Recipiente após corte simétrico.....	60
Figura 28- Figura plana obtida pelo contorno do recipiente.....	60
Figura 29- Figura plana após substituição dos lados curvos.....	61
Figura 30- Recipiente com 500 ml de solução fisiológica.....	63
Figura 31- Recipiente após corte simétrico.....	64
Figura 32- Figura plana obtida pelo contorno do recipiente.....	65
Figura 33- Figura plana após substituição dos lados curvos.....	66
Figura 34- Recipiente com 270 ml de achocolatado.....	68
Figura 35- Recipiente após corte simétrico.....	69
Figura 36- Figura plana obtida pelo contorno do recipiente.....	69
Figura 37- Figura plana após substituição dos lados curvos.....	70

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	14
<b>1 A HISTÓRIA DA GEOMETRIA E A UTILIZAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA</b> .....	16
1.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DA GEOMETRIA .....	16
1.2 O ENSINO DA GEOMETRIA.....	20
1.3 O ENSINO DA GEOMETRIA NO BRASIL.....	21
1.4 A UTILIZAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE VOLUME.....	27
<b>2 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI E O TEOREMA DE PAPPUS GULDIN</b> .....	32
2.1 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI.....	32
2.2 O TEOREMA DE PAPPUS GULDIN .....	34
2.3 O VOLUME DO CILINDRO, CONE E ESFERA.....	37
2.3.1 Centro de gravidade ou baricentro de figuras planas.....	38
2.3.2 O volume do cilindro.....	39
2.3.3 O Volume do cone.....	41
2.3.4 O volume da esfera.....	43
<b>3 METODOLOGIA</b> .....	47
<b>4 UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE CÁLCULO DE VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO</b> .....	49
4.1 PROPOSTA DE ATIVIDADE 1.....	49
4.2 PROPOSTA DE ATIVIDADE 2.....	50
4.2.1 Cálculo do volume do recipiente contendo creme de cabelo.....	51
4.2.2 Cálculo do volume do recipiente contendo removedor de esmalte.....	55

<b>4.2.3 Cálculo do volume do recipiente contendo molho de alho.....</b>	<b>59</b>
<b>4.2.4 Cálculo do volume do recipiente contendo solução fisiológica.....</b>	<b>63</b>
<b>4.2.5 Cálculo do volume do recipiente contendo achocolatado.....</b>	<b>68</b>
4.3 PROPOSTA DE ATIVIDADE 3.....	74
4.4 PROPOSTA DE ATIVIDADE 4.....	75
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>76</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>78</b>
<b>ANEXO A.....</b>	<b>81</b>
<b>APÊNDICE A.....</b>	<b>84</b>

## INTRODUÇÃO

O conhecimento matemático tem sido socializado na escola de forma pouco significativa, baseada ainda no modelo tradicionalista de transmissão e reprodução do conhecimento. Mais precisamente, no tocante à geometria, seu ensino, muitas vezes, se reduz à memorização e reprodução mecanizada de fórmulas, sem contexto e sem significado para o aluno.

O ensino de geometria é de fundamental importância, uma vez que permite ao indivíduo compreender o mundo e resolver problemas do dia a dia. Para Fonseca *et al* (2011, p.107), o conhecimento da geometria permite o desenvolvimento de competências e habilidades tais como a percepção espacial e melhor compreensão na resolução de problemas, em que o aluno se torna capaz de olhar, comparar, medir, generalizar e abstrair, desenvolvendo o pensamento lógico. Entretanto, para que isso se efetive, o ensino precisa ser mediado de modo a dar significado aos conceitos geométricos para que o estudante possa compreendê-los e relacioná-los com a realidade.

A modelagem matemática pode ser adotada como metodologia de ensino que vai ao encontro desta perspectiva de ensino, uma vez que coloca o aluno frente a situações-problema, estimulando-o a pesquisar, abstrair, relacionar, criar, analisar, avaliar, deixando o aluno de ser passivo e se tornando ativo no processo de construção do conhecimento matemático. Além da adoção dessas novas metodologias de ensino, é necessário que o professor utilize de novas abordagens do conhecimento matemático, desapegando-se um pouco dos livros didáticos e socializando os conceitos a partir de outros modelos matemáticos que muitas vezes são poucos usuais, mas que possuem potencial para facilitar a aprendizagem.

Tendo em vista a importância da geometria para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e para sua compreensão e interação com o mundo e o fato de que o seu ensino nas escolas ainda se dá de modo tradicional, é importante que sejam feitas pesquisas no sentido de mostrar que existem métodos eficientes que facilitam a aprendizagem e tornam o ensino mais motivador. Dessa forma, com a finalidade

de contribuir na melhoria do processo de ensino e aprendizagem de geometria, desenvolvemos este trabalho, que tem como objetivo geral mostrar a aplicação do Teorema de Pappus Guldin e do Princípio de Cavalieri para calcular o volume de sólidos de revolução no ensino médio, utilizando a modelagem matemática como metodologia de ensino e como objetivos específicos calcular o volume de recipientes com formato de sólidos de revolução que fazem parte da realidade dos estudantes, não apenas sólidos usuais cilindro, cone e esfera, mas outros sólidos de revolução, tanto pelo Princípio de Cavalieri como pelo Teorema de Pappus Guldin bem como analisar os resultados matemáticos obtidos, procurando responder a seguinte questão: Como aplicar o Teorema de Pappus Guldin e o Princípio de Cavalieri para calcular volume de sólidos de revolução no ensino médio?

Na primeira seção faz-se um relato da história do desenvolvimento da geometria, de como se dá o ensino de geometria no Brasil e fazemos uma abordagem da modelagem matemática como metodologia de ensino, mostrando a relevância da geometria na formação do sujeito e de como seu ensino pode ser facilitado e sua aprendizagem potencializada.

Dando sequência, na segunda seção apresenta-se o Princípio de Cavalieri e o Teorema de Pappus Guldin e suas aplicações na determinação das equações de volume do cilindro, cone e esfera, mostrando como eles podem ser eficientes na demonstração destas equações.

Na terceira seção apresenta-se a metodologia do trabalho, destacando o tipo de pesquisa, os resultados que serão obtidos e a forma como serão obtidos e como serão analisados.

Por fim, na quarta seção, propõe-se uma sequência didática para o ensino de cálculo de volumes de sólidos de revolução no ensino médio, a partir da utilização do Teorema de Pappus Guldin e do Princípio de Cavalieri, usando a modelagem Matemática como metodologia de ensino.

## 1 A HISTÓRIA DA GEOMETRIA E A UTILIZAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Com base no nosso tema de estudo, e buscando entender a importância da relação e da utilização do Teorema de Pappus Guldin e do Princípio de Cavalieri, dividimos esta seção em quatro partes, a saber: Um pouco da história da geometria, o ensino da geometria, o ensino da geometria no Brasil e a utilização da modelagem Matemática para o ensino de volume de sólidos.

### 1.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DA GEOMETRIA

De origem grega, a palavra geometria, derivada da junção das palavras *geo*, que significa terra, e *metria*, que significa medir, pode ser entendida, essencialmente, significando “medir terras”, o que se justifica pela necessidade enfrentada pelas civilizações em entender situações do cotidiano, como pode-se citar o cálculo de áreas, perímetros e volumes. Embora a origem da geometria seja incerta, e que, de acordo com Boyer (1974, p.4), os documentos históricos que chegaram até nós não permitem determinar precisamente quando e onde ela se originou, esses documentos, entretanto, mostram que já na pré-história os povos demonstravam uma preocupação com relações espaciais, como se observa em objetos como potes, tecidos e cestas (figura 1), considerados exemplos de congruência e simetria, partes essenciais da geometria elementar, como afirmou Boyer e Merzbach (2013, p. 2, *apud* LOPES; ALVES; FERREIRA, 2012, p.26).

**Figura 1** – Cesta tecida construída no período neolítico



Fonte: [jjo.org.br](http://jjo.org.br)

Na antiguidade, povos como os egípcios e babilônios desenvolveram métodos intuitivos para resolverem problemas geométricos. Como pode-se citar os



funcionários do governo, no Egito, denominados de agrimensores, ou também conhecidos como “puxadores de corda”, que demarcavam e determinavam a área das propriedades que outrora foram alagadas pelas cheias do rio Nilo para que fosse feita a cobrança de impostos. Boyer (1974, p.13) afirma que esse povo desenvolveu métodos para calcular a área e o perímetro de triângulos, quadriláteros e círculos, apesar de não fazerem distinção entre relações exatas daquelas que eram apenas aproximações. Já os babilônios desenvolveram métodos para o cálculo da área de figuras planas, como polígonos e círculos, e para o cálculo de volumes de sólidos, como cone, pirâmides e troncos de cone e pirâmide. Ainda de acordo com Boyer (1974, p. 29), os registros históricos evidenciam que eles também utilizavam com precisão o teorema de Pitágoras e resolviam problemas usando relação de semelhança de triângulos.

É importante salientar que, os métodos desenvolvidos por esses povos para resolver problemas geométricos eram empíricos, intuitivos e sem demonstração, e geralmente resultavam em aproximações, sendo que eles não faziam distinção entre valor exato e aproximado. Inicialmente, estes métodos somente se aplicavam a problemas concretos específicos e só posteriormente eles passaram a extrair relações e propriedades comuns passando a agrupar problemas que poderiam ser resolvidos pelo mesmo procedimento.

Esse nível mais elevado do desenvolvimento da natureza da geometria pode ser chamado “geometria científica” uma vez que indução, ensaio, erro e procedimentos empíricos eram instrumentos de descobertas. A geometria transformou-se num conjunto de receitas práticas e resultados de laboratório, alguns corretos e alguns apenas aproximados, referentes a áreas, volumes e relações entre figuras sugeridas por objetos físicos. (EVES, 1997, p. 3)

Como visto acima, desde a antiguidade, povos antigos como os egípcios e os babilônios já utilizavam a geometria de forma empírica e intuitiva no desenvolvimento de diversas atividades, mas foi somente na Grécia que a geometria passou a ter um caráter sistemático, dedutivo e abstrato. Para Carvalho,

A Geometria como ramo matemático surgiu enquanto atividade empírica dos povos antigos para atender as suas necessidades da época, sendo suas primeiras sistematizações realizadas pelos gregos que muito contribuíram para esse ramo do saber. Platão, Eudoxo e muitos outros

deram à Geometria um caráter especial, encarando-a como um ramo de destaque da ciência Matemática. (CARVALHO, 2012, p. 02)

Segundo Boyer (1974, p. 35), não se sabe ao certo se os gregos tiveram influência do conhecimento geométrico dos egípcios e babilônios, apesar de existirem evidências do contato desses matemáticos com essas civilizações. Entretanto, é fato que foi a visão abstrata dos gregos que fez da geometria um campo do saber sistemático e organizado. Apesar de não existir nenhum documento comprobatório, a tradição atribui a Tales de Mileto e a Pitágoras de Samos o pioneirismo, por volta do século VI a.C (antes de Cristo), no desenvolvimento da geometria dedutiva. Tales teria sido o primeiro matemático a demonstrar teoremas importantes, como o que diz que um ângulo inscrito em um semicírculo é reto. Pitágoras teria enunciado e demonstrado o teorema que ficou conhecido pelo seu nome, e juntamente com os pitagóricos teria determinado geometricamente a seção áurea de um segmento e construído sólidos regulares.

Ainda de acordo com Boyer (1974, p.47), praticamente não existem documentos matemáticos e científicos até o quarto século, embora importantes problemas tenham sido formulados, a exemplo dos três problemas clássicos da matemática grega, a saber: da quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trisseção do ângulo, que mesmo não tendo uma solução imediata serviram de base para o desenvolvimento posterior da geometria. As reconstruções do conhecimento geométrico produzido nesse período se baseiam em narração fragmentada e na tradição elaboradas nos séculos posteriores. Foi a partir de Platão (428 a.C- 347 a.C) que esse conhecimento passou a ser sistematizado e documentado. E, embora não tenha dado contribuição específica aos resultados geométricos, guiava e inspirava seu desenvolvimento discutindo fundamentos, esclarecendo conceitos e reorganizando hipóteses. Como exemplo de sua influência na organização do conhecimento matemático, o que inclui o geométrico, atribui-se a ele a restrição das construções geométricas a régua e compasso, usando como justificativa o fato da utilização de aparatos mecânicos corromper o que a geometria tem de melhor.

Sobre a sistematização do conhecimento geométrico, aproximadamente por volta de 300 a.C, Euclides escreveu a obra Os elementos, dividida em treze livros ou

capítulos, visto como um tratado rigoroso de matemática elementar. De acordo com Boyer (1974, p. 77),

Os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o livro X sobre incomensuráveis e os três últimos versam principalmente sobre geometria no espaço. Não há introdução ou preâmbulo, e o primeiro livro começa abruptamente com uma lista de vinte e três definições. A deficiência, aqui, é que algumas definições não definem, pois não há um conjunto prévio de elementos não-definidos em termos dos quais os outros sejam definidos.

Notadamente, os matemáticos gregos antigos não somente foram responsáveis pelo desenvolvimento da geometria elementar como também escreveram tratados avançados dessa ciência, como se observa na obra de Arquimedes e na de Apolônio. A contribuição dos gregos antigos no desenvolvimento da geometria encerra-se com Pappus (séculos III-IV). Boyer (1974, p. 139) afirma que sua obra “a coleção”, escrita aproximadamente em 320 d.C, “é o último tratado antigo realmente significativo”. Trouxe ainda nesta obra interessantes informações e resultados geométricos novos, a exemplo de generalizações de teoremas, como o de Pitágoras, além de mostrar um novo método para calcular área e volume de sólidos de revolução a partir do centro de gravidade das figuras planas que rotacionam um eixo e a circunferência descrita por esse centro em relação ao eixo.

No século XVII houve uma ascensão da geometria. Cavalieri em 1635, em sua obra “A geometria indivisibilibus continuorum” apresenta o método dos indivisíveis, um estudo sobre infinitésimos com o qual demonstrava os teoremas para o cálculo de áreas e volumes de sólidos. Conforme Boyer (1976 p.241), nesse método, “uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou “indivisíveis” e que um volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase atômicos”.

As contribuições dadas à geometria pelos matemáticos Pappus e Cavalieri serão de extrema importância para o desenvolvimento deste trabalho e serão expostas mais adiante. Todavia, cabe ressaltar ainda, a contribuição no século XVII dada pelo matemático suíço Paul Guldin no estudo sobre sólidos de revolução. Os documentos históricos não são suficientes para determinar se Pappus de Alexandria

demonstrou os dois teoremas sobre área da superfície e o volume de sólidos de revolução, sendo atribuído a Guldin, conforme nos afirma Struik (1992, p. 159), a demonstração destes teoremas em sua obra intitulada *Centrobarryca*, de 1641.

## 1.2 O ENSINO DA GEOMETRIA

A história do desenvolvimento da geometria mostra que ela surgiu a partir da necessidade humana de resolver problemas práticos do cotidiano. Dessa forma, seu ensino nas escolas se torna indispensável para a formação de todo indivíduo, de modo que sem o desenvolvimento do pensar geométrico, dificilmente as pessoas conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas (LORENZATO, 1995, p.5).

O ensino da geometria justifica-se e faz-se necessário porque por meio dele o estudante se torna capaz de descrever, representar e compreender o mundo à sua volta. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's):

O aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa (BRASIL, 1997, p. 39).

O estudo da geometria promove ainda o desenvolvimento intelectual do aluno e de seu raciocínio lógico e de habilidades mentais cada vez mais complexas como a abstração e a generalização. Sobre isso, Fainguelernt (1995) afirma que a geometria:

Oferece um vasto campo de ideias e métodos de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição e de dados concretos e experimentais para os processos de absorção e generalização. A Geometria também ativa a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstratas. É, portanto, tema integrador entre as diversas partes da Matemática, bem como campo fértil para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar. Ela desempenha papel primordial no ensino, porque a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituem a sua essência (1995, p.45).

Corroborando com as ideias citadas acima, o conhecimento da geometria permite o desenvolvimento de competências e habilidades tais como a percepção espacial e uma melhor compreensão na resolução de problemas, em que o aluno se

torna capaz de olhar, comparar, medir, generalizar e abstrair, desenvolvendo o pensamento lógico (FONSECA *et al*, 2011, p. 107).

Além disso, o ensino da geometria, se articulado, contribui para a compreensão de conceitos relacionados a outras áreas do conhecimento, como a engenharia, astronomia, geologia, biologia e até as ciências humanas como a arquitetura, geografia e as artes cinematográficas. Novamente, de acordo com Fonseca *et al* (2011, p.115) os conhecimentos geométricos possibilitam a representação visual de diversos conceitos de outras áreas relacionados a tais conteúdos geométricos, constituindo-se dessa forma como um aporte relevante para a compreensão de outros campos do saber.

Compreender o mundo, desenvolver habilidades complexas, como raciocínio, abstração e generalização, contribuir para compreensão de conceitos de outras áreas e resolver problemas práticos do cotidiano constituem justificativas suficientes para o ensino de geometria na escola. Dessa forma, faz-se necessário que esse ensino se dê de forma contextualizada, articulada com outras áreas do saber e de modo que o aluno seja ativo no processo de construção do conhecimento para que assim os objetivos de aprendizagem relacionados à geometria sejam atingidos com êxito pelos estudantes.

### 1.3 O ENSINO DA GEOMETRIA NO BRASIL

O ensino de geometria no Brasil tem início nas academias militares nos cursos de Artilharia e Fortificação criados pelo governo português para proteger a colônia de invasões estrangeiras. Segundo Pavanello e Caldatto (2015, p. 106), em 1699 foi criada a aula de fortificações no Rio de Janeiro e em 1738, por meio de uma Carta Régia, esses cursos são instituídos em caráter obrigatório para todos os oficiais. Nestes cursos a abordagem da geometria era especulativa e prática e os primeiros livros utilizados foram *Exame de Artilheiro* (Figura 2) de 1744 e *Exame de Bombeiros* (Figura 3) de 1748 escritos por José Fernandes Pinto Alpoim. Valente (*apud* PAVANELLO; CALDATTO, 2015, p.107) afirma sobre esses livros que “não haverá proposições geométricas no texto. Não haverá preocupação com demonstração de propriedades geométricas”

**Figura 2** – Folha de rosto do livro Exame de Artilheiro, exemplar original datado de 1744



Fonte: <https://revistas.pucsp.br/hcensino/article/viewFile/22982/18185>

**Figura 3** – Folha de rosto do livro Exame de Bombeiro, datado de 1748



Fonte: <https://revistas.pucsp.br/hcensino/article/viewFile/22982/18185>

Em meados de 1767 chegam ao Brasil os livros de Doutor Bélidor que passaram a ser adotados pelas academias militares, entre elas a Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho, que em 1792 possuía um curso de matemática

com duração de 06 anos e utilizava dentre as obras, a de Bélior, intitulada *Geometria Prática*. Essa obra, comparada com a abordagem geométrica de Alpoim era dotada de maior rigor e com mais tópicos, contudo, continha uma linguagem mais didática, com textos simples e acessíveis que tratavam de geometria euclidiana enfatizando a resolução de problemas práticos (PAVANELLO; CALDATTO, 2015, p.107).

Com a chegada da Família Real ao Brasil em 1808 e posteriormente com a independência em 1822 tem-se uma expansão do ensino tanto nas academias militares, onde até então se concentrava, como em outras instituições. Essa restrição ao ensino se deve ao fato de que até 1808, "escolas, circulação de livros, discussão de ideias, bibliotecas... eram proibidas no Brasil" (LIMA, 1975, p.19).

Em 1808, conforme Pavanello e Caldatto (2015, p.109), foram criadas a Academia Real Militar e a Academia Real dos Guardas-Marinha. A primeira ofertava curso de ciências exatas e engenharia geral e utilizava a obra de Legendre e a de Lacroix para ensinar geometria. Já a segunda ofertava o curso de geometria nos dois primeiros anos do curso e utilizava o livro de Bézout, caracterizada por pouco rigor, mas de notável cunho didático. Conforme Valente (*apud* PAVANELLO; CALDATTO, 2015, p.109) Bézout foi o primeiro a separar os conteúdos da geometria escolar em três partes. A primeira tratava do estudo de linhas, ângulos e suas medidas, das relações entre linhas etc., a segunda abordava o estudo das superfícies, suas medidas e suas relações, e a terceira tratava dos sólidos e dos fundamentos de suas medidas.

Posteriormente, conforme Menezes (2007, p. 38), começaram a surgir as primeiras obras didáticas nacionais e a obra de Bézout foi substituída pela obra *Elementos de Geometria*, do brasileiro Francisco Vilela Barbosa. Nessa obra a geometria é apresentada com maior rigor em relação à de Bézout, passando a utilizar termos como axioma, teorema e corolário.

Em 1822 o Brasil passa de colônia a império e surge a necessidade da criação de cursos superiores para a elite, cuja formação até então se dava na Universidade de Coimbra. Segundo Menezes (2007, p. 43-44), neste contexto a

geometria passa a ser pré-requisito para acesso a esses cursos, inicialmente de direito e posteriormente para ingresso no curso de medicina e de engenharia. Essa exigência desencadeou a necessidade do estabelecimento do ensino secundário, cuja finalidade era a preparação para ingresso no ensino superior, como pode-se citar a criação dos Colégios Liceus Provinciais e o Colégio Pedro II, instituições presentes até os dias atuais.

No início do século XX acontece na Europa o primeiro movimento de reforma do ensino de Matemática que influenciou o ensino de geometria no Brasil a partir de 1922. Conforme Pavanello e Caldatto (2015, p. 112) este movimento “foi resultante direto do acelerado desenvolvimento da matemática ocorrido nos séculos XVIII e XIX e do choque gerado pelo impulso industrial pelo qual passavam países da Europa Ocidental e os EUA”. Para o ensino da geometria, o movimento propunha um abandono do método rigoroso dos *Elementos* de Euclides passando a abordá-la de forma intuitiva e experimental inicialmente e somente após, passar às demonstrações.

Em geometria, o ensino deve começar pelos sólidos simples, de que se farão derivar os conceitos fundamentais, as relações de posição de retas e planos e as principais figuras geométricas. As definições científicas devem ser evitadas. Por métodos empíricos (translação, rotação, dobramento e medida) obtêm-se as principais posições relativas angulares, áreas e circunferências. Haverá uma transição gradual da intuição para a demonstração. Desde o início, as figuras geométricas não devem ser consideradas rígidas. Recomenda-se um largo uso do movimento para o fim de ilustrar e sugerir relações geométricas importantes (KLEIN, 1900, apud ROXO, 1937, p. 213).

Em 1922, tem início a reforma do ensino de matemática no Brasil, a partir da adoção pelo colégio Pedro II da obra de Euclides Roxo, que propunha a alteração do ensino de geometria com base neste movimento internacional (PAVANELLO; CALDATTO, 2015, p. 115). Posteriormente este movimento influenciou a Reforma Francisco Campos em 1931 e a Reforma Capanema em 1942. A primeira recomendava, para o ensino de geometria, uma abordagem intuitiva e experimental, enquanto a segunda propunha a desvinculação do método de ensino baseado nos *Elementos* de Euclides e sugeria que a geometria fosse abordada no curso ginásial (primeiro ciclo) “nas quatro séries iniciais, intuitivamente nas duas primeiras e dedutivamente nas duas últimas (...) e priorizada no segundo ciclo, sendo



programada para todos os anos” (PAVANELLO, 1989, p. 136-137). Ainda sobre tais reformas, cabe ressaltar a dificuldade de sua efetivação no ensino de geometria. Pavanello e Caldatto (2015, p.116-117), afirmam que isso foi decorrente da existência de muitos defensores do método de Euclides no Brasil, da falta de formação para se trabalhar com essa nova abordagem, dada que sua difusão se deu por meio de livros didáticos e os professores acabavam fazendo-a de forma equivocada e diferente do que ocorreu na Europa, o movimento não partiu da comunidade educacional, mas foi imposto por decretos governamentais.

Na década de 1960, o Brasil teve influência de um outro movimento que propunha reformas no ensino de Matemática, o Movimento da Matemática Moderna (MMM), cuja origem se deu na Europa e em países desenvolvidos como os Estados Unidos, por volta da década de 1950. Para o ensino de geometria o MMM determinava que o fosse feito sob enfoque das estruturas algébricas, através de planos vetoriais ou transformações. Sendo assim, o estudo da geometria não mais seria a descrição das propriedades dos elementos geométricos e dedução das implicações neles contidas, mas somente as propriedades formais de sua estrutura pelas transformações que ela admite ou impede (PAVANELLO, 1989, p. 163).

Entretanto, a abordagem do ensino de geometria na perspectiva do MMM não se efetivou e ainda contribuiu para o abandono de seu ensino na escola básica. Isso se deu por causa da falta de preparo do professor para trabalhar com essa proposta e devido à Lei 5692/71 (Lei de diretrizes e bases do ensino de 1º e 2º graus) que dava autonomia ao professor para elaborar seu próprio programa curricular. Porém, como eles não dominavam o método de ensino proposto pela reforma e tinham liberdade para instituir o currículo de Matemática, acabaram enfatizando a álgebra e aritmética em detrimento da geometria.

A orientação de trabalhar a geometria sob o enfoque das transformações, assunto não dominado pela maioria dos professores secundários, acaba por fazer com que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer abordagem, passando a trabalhar predominantemente a álgebra- mesmo porque, como a Matemática Moderna fora introduzida a partir deste conteúdo, enfatizara sua importância (PAVANELLO, 1989, p. 164-165).

Até a década de 1990, o ensino de geometria no Brasil continuava abandonado, o que provoca impacto no ensino da geometria no Brasil até os dias

atuais. E, de acordo com Lorenzato (1995, p.3-4), esse abandono era resultado da falta de preparo dos professores e da utilização do livro didático, que abordava os conhecimentos geométricos nos capítulos finais, não havendo tempo para vivenciá-los, e a partir de definições, fórmulas e propriedades desvinculadas de aplicação e de explicação de natureza lógica ou histórica, o que causava aversão para com a geometria tanto em alunos como em professores.

Com o passar dos anos, buscando suprir tal abandono, novas propostas foram criadas como um esforço para recuperar o ensino de geometria no Brasil. O que fica evidente com a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em 1997, que propõe a abordagem da geometria euclidiana no ensino fundamental a partir da experimentação e deduções informais e no ensino médio por meio da dedução, analisando o significado de postulados e teoremas e enfatizam a importância da demonstração (BRASIL, 1997).

Apesar de ainda ser perceptível a falta de priorização do ensino de geometria no currículo das escolas, atualmente a principal problemática diz respeito à forma como ela é ensinada. A metodologia de ensino da Matemática ainda tem como base os pilares do modelo tradicionalista, no qual o aluno é passivo no processo de ensino aprendizagem, sem priorizar o desenvolvimento do pensamento crítico, do raciocínio e da preparação do aluno para o mundo. No que tange especificamente à geometria, tem-se um ensino baseado na memorização e reprodução mecanizadas de fórmulas. Este método é apontado como uma das principais causas da desmotivação e desinteresse por parte dos alunos.

Respostas fisiológicas desagradáveis; sonolência ou ausência da aula, mesmo estando de corpo presente; sentimentos de fracasso; baixa autoestima; elaboração de auto regras limitadas; aumento do número de erros; timidez; isolamento excessivo; falta de assertividade; ausências frequentes as aulas; agressividade exacerbada; enfrentar o professor por meio de agressão verbal ou física; o aluno aprende e reproduz o mesmo modelo de interação vivenciando na relação com o professor ou os outros agentes punitivo (CARMO; FIGUEIREDO, 2009, p.489, *apud* FASSIS, 2011, p.15).

A ausência de contextualização da geometria, da inter-relação desse ramo da Matemática com as demais subáreas, bem como a falta de conexão com outras áreas do conhecimento contribui para que o aluno não atribua sentido aos conceitos

geométricos estudados e não desenvolva competências e habilidades para aplicá-los na compreensão de fenômenos e resolução de problemas do cotidiano.

Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) determina que o ensino de Matemática, no qual está inserida a geometria, necessita que ela seja vista de forma integrada, desde a educação infantil, aplicada à realidade e levando em conta as vivências dos alunos que estão envolvidos por diferentes condições socioeconômicas, avanços tecnológicos, exigências do mercado de trabalho e mídias sociais (BRASIL, 2018).

#### 1.4 A UTILIZAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE VOLUME

Desde o início do século XX, a modelagem matemática começou a ser utilizada para descrever, formular, modelar e resolver situações-problema de outras áreas do conhecimento, entretanto, não se sabe com precisão quando este termo surgiu. Biembengut (2009, p.7-8) afirma que existem indícios de que tenha surgido nos Estados Unidos entre as décadas de 1950 e 1960, nos trabalhos realizados pelo *School Mathematics Study Group* (SMSG) e nos trabalhos do 69º anuário da *National Society for the Study of Education* e da *New Trends in Mathematics Teaching IV*, onde é descrito o processo de criação de modelos, mas sem fazer uso do termo.

A década de 1960 foi extremamente rica no debate sobre a modelagem e aplicações na educação matemática. Nesse período surgiu o movimento internacional denominado *Utilitarista* que discutia a aplicação do conhecimento matemático e culminou em importantes eventos que influenciaram o início da discussão da modelagem no Brasil, entre eles a *Lausanne Symposium*, em 1968 na Suíça, que tinha por tema como *ensinar matemática de modo que seja útil* e o congresso *Matemática e Realidade*, realizado em Roskilde em 1978 (BIEMBENGUT, 2009, p.8).

Influenciado pelo movimento utilitarista, a modelagem matemática tem início no Brasil no final da década de 1970 e início de 1980, tendo como principais precursores Rodney Carlos Bassanezi e Aristides Camargos Barreto. Biembengut (2009, p.10-12), afirma que Barreto foi o primeiro a realizar experiências com

modelagem no Brasil, por meio do método que consistia em apresentar a situação problema motivadora, ensino da teoria e finalizando com retorno à situação problema para matematizá-los e então resolvê-los, isso nos cursos de Licenciatura em Matemática e nos cursos de pós-graduação na área de engenharia da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) em meados dos anos de 1970.

Já Bassanezi se destacou como principal disseminador da modelagem matemática no Brasil. Começou a utilizá-la em 1980 em cursos de formação de professores de várias instituições e tinha como proposta de ensino motivar os estudantes a se inteirar das atividades de uma região à qual pertenciam e a partir desse contato levantar problemas, sendo que os conteúdos eram apresentados quando requeridos pelos modelos em fase de elaboração.

Cabe destacar que a modelagem matemática surgiu inicialmente como método científico e só posteriormente, por volta da década de 1960, passou a ser concebida também como uma metodologia para o ensino de Matemática. Qualquer que seja a perspectiva, a modelagem matemática pode ser definida como:

Um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade e previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações problemas da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (BASSANEZI, 2002, p.24).

Entretanto, é importante destacar que na perspectiva da educação matemática, a modelagem tem objetivos, dinâmica de trabalho e natureza das discussões que diferem dos modeladores profissionais, no âmbito da pesquisa científica (MATOS; CARREIRA *apud* BARBOSA, 2004, p. 74).

Nesta perspectiva, que é a que interessa neste trabalho, a modelagem matemática pode ser definida, segundo Burak (2019, p. 102) como “um conjunto de procedimentos, cujo objetivo é estabelecer um paralelo para tentar explicar matematicamente os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões” e pode ser desenvolvida em sala de aula conforme a proposta em cinco etapas: escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento dos problemas, solução dos problemas e o desenvolvimento de

conteúdos e da matemática relacionada ao tema e por último a análise crítica das soluções.

Na primeira etapa é feita a escolha do tema, que deve ser escolhido pelos estudantes. Posteriormente, segue a etapa de pesquisa exploratória na qual os estudantes, com mediação do professor, realizarão levantamento de dados, quantitativos ou qualitativos, procurando identificar as várias dimensões relacionadas ao tema a fim de familiarizar-se com ele. Essa segunda etapa ajuda a “desenvolver a atenção, sensibilidade e criticidade, atributos importantes na formação de uma postura investigativa” (BURAK, 2019, p.102).

A terceira etapa consiste na formulação dos problemas relacionados à temática escolhida e são elaborados a partir dos dados coletados na pesquisa exploratória. Esses problemas geralmente têm caráter genérico e estimulam a pesquisa e a organização dos dados coletados favorecendo a compreensão mais geral das situações-problema.

Depois de formulados os problemas, segue a etapa de sua resolução, na qual os conteúdos matemáticos a serem trabalhados dependerão dos problemas levantados. Nesta quarta fase, para Burak (2019, p. 103), “as operações, as propriedades e os diversos campos da matemática que se destacam nessa fase, conferem significados aos conteúdos matemáticos”. E, ainda de acordo com Burak, a quinta e última etapa consiste em analisar a coerência e consistência lógica das soluções encontradas a partir das considerações e avaliação das hipóteses levantadas na fase de levantamento dos problemas.

Na proposta de Burak (2019) para o desenvolvimento da modelagem matemática, enquanto metodologia de ensino, percebe-se que o aluno é responsável pelos resultados e pela dinâmica de todo processo e o professor atua apenas como mediador. Entretanto, a atuação do professor e aluno pode ser flexibilizada conforme os níveis de modelagem. Barbosa (2004, p.76-77) define esses níveis como regiões de possibilidades ou casos de modelagem e são divididos em três: no caso 01 o professor é quem determina o tema, formula o problema e coleta os dados necessários cabendo aos alunos a investigação e

resolução do problema; no caso 02, o professor determina o tema e formula o problema e os alunos são responsáveis pela coleta de dados e pela resolução; já no caso 03, o professor atua apenas na escolha do tema em conjunto com os alunos, que ficam responsáveis pela formulação do problema, coleta de dados e resolução da situação problema.

Em qualquer caso de modelagem, destaca-se a importância de se trabalhar problemas reais, uma vez que problemas fictícios podem descaracterizar o propósito desta metodologia enquanto proposta de ensino que dar significado aos conteúdos matemáticos. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 277),

Nesta enunciação está implícito que o conceito em foco deve ser trabalhado por meio da resolução de problemas, ao mesmo tempo em que, a partir de problemas conhecidos, deve-se imaginar e questionar o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida. Nesse sentido, indicamos a elaboração de problemas pelos/as próprios/as estudantes, e não apenas a proposição de enunciados típicos que, muitas vezes, apenas simulam alguma aprendizagem.

Dado o requisito de partir de problemas reais para caracterizar a modelagem matemática, cabe ressaltar quais as vantagens de utilizá-la como metodologia de ensino. Para Bassanezi (2002, p.36-37) seis argumentos justificam a utilização dessa estratégia para o ensino de matemática: o primeiro é o argumento formativo, que contribui para tornar os estudantes exploratórios, criativos e habilidosos na resolução de problemas; o argumento de competência crítica, que prepara os alunos para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade; o argumento de utilidade, que prepara o estudante para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas; o argumento intrínseco, que permite o aluno entender e interpretar a Matemática em todas as suas facetas; o argumento de aprendizagem, que faz com que o estudante compreenda melhor os argumentos matemáticos, internalize conceitos e resultados e valorize a matemática; e por último o argumento de alternativa epistemológica, caracterizando-se como metodologia mais adequada às diversas realidades socioculturais.

Neste trabalho a modelagem matemática será utilizada como metodologia para o ensino do cálculo de volumes de sólidos de revolução e será desenvolvida com base nas etapas propostas por Burak (2019) e no caso de modelagem 02 de

Barbosa (2004). Essa proposta de utilização da modelagem vai ao encontro do que preconiza a BNCC (2018) que determina, a respeito do estudo de corpos redondos, que seu ensino seja estruturado de forma que o estudante desenvolva a habilidade de resolver e elaborar problemas que envolvem volume desses sólidos em situações reais e investigue processos para obtenção da medida do volume de cilindros e cones, incluindo o Princípio de Cavalieri e o teorema de Pappus Guldin.

## 2 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI E O TEOREMA DE PAPPUS GULDIN

O cálculo de volume é uma atividade que está presente no cotidiano do ser humano desde as atividades mais complexas, em diversas profissões como na engenharia, até atividades mais corriqueiras como, por exemplo, a determinação do volume de uma caixa de papelão ou de uma piscina, este último nem sempre em um formato de um paralelepípedo. A ideia do cálculo de volume de um sólido retangular, de forma mais intuitiva, pode ser descrita como a quantidade de cubinhos unitários que cabem no sólido, o qual pretende-se descobrir o volume. Porém, a ideia vai além do cálculo de volume de sólidos retangulares, proporcionando determinar o volume de sólidos que não possam ser determinados pensando na contagem de cubinhos unitários.

Nesta seção, apresenta-se dois métodos utilizados para o cálculo de volume, falando um pouco da história de seu desenvolvimento e demonstrando sua aplicação na determinação das equações de volume de sólidos de revolução, a saber, o cilindro, o cone e a esfera.

### 2.1 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Bonaventura Cavalieri (figura 4) nasceu em Milão, Itália, em 1598 e foi professor da Universidade de Bolonha de 1629 a 1647, ano de sua morte. Em 1635 ele publicou sua principal obra, intitulada “Geometria Indivisibilibus Continuum” na qual ele apresenta o método dos indivisíveis, conforme afirma Boyer (1974, p. 241). Este método deu origem a dois teoremas que permitem determinar as equações de área e de volume de sólidos geométricos e ficaram conhecidos como Princípio de Cavalieri.

**Figura 4** – Bonaventura Cavalieri



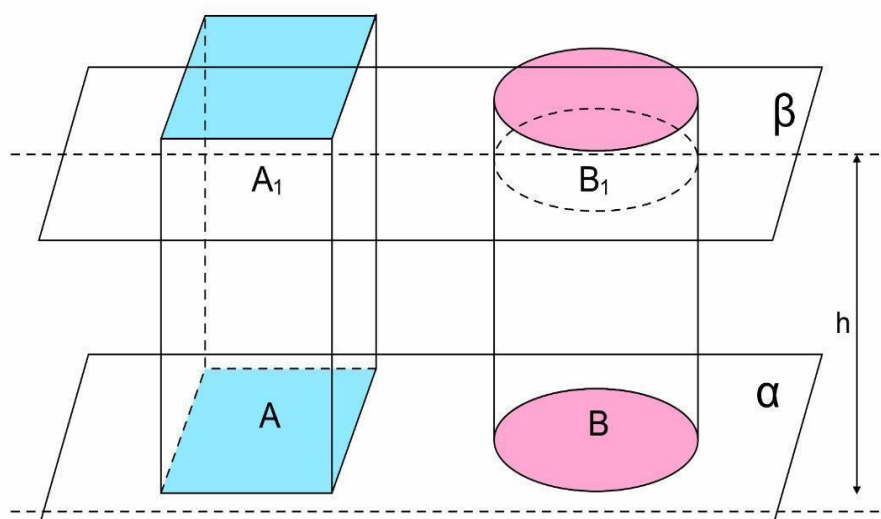


Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Bonaventura\\_Cavalieri](https://pt.wikipedia.org/wiki/Bonaventura_Cavalieri)

Esses teoremas são demonstrados com a utilização do cálculo integral e teoria da medida, mas nos livros de ensino médio, haja visto a complexidade da prova, ele é apresentado como postulado, omitindo-se a demonstração. Neste trabalho, omite-se a demonstração do teorema e restringe-se o princípio para o cálculo de volume que pode ser enunciado da seguinte maneira:

**Teorema 1 (O Princípio de Cavalieri):** Sejam  $A$  e  $B$  sólidos limitados, e seja  $\alpha$  um plano. Suponha que, para todo plano  $\beta$  paralelo a  $\alpha$ , as interseções de  $A$  e  $B$  com  $\beta$  sejam vazias ou regiões tais que a razão entre suas áreas é constante. Então, a razão entre os volumes de  $A$  e  $B$  é essa constante (ver figura 5).

**Figura 5** – Intersecção dos sólidos  $A$  e  $B$  com plano  $\beta$



Fonte: Autor

Isso significa que dados dois sólidos de mesma altura, se todo plano paralelo a  $\alpha$ , que intersecta esses sólidos formam secções cuja razão entre as áreas  $A_1$  e  $B_1$

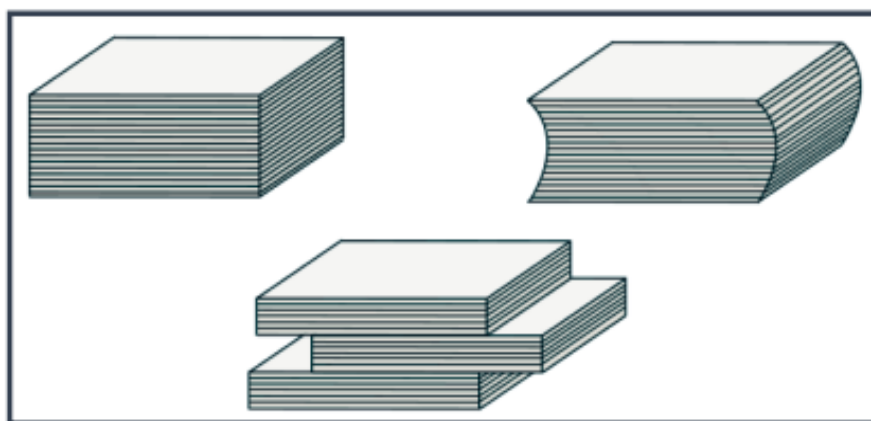
é uma constante  $\frac{A_1}{B_1} = c$ , então a razão entre os volumes  $V_A$  e  $V_B$  desses sólidos é

igual a essa mesma constante  $\frac{V_A}{V_B} = c$ .

Em geral, nas escolas, o Princípio de Cavalieri é apresentado na segunda série do ensino médio, optando por experiências que demonstrem, de forma intuitiva

o resultado, proporcionando aos alunos determinarem volumes de sólidos por meio da comparação com outros sólidos, mais precisamente resumindo o cálculo de volume ao cálculo de áreas. Além disso, através dele é possível apresentar aos alunos como encontrar o volume de sólidos oblíquos, como é o caso da figura 6, na qual tem-se empilhadas folhas e pretende-se descobrir o volume.

**Figura 6** – Cálculo do volume de sólidos



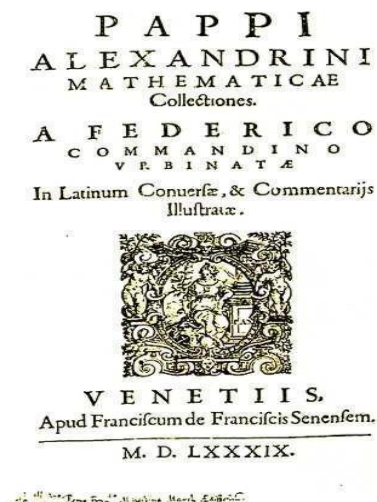
Fonte: <http://www.educacao.pe.gov.br/>

## 2.2 O TEOREMA DE PAPPUS GULDIN

O Teorema de Pappus Guldin foi enunciado por Pappus de Alexandria, matemático grego antigo, para determinar a área e o volume de sólidos de revolução. Entretanto, como não foram encontradas demonstrações formais de Pappus para esse Teorema, Paul Guldin, matemático suíço, acabou partilhando o feito com Pappus ao apresentar provas formais para o referido teorema por volta do ano de 1600 (RAUTENBERG; PROBST, 2019, p.262).

Pappus de Alexandria nasceu na Grécia no ano de 290 e escreveu sua principal obra intitulada *Coleção Matemática* (figura 7) no ano de 320. Esta obra é considerada o último grande tratado matemático antigo importante e consiste em oito livros com comentários e proposições matemáticas, dos quais o primeiro e parte do segundo livro acabaram se perdendo. É no livro VII que Pappus enuncia os dois teoremas sobre área e volume de sólidos de revolução, entretanto não apresenta nenhuma demonstração (BOYER, 1974, p.135-138).

**Figura 7** – Página de rosto da primeira impressão de *Coleção Matemática*



Fonte: <https://citacoes.in/autores/pappus-de-alexandria/>

Supõe-se que a *Coleção Matemática* era composta por doze volumes e não apenas oito e que as demonstrações desses teoremas se encontravam no volume XII. Pappus de Alexandria é considerado como um dos últimos grandes matemáticos gregos, dando contribuições importantes à geometria. Ele morreu na Grécia aos 60 anos de idade (HEATH *apud* BUENO, 2018, p. 15-16)

Paul Guldin nasceu em 12 de junho de 1577 em Saint- Gall na Suíça. Judeu e criado como protestante se converteu ao catolicismo aos vinte anos de idade ao tempo em que ingressou na ordem jesuíta e mudou seu primeiro nome de Habacuque para Paulo. Ele se dedicou à matemática e à astronomia e atuou como professor de matemática em faculdades jesuítas de Roma e Graz. Em sua obra sobre centros de gravidades de figuras geométricas, intitulada *Centrobaryca*, ele demonstra os dois teoremas de Pappus sobre área e volume de sólidos de revolução. Paul Guldin morreu no dia 3 de novembro de 1643 em Graz, na Áustria, aos 66 anos de idade (RAUTENBERG; PROBST, 2019, p.262).

Os Teoremas de Pappus Guldin são dois teoremas. O primeiro determina a área da superfície de sólidos gerados pela rotação de uma linha em torno de um eixo, sendo esta área obtida multiplicando o centro de gravidade da linha pelo comprimento da circunferência descrita por este centro. O segundo determina o

volume de sólidos gerados pela rotação de uma figura plana em torno de um eixo, sendo este volume obtido multiplicando o centro de gravidade desta figura pelo comprimento da circunferência descrita por este centro. A vantagem de utilização desse teorema é que por meio dele pode-se calcular a área de superfície e o volume de quaisquer que sejam os sólidos de revolução e ainda pode-se determinar facilmente as equações de área e de volume do cilindro, cone e esfera.

Este trabalho será restringido ao teorema sobre volume de sólidos de revolução. A demonstração é feita geralmente com utilização do cálculo integral, mas devido à complexidade e ao nível de ensino que se destina a pesquisa, será limitado ao seu enunciado e explicação. Para maiores detalhes, indica-se os trabalhos de Cardoso (2020), o qual aborda a demonstração deste teorema para sólidos formados pela rotação de triângulos, retângulos e semicírculos, e de Bueno (2018), que traz a demonstração deste teorema para sólidos formados pela rotação de figuras planas delimitada por função.

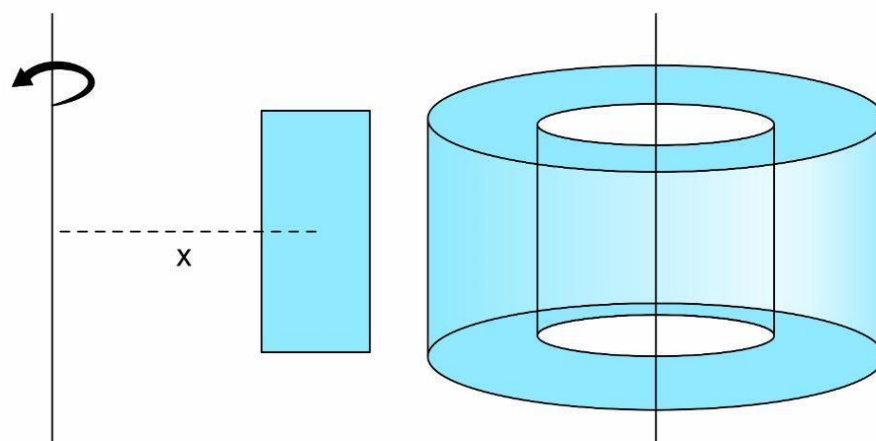
Entretanto, cabe destacar a demonstração do Teorema de Pappus Guldin dada a partir da obra "*Geometriae Pars Universalis*", de 1668, do professor James Gregory. Rautenberg e Probst (2019, p. 280) apresentam a demonstração deste teorema a partir do trabalho de Gregory "utilizando apenas conceitos de geometria, de centro de gravidade, além dos princípios de Arquimedes e Cavalieri", usando, portanto, conceitos anteriores ao desenvolvimento do cálculo. Todavia, por considerar a referida demonstração complexa para a educação básica, resolveu-se não abordar neste trabalho.

**Teorema 2 (O Teorema de Pappus Guldin):** Seja uma figura plana que gira em torno de um eixo de seu plano, o volume gerado é igual à área dessa figura multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro<sup>1</sup> (ver figura 8).

---

<sup>1</sup> Baricentro é uma palavra de origem grega, baricentro (bari = peso) e designa o centro dos pesos, ou ainda o centro de gravidade. O Baricentro também é um ponto em torno do qual existe um equilíbrio de forças. Centro de Gravidade é o ponto no corpo tal que se o corpo for pendurado por esse ponto, o corpo vai permanecer em equilíbrio em qualquer posição, sem oscilar e sem inclinar para qualquer direção (OLIVEIRA, 2016, p. 37).

**Figura 8** – Sólido formado pela rotação de um retângulo afastado do eixo de rotação.



Fonte: Autor

Isso significa que o volume  $V$  de um sólido gerado pela rotação de uma figura plana em torno de um eixo é igual à área  $A$  dessa figura multiplicada pelo comprimento da circunferência descrita pelo baricentro cujo raio é a distância  $x$  do centro de gravidade dessa figura a esse eixo, ou seja,  $V = 2\pi xA$ .

No ensino médio geralmente não se aborda o teorema de Pappus-Guldin no ensino de geometria espacial, possivelmente porque a maioria das escolas adota os livros didáticos, que geralmente não tratam desse teorema, e são esses livros que acabam sendo base de referência para o programa de Matemática. Além disso, o professor adaptado ao ensino disciplinar, não se sente preparado para abordar o teorema, que relaciona conceitos de Matemática com conceitos de física, no caso o centro de gravidade. Entretanto, a própria BNCC (2018) permite a exploração de variados processos para o cálculo de volume e este teorema constitui um método por meio do qual é possível determinar facilmente as equações de volume do cilindro, cone e esfera, evitando a memorização de fórmulas sem significado, além de permitir o cálculo de volume de outros sólidos de revolução diferentes daqueles comumente abordados no ensino médio.

### 2.3 O VOLUME DO CILINDRO, CONE E ESFERA

Nesta subseção faz-se a demonstração das equações de volume dos sólidos de revolução do cilindro, cone e esfera de duas maneiras e de modo que possam

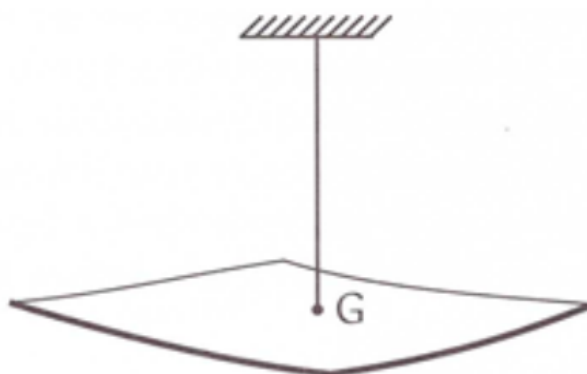
ser abordadas no ensino médio: uma utilizando o Princípio de Cavalieri e outra a partir do Teorema de Pappus Guldin.

Entretanto, antes será tratado brevemente sobre centro de gravidade ou baricentro de figuras planas, de forma intuitiva e estabelecendo como axiomas. Além disso, para essas demonstrações se faz necessários conhecimentos prévios de comprimento de circunferência; área de retângulo, triângulo, círculo e semicírculo; volume do prisma e da pirâmide; propriedades das pirâmides e dos prismas relativas à intersecção destes sólidos por plano paralelo ao plano da base e o Teorema de Pitágoras.

### 2.3.1 Centro de gravidade ou baricentro de figuras planas

O centro de gravidade ou baricentro de uma figura plana pode ser definido intuitivamente como o ponto no qual a figura fica em equilíbrio quando apoiada em uma haste fina, conforme ilustrado na figura 9.

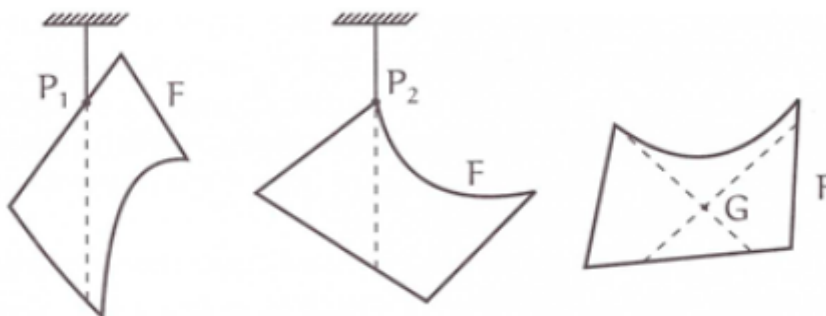
**Figura 9** – Centro de gravidade ou baricentro



Fonte: Neves (2013)

O baricentro de uma figura plana em geral é determinado pelo cálculo integral, contudo é possível determinar este ponto por meio de um método prático: Dada uma figura plana  $F$ . Pendura-se essa figura por um ponto  $P_1$  de seu bordo e traça-se sobre  $F$  a reta vertical que contém esse ponto, ou seja, a reta que contém o fio. Posteriormente, pendura-se a figura sobre outro ponto  $P_2$  de seu bordo e traça-se novamente sobre  $F$  a reta vertical que contém  $P_2$ . A intersecção dessas duas retas é o baricentro, conforme pode ser visto na figura 10 abaixo (NEVES, 2013, p. 22).

**Figura 10-** Baricentro  $G$  da figura plana  $F$ .



Fonte: Neves (2013)

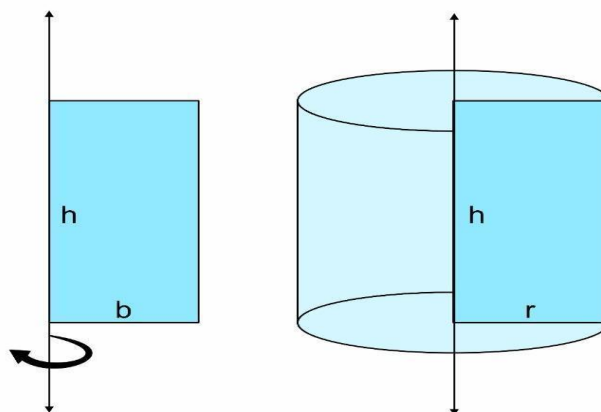
Apresenta-se agora, como axiomas, o centro de gravidade de figuras que são importantes neste trabalho, conforme apresentado por Neves (2013):

- 1) O centro de gravidade de um segmento é seu ponto médio
- 2) Se a figura possui um eixo de simetria, o ponto de gravidade pertence a esse eixo.
- 3) Se a figura possuir dois eixos de simetria, o centro de gravidade estará na intersecção entre os eixos.
- 4) O centro de gravidade de um retângulo de base  $b$  e altura  $h$  é o ponto de intersecção de seus eixos de simetria, dado por  $(\frac{b}{2}, \frac{h}{2})$ .
- 5) O centro de gravidade de um triângulo retângulo de base  $b$  e altura  $h$  é dado por  $(\frac{b}{3}, \frac{h}{3})$ .
- 6) O centro de gravidade de um círculo é seu centro.
- 7) O centro de gravidade de um semicírculo de raio  $R$  é dado por  $(0, \frac{4R}{3\pi})$

### 2.3.2 O volume do cilindro

Antes de apresentar como calcular o volume do cilindro, é necessário entender a sua definição, como sendo o sólido de revolução gerado pela rotação de um retângulo de dimensões base  $b$  e altura  $h$  em torno de um eixo do plano, com a altura coincidindo com esse eixo, onde  $b$  corresponde ao raio  $r$  da base circular do cilindro, conforme pode ser visto na figura 11.

**Figura 11** – Rotação do retângulo



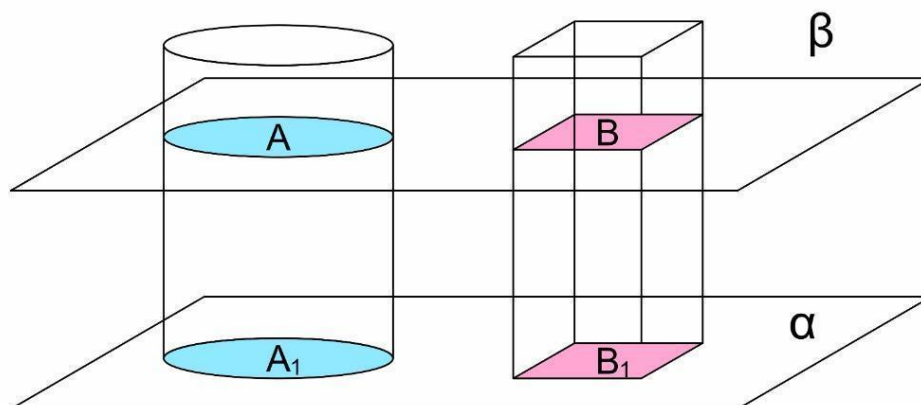
Fonte: Autor

**Proposição 01:** Se  $C$  é um cilindro de raio  $r$  e altura  $h$ , então, seu volume  $V$  é igual  $V = \pi r^2 h$ .

Como já foi citado, a demonstração utiliza como recurso tanto o Princípio de Cavalieri como o Teorema de Pappus Guldin:

*Demonstração pelo Princípio de Cavalieri:* Tomemos um prisma cuja área da base e altura são iguais às do cilindro  $C$  dado. É fácil perceber que todo plano paralelo à base que intersecciona estes sólidos forma em cada um, secções que são congruentes às suas respectivas bases.

**Figura 12** – Prisma e cilindro com áreas da base de mesma medida



Fonte: Autor



Dessa forma, seja  $A_1$  a área da base do cilindro e  $B_1$  a área da base do prisma, a razão entre as áreas de qualquer secção  $A$  do cilindro e secção  $B$  do prisma é igual a  $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A}{B} = 1$ . Logo, sendo  $V$  o volume do cilindro e  $V_1$  o volume do prisma, pelo Princípio de Cavalieri temos que  $\frac{V}{V_1} = 1$ , ou seja,  $V = V_1$  (ver figura 12). Sabe-se que o volume do prisma é  $V_1 = A_b h$  e a área de sua base é igual à área da base do cilindro, que, como conhecemos, é dada por  $\pi r^2$ . Logo, o volume do cilindro é  $V = \pi r^2 h$ , encontrando assim o resultado. (PRIMO, 2013)

*Demonstração pelo Teorema de Pappus Guldin:* Seja  $C$  o cilindro obtido a partir da rotação de um retângulo de base  $b$  e altura  $h$  em torno do eixo  $y$ . Sabe-se que a área do retângulo é dada pela multiplicação das dimensões, base e altura, ou seja,  $A = bh$  e seu centro de gravidade é dado por  $\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$ , conforme apresentado na subseção 2.3.1. Como a altura do retângulo coincide com o eixo  $y$  do plano cartesiano então a distância  $x$  do centro de gravidade a esse eixo é igual  $\frac{b}{2}$ , logo pelo Teorema de Pappus Guldin, o volume  $V$  é:

$$V = 2\pi xA$$

$$V = 2\pi \frac{b}{2} bh$$

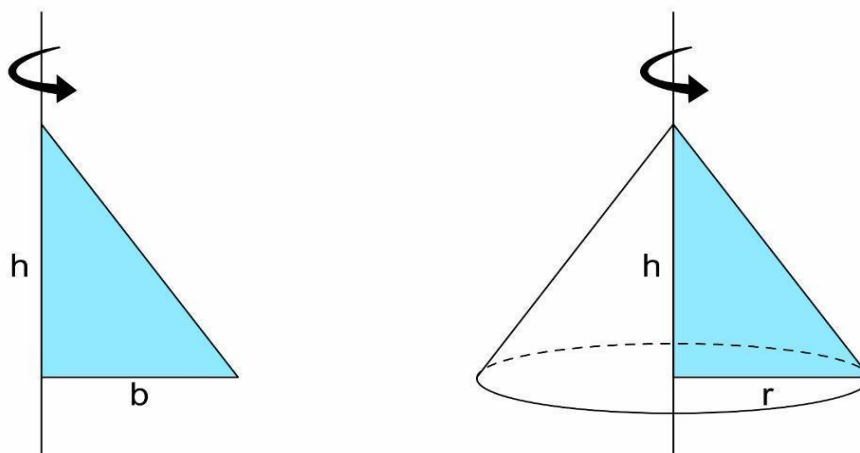
$$V = \pi b^2 h$$

Mas, como  $b = r$ , o volume do cilindro é dado por  $V = \pi r^2 h$ , demonstrando o resultado.

### 2.3.3 O volume do cone

O cone é o sólido de revolução gerado pela rotação de um triângulo retângulo de dimensões base  $b$  e altura  $h$  em torno de um eixo do plano, com a altura coincidindo com esse eixo, onde  $b$  corresponde ao raio  $r$  da base circular do cone (ver figura 13).

**Figura 13** – Rotação do triângulo retângulo

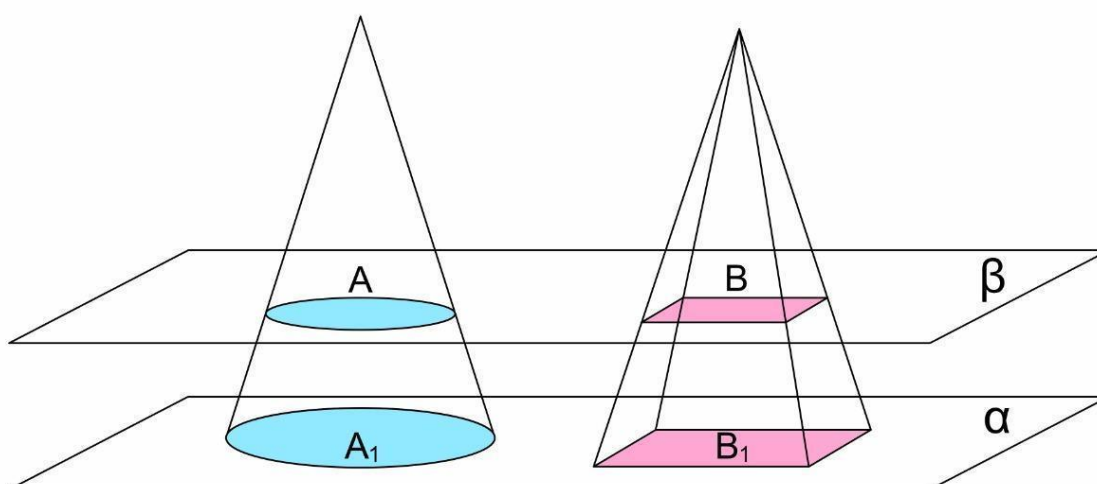


Fonte: Autor

**Proposição 02:** Se  $D$  é um cone de raio  $r$  e altura  $h$ , então, seu volume  $V$  é igual  $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ .

*Demonstração pelo Princípio de Cavalieri:* Seja uma pirâmide cuja área da base e altura são iguais às do cone  $D$  dado. É fácil perceber que todo plano paralelo à base que intersecciona estes sólidos forma em cada um, secções que são semelhantes às suas respectivas bases (ver figura 14).

**Figura 14** – Pirâmide e cone com áreas da base de mesma medida



Fonte: Autor

Dessa forma, seja  $A_1$  a área da base do cone e  $B_1$  a área da base da pirâmide, a razão entre as áreas de qualquer secção  $A$  do cone e secção  $B$  da pirâmide é igual a  $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A}{B} = 1$ . Logo, sendo  $V$  o volume do cone e  $V_1$  o volume da pirâmide, pelo Princípio de Cavalieri temos que  $\frac{V}{V_1} = 1$ , ou seja,  $V = V_1$ . Sabe-se que o volume da pirâmide é  $V_1 = \frac{A_1 h}{3}$  e a área de sua base é igual à área da base do cone, que é dada por  $\pi r^2$ . Logo,  $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$  (PRIMO, 2013).

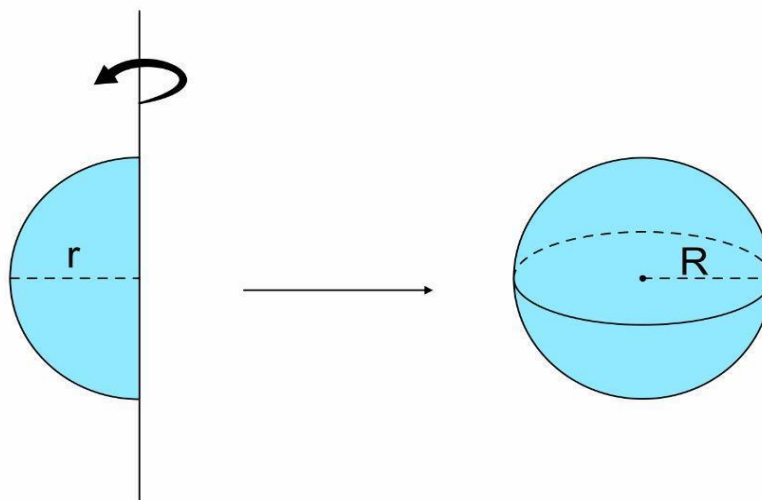
*Demonstração pelo Teorema de Pappus Guldin:* Seja  $D$  o cone obtido a partir da rotação de um triângulo retângulo de base  $b$  e altura  $h$  em torno do eixo  $y$ . Sabemos que a área do triângulo retângulo é igual a  $A = \frac{bh}{2}$  e seu centro de gravidade é dado por  $(\frac{b}{3}, \frac{h}{3})$ , como apresentado na seção 2.3.1. Como a altura do triângulo retângulo coincide com o eixo  $y$  do plano cartesiano então a distância  $x$  do centro de gravidade a esse eixo é igual  $\frac{b}{3}$ , logo pelo Teorema de Pappus Guldin, o volume  $V$  é:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi x A \\ V &= 2\pi \frac{b}{3} \frac{bh}{2} \\ V &= \frac{\pi b^2 h}{3} \end{aligned}$$

Mas, como  $b = r$ , o volume do cone é dado por  $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ .

#### 2.3.4 O volume da esfera

Entende-se a esfera como o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo de raio  $r$  em torno de um eixo do plano, com diâmetro do semicírculo coincidindo com esse eixo, onde  $r$  corresponde ao raio  $R$  da esfera (ver figura 15).

**Figura 15** – Rotação do semicírculo

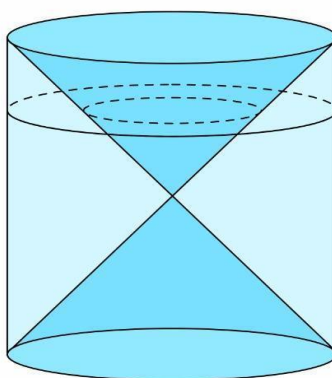
Fonte: Autor

**Proposição 03:** Se  $E$  é uma esfera de raio  $R$  então seu volume  $V$  é igual

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Novamente utiliza-se o Princípio de Cavalieri e o Teorema de Pappus-Guldin para demonstrar a proposição.

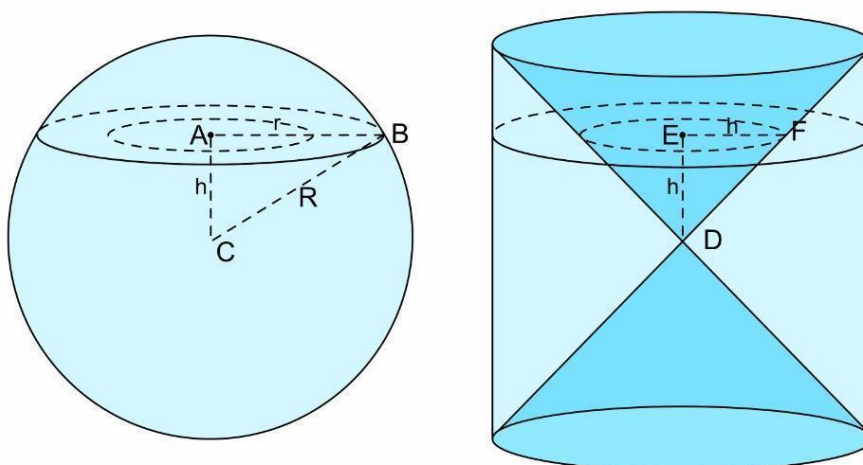
*Demonstração pelo Princípio de Cavalieri:* Seja um sólido  $S$  limitado exteriormente pela superfície lateral de um cilindro equilátero de raio  $R$  e interiormente por dois cones, nos quais os vértices coincidem com o ponto médio do segmento que liga os centros das bases do cilindro e suas bases são os dois círculos que limitam esse cilindro, conforme mostra a figura 16.

**Figura 16** – Sólido  $S$ 

Fonte: Autor

Considerando um plano paralelo ao plano que contém uma base de  $S$  e a esfera  $E$  de raio  $R$  igual ao raio do cilindro e que intersecciona  $S$  a uma distância  $h$  do ponto médio do segmento que liga os centros das bases do cilindro e  $E$  a essa mesma distância  $h$  de seu centro (ver figura 17).

**Figura 17** – Sólido  $S$  e esfera  $E$  sendo interseccionados pelo plano paralelo.



Fonte: Autor

Observa-se que a interseção desse plano com a esfera  $E$  é um círculo de raio  $r^2 = R^2 - h^2 \rightarrow r = \sqrt{R^2 - h^2}$  e sua área  $A_1$ , portanto é dada por  $A_1 = \pi(R^2 - h^2)$ .

Já a interseção do plano com  $S$  é uma coroa circular que tem raio do círculo maior igual ao raio  $R$  da base do cilindro e raio do círculo menor igual à altura  $h$  do cone menor obtido a partir da interseção do cone maior com o plano paralelo, uma vez que são cones semelhantes e equiláteros. Logo, sua área  $A_2$  é dada por  $A_2 = \pi R^2 - \pi h^2 = \pi(R^2 - h^2)$ , como pode ser observado na figura 17.

Dessa forma, qualquer que seja a secção círculo  $A_1$  da esfera  $E$  e a secção coroa circular  $A_2$  do sólido  $S$  a razão entre suas áreas será igual a  $\frac{A_1}{A_2} = 1$ . Logo, sendo  $V$  o volume da esfera e  $V_1$  o volume de  $S$ , pelo Princípio de Cavalieri temos

que  $\frac{V}{V_1} = 1$ , ou seja,  $V = V_1$ . O volume de  $S$  é dado pelo volume do cilindro menos o volume dos dois cones:

$$V_1 = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{\pi R^2 \cdot R}{3}$$

$$V_1 = 2\pi R^3 - 2 \cdot \frac{\pi R^3}{3}$$

$$V_1 = 4 \frac{\pi R^3}{3}$$

Como  $V = V_1$ , conclui-se que o volume da esfera é dado por  $V = 4 \frac{\pi R^3}{3}$ .

(PRIMO, 2013)

*Demonstração pelo Teorema de Pappus Guldin:* Seja  $E$  a esfera obtida a partir da rotação de um semicírculo de raio  $r$  em torno do eixo  $x$  com ponto médio do diâmetro coincidindo com a origem dos eixos. Sabemos que a área do semicírculo é igual a  $A = \frac{\pi r^2}{2}$  e seu centro de gravidade é dado por  $(0, \frac{4r}{3\pi})$ , conforme apresentado na seção 2.3.1. Como o diâmetro do semicírculo coincide com o eixo  $x$  do plano cartesiano então a distância  $x$  do centro de gravidade a esse eixo é igual  $\frac{4r}{3\pi}$ , logo pelo Teorema de Pappus Guldin, o volume  $V$  é:

$$V = 2\pi x A$$

$$V = 2\pi \frac{4r}{3\pi} \frac{\pi r^2}{2}$$

$$V = 4 \frac{\pi r^3}{3}$$

Mas, como  $r = R$ , o volume da esfera é dado por  $V = 4 \frac{\pi R^3}{3}$ , demonstrando o resultado.

### 3 METODOLOGIA

No que diz respeito à metodologia adotada neste trabalho, foi feita uma pesquisa do tipo básica, definida como aquela que acumula conhecimentos e informações que podem eventualmente levar a resultados acadêmicos ou aplicações importantes, mas sem fazê-lo diretamente (SCHWARTZMAN,1979). Além disso, foi elaborada uma sequência didática sobre a aplicabilidade dos teoremas do Princípio de Cavalieri e Pappus Guldin para o cálculo de volume de sólidos de revolução e fundamentada na modelagem matemática como metodologia de ensino. E, que na visão de Zabala (1998, p. 18), é definida como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos”.

A partir do estudo e exposição dos conteúdos necessários para abordagem desta pesquisa, propõe-se uma sequência didática para ser aplicada em uma turma de ensino médio, mais precisamente para alunos que estejam na 2ª série deste nível. Esta sequência didática consistirá em quatro atividades ordenadas e inter-relacionadas denominadas atividade 1, atividade 2, atividade 3 e atividade 4. A atividade 1 constará da apresentação de um texto, que apresentará a temática a qual se pretende abordar e instigar a curiosidade dos alunos quanto às embalagens que eles utilizam no dia a dia. A atividade 2 dará continuidade às questões levantadas na atividade 1 e consistirá no cálculo de volume dos recipientes levantados na primeira parte. A atividade 3 consistirá na validação dos resultados matemáticos óbitos e a atividade 4 consistirá na avaliação da aprendizagem dos conceitos matemáticos estudados. Será o desenvolvimento das atividades 2 e 3 que fornecerá os resultados matemáticos por meio dos quais será analisada a viabilidade da aplicabilidade da sequência didática em sala de aula, na qual, notadamente, os alunos deverão ter conhecimento dos conceitos básicos e fundamentais da geometria plana e espacial.

Os sólidos de revolução utilizados na sequência didática serão tantos sólidos mais conhecidos, como os que não possuem o formato padrão dos sólidos

comumente trabalhados (cone, cilindro e esfera), mas que estão presentes no contexto real de vivências dos estudantes no ensino médio, avaliando assim a possibilidade de utilização de métodos alternativos e possivelmente mais eficientes para o cálculo de volume bem como a expansão do estudo deste conteúdo nessa etapa da educação básica.

Vale ressaltar, todavia, que a análise de viabilidade da sequência didática limita-se quanto a sua possibilidade de aplicação no ensino médio, a partir de resultados matemáticos obtidos. A viabilidade da sequência didática quanto sua efetividade na aprendizagem dos estudantes não será analisada neste trabalho, uma vez que somente seria possível em uma pesquisa aplicada, o que não é a proposta deste trabalho que se limita a uma pesquisa básica. Pode-se no máximo supor que ela pode promover a aprendizagem na medida em que apresentar resultados matemáticos favoráveis e estiver de acordo com os fundamentos da modelagem matemática.



## 4 UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE CÁLCULO DE VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Nesta seção apresenta-se uma proposta de sequência didática para o ensino de volume de sólidos de revolução que pode ser aplicada em turmas da 2ª série do ensino médio. Adotou-se o conceito de sequência didática de Zabala (1998, p. 18), com uso de modelagem matemática seguindo as etapas de Burak (2019, p. 102) e por se tratar de uma proposta, necessariamente tivemos que restringir a modelagem ao caso 01 de Barbosa (2004, p. 76). A sequência didática é composta de 04 atividades, sendo que as atividades 02 e 03 poderão ser feitas em grupos de até 04 alunos (a depender do número de alunos da turma, uma vez que nestas atividades haverá a necessidade de um acompanhamento mais minucioso pelo professor). Já a atividade 04 deve ser individual.

### 4.1 PROPOSTA DE ATIVIDADE 1

Nesta atividade, o professor fará a apresentação da temática, trará os dados que servirão de base para a formulação do problema e formulará este problema a partir de uma reportagem do jornal Extra (ANEXO A). Essa reportagem divulgada em 14 de julho de 2015 trata da redução de conteúdo, tamanho ou volume de produtos em supermercados sem diminuição do valor cobrado e algumas vezes sem comunicar aos consumidores sobre essa redução ou não divulgarem a informação de forma clara nos rótulos.

O professor deverá solicitar aos alunos a leitura da reportagem e posteriormente fará a discussão. Notadamente, a temática tratada é sobre economia e os dados apresentados são dados quantitativos de produtos que tiveram redução de conteúdo, tamanho ou volume sem redução de preço e algumas vezes sem informar ao consumidor sobre essa redução. Diante da situação relatada na reportagem, e tratando especificamente dos produtos vendidos considerando seu volume, o professor deve levantar o seguinte questionamento: *O volume indicado no rótulo da embalagem, pelo qual pagamos, corresponde ao volume real do produto?*

A partir da formulação deste problema o professor apresentará recipientes (é adequado que os recipientes de revolução sejam mais próximos possíveis dos sólidos de revolução comuns) que contém os produtos cujo volume será calculado pelos estudantes. Estes produtos devem fazer parte da realidade dos estudantes para que eles se sintam motivados a buscarem a solução do problema.

#### 4.2 PROPOSTA DE ATIVIDADE 2

Esta atividade será a de resolução pelos estudantes do problema formulado, sendo necessária a orientação do professor e será constituída de duas etapas (nesse momento, o professor deverá deixar claro para o aluno que o cálculo de volume ficará restrito aos produtos cujos recipientes têm formato de sólido de revolução).

A primeira etapa consistirá em uma pesquisa para aquisição pelo aluno de conceitos e propriedades sobre sólidos de revolução. O professor deverá orientar a atividade de pesquisa norteada pelas questões:

**1)** O que são sólidos de revolução?

**2)** Quais os principais sólidos de revolução e como se conceitua cada um deles?

**3)** Quais métodos são utilizados para calcular volume de sólidos de revolução?

(Aqui o professor deverá enunciar e explicar o Princípio de Cavalieri e o teorema de Pappus Guldin sobre volume, sem demonstração, explicando, no caso do teorema de Pappus Guldin, o conceito de centro de gravidade de figuras planas e o centro de gravidade das principais figuras planas).

**4)** Como se determina o volume dos principais sólidos de revolução?

(Aqui o professor deverá solicitar e orientar os estudantes na demonstração do volume do cilindro, cone e esfera pelo Princípio de Cavalieri e pelo teorema de Pappus Guldin, conforme apresentado na seção 3, no qual é notável que a partir de conhecimentos prévios e o conhecimento de centro de gravidade de figuras planas, determina-se, apenas utilizando conceitos estudados na educação básica, o volume dos referidos sólidos, de modo razoavelmente simples e que faz com que o

estudante compreenda essas equações de volume sem necessidade de memorizá-las enquanto fórmulas prontas sem significado).

A segunda etapa consistirá na determinação pelos estudantes dos volumes dos produtos contidos nos recipientes de revolução propostos pelo professor, utilizando os conceitos e propriedades pesquisados na primeira etapa. (Nessa proposta optou-se por cinco, por considerarmos um número razoável para ser trabalhado no contexto de sala de aula, em atividade em grupo de 04 ou 05 estudantes, em aproximadamente 05 aulas de 45 minutos)

A seguir, a sugestão de recipientes que contém os produtos cujos volumes serão calculados pelos estudantes. A saber: recipiente de creme de cabelo, de removedor de esmalte, de molho de alho, de solução fisiológica e de um achocolatado.

A escolha desses recipientes se deu pelo fato de serem produtos de fácil acesso para os estudantes e que, quase sempre, com as técnicas comumente apresentadas em sala de aula ele encontraria limitações no cálculo do volume.

#### 4.2.1 Cálculo do volume do recipiente contendo creme de cabelo

Na figura 18 tem-se um produto que é facilmente encontrado em mercados e farmácias e que, em geral, os alunos possuem acesso em suas residências.

**Figura 18** - Recipiente com 300 ml de creme de cabelo



Fonte: Autor

**Objetivo:** Determinar se o volume de creme de cabelo corresponde ao indicado no rótulo do recipiente.

**Procedimento:**

- 1) Primeiramente faz-se um corte horizontal paralelo à base do recipiente na altura do líquido e posteriormente, um corte vertical simétrico para dividi-lo em duas partes iguais, conforme mostrado na figura 19 (no recipiente vem indicando o local deste corte simétrico).

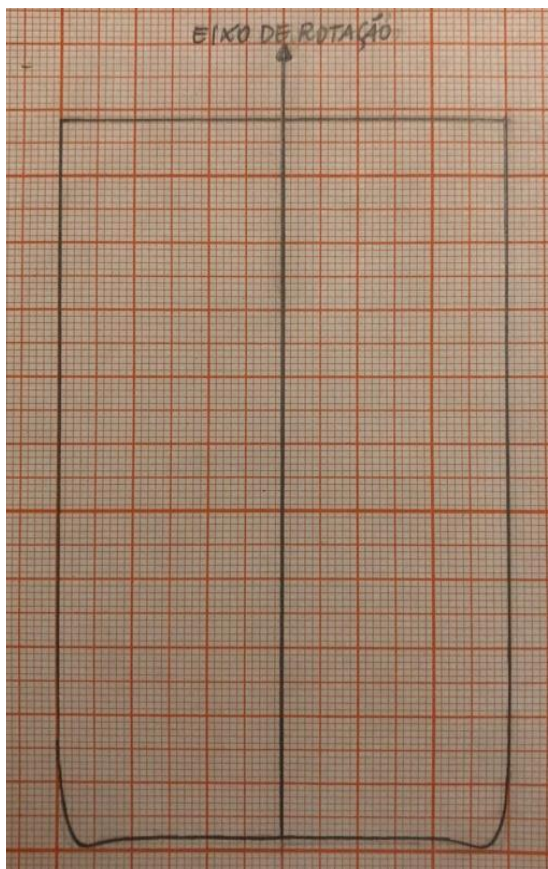
**Figura 19-** Recipiente após corte simétrico



Fonte: Autor

- 2) Contorna-se uma das partes do recipiente em um papel milimetrado (ver figura 20), traçando o eixo de simetria da figura plana obtida (subtrai-se da figura a espessura do recipiente igual a  $0,5\text{ mm}$  na lateral e  $1\text{ mm}$  na base, e para facilitar os cálculos, arredonda-se para milímetros inteiros ou milímetro e meio, as dimensões horizontais e verticais do recipiente)

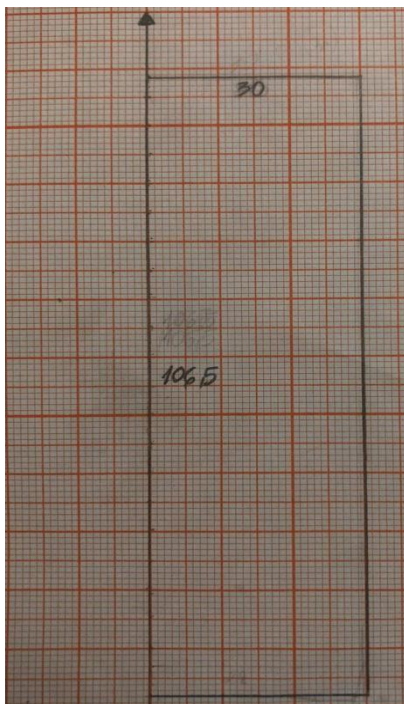
**Figura 20-** Figura plana obtida pelo contorno da parte do recipiente



Fonte: Autor

- 3) Determina-se o volume do sólido gerado pela rotação da figura plana em torno do eixo dado. Entretanto, esta figura é formada por alguns lados curvos, neste caso, como os métodos estudados não fornecem sua área nem seu centro de gravidade, deve-se substituí-los por segmentos retos. Observa-se que na substituição do lado curvo lateral há ganho de área e na substituição do lado curvo da base há perda de área, como pode-se notar na figura 21. Pode-se utilizar tanto o Princípio de Cavalieri quanto o Teorema de Pappus-Guldin, visto que após a substituição dos lados curvos, a figura plana obtida é um retângulo, cuja rotação em torno do eixo gera um cilindro.

**Figura 21-** Figura plana após substituição dos lados curvos



Fonte: Autor

*Usando o Teorema de Pappus Guldin:* o retângulo tem medida da base igual a  $30\text{ mm}$  e altura mede  $106,5\text{ mm}$ , logo sua área mede  $3159\text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $15$ . Usando o Teorema de Pappus Guldin, temos que:

$$V = 2\pi \cdot 15 \cdot 3195$$

$$V = 300969\text{ mm}^3$$

*Usando o Teorema de Cavalieri:* o cilindro gerado tem raio da base  $r = 30\text{ mm}$  e altura  $h = 106,5\text{ mm}$ . Pelo Princípio de Cavalieri, sabemos que o volume de um cilindro circular reto é dado por  $V = \pi r^2 h$ , logo o volume será igual a:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot 30^2 \cdot 106,5$$

$$V = 300969\text{ mm}^3$$

Em ambos os casos, como  $1\text{ l} = 1000000\text{ mm}^3$ , então  $V = 0,300969\text{ l}$

E, como  $1l = 1000 ml$ , então  $V \cong 300,97 ml$ .

#### 4.2.2 Cálculo do volume do recipiente contendo removedor de esmalte

Na figura 22, tem-se um recipiente com 100 ml de removedor de esmaltes, que como o creme de cabelo, é facilmente encontrado em mercados e farmácias

**Figura 22-** Recipiente com 100 ml de acetona



Fonte: Autor

**Objetivo:** Determinar se o volume de acetona corresponde ao indicado no rótulo do recipiente.

**Procedimento:**

- 1) Primeiramente faz-se um corte horizontal paralelo à base do recipiente na altura do líquido e posteriormente, um corte vertical simétrico para dividi-lo em duas partes iguais, conforme figura 23 (no recipiente vem indicando o local deste corte simétrico).

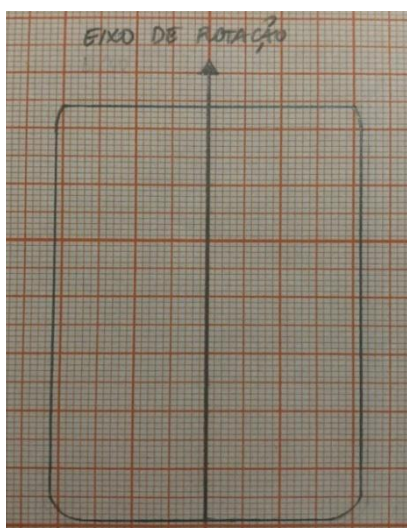
**Figura 23-** Recipiente após corte simétrico



Fonte: Autor

- 2) Contorna-se uma das partes do recipiente em um papel milimetrado, traçando o eixo de simetria da figura plana obtida (ver figura 24). (subtrai-se da figura a espessura do recipiente igual a  $1\text{ mm}$ , e para facilitar os cálculos, arredonda para milímetros inteiros, as dimensões horizontais e verticais do recipiente).

**Figura 24-** Figura plana obtida pelo contorno da parte do recipiente



Fonte: Autor

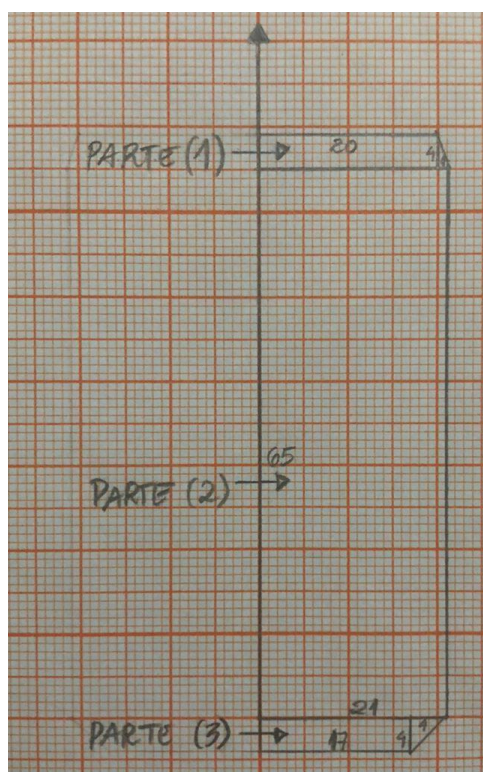
- 3) Utiliza-se o Teorema de Pappus Guldin para determinar o volume do sólido gerado pela rotação da figura plana em torno do eixo dado. Entretanto, esta figura é formada por alguns lados curvos, e por isso deve-se substituí-los por segmentos retos. Observa-se que na substituição



do lado curvo lateral superior e do lado curvo lateral inferior há perda de área. Para facilitar o cálculo, divide-se a figura plana em três partes, conforme a figura 25.

(Pode-se usar o Teorema de Cavalieri para calcular o volume do cilindro e dos dois troncos de cone, porém como tronco não foi abordado, é conveniente usar o Teorema de Pappus Guldin)

**Figura 25-** Figura plana após substituição dos lados curvos



Fonte: Autor

A parte (1) é um trapézio. Deve-se dividi-lo em um retângulo e um triângulo retângulo. O retângulo tem medida da base igual a  $20\text{ mm}$  e altura mede  $4\text{ mm}$ , logo sua área mede  $80\text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $10$ . O triângulo retângulo tem base medindo  $1\text{ mm}$  e a altura mede  $4\text{ mm}$ , portanto sua área mede  $2\text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $\frac{61}{3}$ , já que o triângulo está à distância de  $20\text{ mm}$  do eixo. O volume gerado pela parte (1) da figura é igual ao volume gerado pela

rotação do retângulo somado com o volume gerado pela rotação do triângulo retângulo. Pelo Teorema de Pappus Guldin, tem-se que:

$$V_1 = 2\pi \cdot 10 \cdot 80 + 2\pi \cdot \frac{61}{3} \cdot 2$$

$$V_1 = 5024 + 255,387$$

$$V_1 = 5279,387 \text{ mm}^3$$

A parte (2) é um retângulo que tem medida da base igual a  $21 \text{ mm}$  e altura mede  $65 \text{ mm}$ , logo sua área mede  $1365 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $10,5$ . Pelo teorema de Pappus Guldin, o volume é dado por:

$$V_2 = 2\pi \cdot 10,5 \cdot 1365$$

$$V_2 = 90008,1 \text{ mm}^3$$

A parte (3) da figura é um trapézio. Deve-se dividi-lo em um retângulo e um triângulo retângulo. O retângulo tem base medindo  $17 \text{ mm}$  e a altura mede  $4 \text{ mm}$ , portanto sua área mede  $68 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $\frac{17}{2}$ . O triângulo retângulo tem base medindo  $4 \text{ mm}$  e a altura mede  $4 \text{ mm}$ , portanto sua área mede  $8 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $\frac{55}{3}$ , já que o triângulo está à distância de  $17 \text{ mm}$  do eixo. O volume gerado pela parte (3) da figura é igual à soma dos volumes gerados pelas rotações do retângulo e do triângulo retângulo. Pelo teorema de Pappus Guldin, tem-se que:

$$V_3 = 2\pi \frac{17}{2} \cdot 68 + 2\pi \cdot \frac{55}{3} \cdot 8$$

$$V_3 = 3629,84 + 921,07$$

$$V_3 = 4550,9 \text{ mm}^3$$

O volume gerado pela figura plana será igual à soma dos volumes:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V = 99838,38 \text{ mm}^3$$

Como  $1 \text{ l} = 1000000 \text{ mm}^3$ , então  $V = 0,9983838 \text{ l}$

E, como  $1l = 1000 ml$ , então  $V \cong 99,84 ml$ .

#### 4.2.3 Cálculo do volume do recipiente contendo molho de alho

O recipiente a seguir, de acordo com o indicado na embalagem, contém 150 ml de molho de alho, conforme mostra a figura 26.

**Figura 26-** Recipiente com 150 ml de molho de alho



Fonte: Autor

**Objetivo:** Determinar se o volume de molho de alho corresponde ao indicado no rótulo do recipiente.

**Procedimento:**

- 1) Primeiramente faz-se um corte horizontal paralelo à base do recipiente na altura do líquido e posteriormente, um corte vertical simétrico para dividi-lo em duas partes iguais (ver figura 27) (no recipiente vem indicando o local deste corte simétrico).

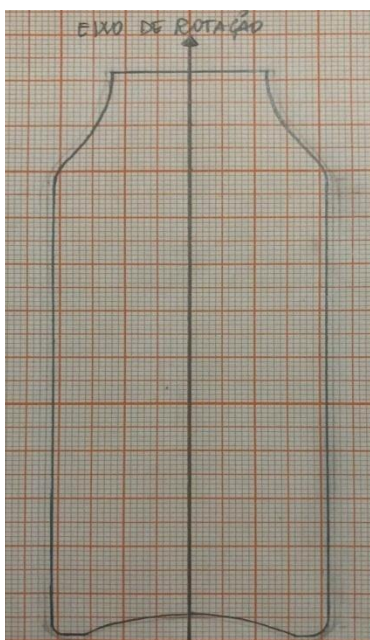
**Figura 27-** Recipiente após corte simétrico



Fonte: Autor

- 2) Contorna-se uma das partes do recipiente em um papel milimetrado (ver figura 28), traçando o eixo de simetria da figura plana obtida (subtrai-se da figura a espessura do recipiente igual a  $1\text{ mm}$ , e para facilitar os cálculos, arredonda para milímetros inteiros, as dimensões horizontais e verticais do recipiente).

**Figura 28-** Figura plana obtida pelo contorno do recipiente



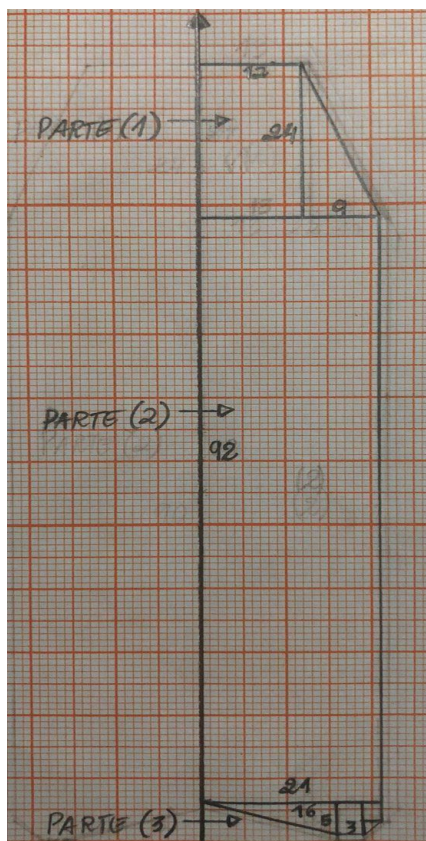
Fonte: Autor

- 3) Utiliza-se o Teorema de Pappus Guldin para determinar o volume do sólido gerado pela rotação da figura plana em torno do eixo dado. Entretanto, esta

figura é formada por alguns lados curvos, e por isso deve-se substituí-los por segmentos retos. Observa-se que na substituição do lado curvo lateral superior há mais ganho que perda de área; na substituição do lado curvo lateral inferior há perda de área e na substituição do lado curvo da base há ganho de área. Para facilitar o cálculo, deve-se dividir a figura plana em três partes, conforme a figura 29.

(Neste caso não é conveniente usar o Teorema de Cavalieri, porque a parte (3) da figura gera um sólido que não possui o formato dos sólidos de revolução comuns)

**Figura 29-** Figura plana após substituição dos lados curvos



Fonte: Autor

A parte (1) é um trapézio. Deve-se dividi-lo em um retângulo e um triângulo retângulo. O retângulo tem medida da base igual a  $12\text{ mm}$  e altura mede  $24\text{ mm}$ , logo sua área mede  $288\text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $6$ . O triângulo retângulo tem base medindo  $9\text{ mm}$  e a

altura mede  $24 \text{ mm}$ , portanto sua área mede  $108 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $15$ , já que o triângulo está à distância de  $12 \text{ mm}$  do eixo. O volume gerado pela parte (1) da figura é igual ao volume gerado pela rotação do retângulo somado com o volume gerado pela rotação do triângulo retângulo. Pelo Teorema de Pappus Guldin, tem-se que:

$$V_1 = 2\pi \cdot 6 \cdot 288 + 2\pi \cdot 15 \cdot 108$$

$$V_1 = 10851,84 + 10173,6$$

$$V_1 = 21025,44 \text{ mm}^3$$

A parte (2) é um retângulo que tem medida da base igual a  $21 \text{ mm}$  e altura mede  $92 \text{ mm}$ , logo sua área mede  $1932 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $10,5$ . Pelo teorema de Pappus Guldin, o volume é dado por:

$$V_2 = 2\pi \cdot 10,5 \cdot 1932$$

$$V_2 = 127396,08 \text{ mm}^3$$

A parte (3) da figura é um pentágono. Deve-se dividi-lo em dois retângulos e dois triângulos retângulos. O primeiro triângulo retângulo tem base medindo  $16 \text{ mm}$  e a altura mede  $5 \text{ mm}$ , portanto sua área mede  $40 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $\frac{16}{3}$ . O primeiro retângulo tem base medindo  $3 \text{ mm}$  e a altura mede  $5 \text{ mm}$ , portanto sua área mede  $15 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $\frac{35}{2}$ , já que o retângulo está à distância de  $16 \text{ mm}$  do eixo. O segundo triângulo retângulo tem base medindo  $2 \text{ mm}$  e a altura mede  $2 \text{ mm}$ , portanto sua área mede  $2 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $\frac{59}{3}$ , já que o triângulo está à distância de  $19 \text{ mm}$  do eixo. O segundo retângulo tem base medindo  $2 \text{ mm}$  e a altura mede  $3 \text{ mm}$ , portanto sua área mede  $6 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $20$ , já que o retângulo está à distância de  $19 \text{ mm}$  do eixo. O volume gerado pela parte (3) da figura é igual à soma dos volumes gerados pelas rotações dos dois triângulos retângulos e dos dois retângulos. Pelo teorema de Pappus Guldin, tem-se que:

$$V_3 = 2\pi \frac{16}{3} \cdot 40 + 2\pi \cdot \frac{35}{2} \cdot 15 + 2\pi \cdot \frac{59}{3} \cdot 2 + 2\pi \cdot 20 \cdot 6$$

$$V_3 = 1339,73 + 1648,5 + 247,01 + 753,6$$

$$V_3 = 3988,84 \text{ mm}^3$$

O volume gerado pela figura plana será igual à soma dos volumes:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V = 152410,36 \text{ mm}^3$$

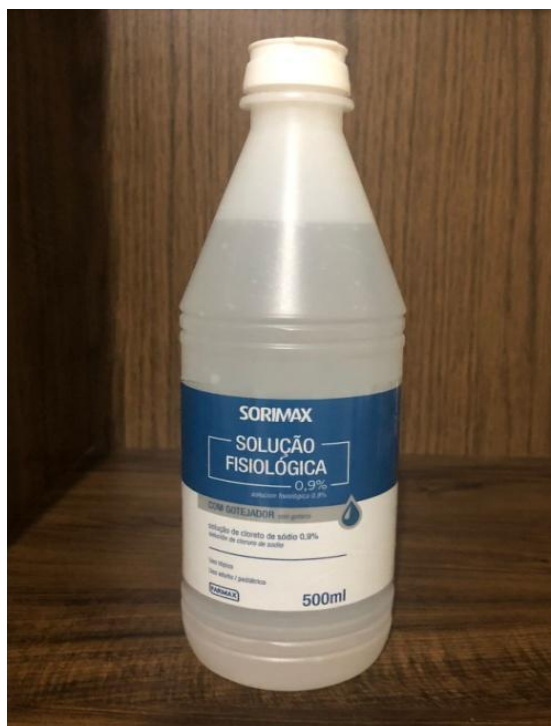
Como  $1l = 1000000 \text{ mm}^3$ , então  $V = 0,15241036 l$

E, como  $1l = 1000 \text{ ml}$ , então  $V \cong 152,41 \text{ ml}$ .

#### 4.2.4 Cálculo do volume do recipiente contendo solução fisiológica

Na figura 30, temos um recipiente de 500 ml contendo solução fisiológica.

**Figura 30-** Recipiente com 500 ml de solução fisiológica



Fonte: Autor

**Objetivo:** Determinar se o volume de solução fisiológica corresponde ao indicado no rótulo do recipiente.

**Procedimento:**

- 1) Primeiramente faz-se um corte horizontal paralelo à base do recipiente na altura do líquido e posteriormente, um corte vertical simétrico para dividi-lo em duas partes iguais, conforme mostra a figura 31 (no recipiente vem marcando o local deste corte simétrico).

**Figura 31-** Recipiente após corte simétrico

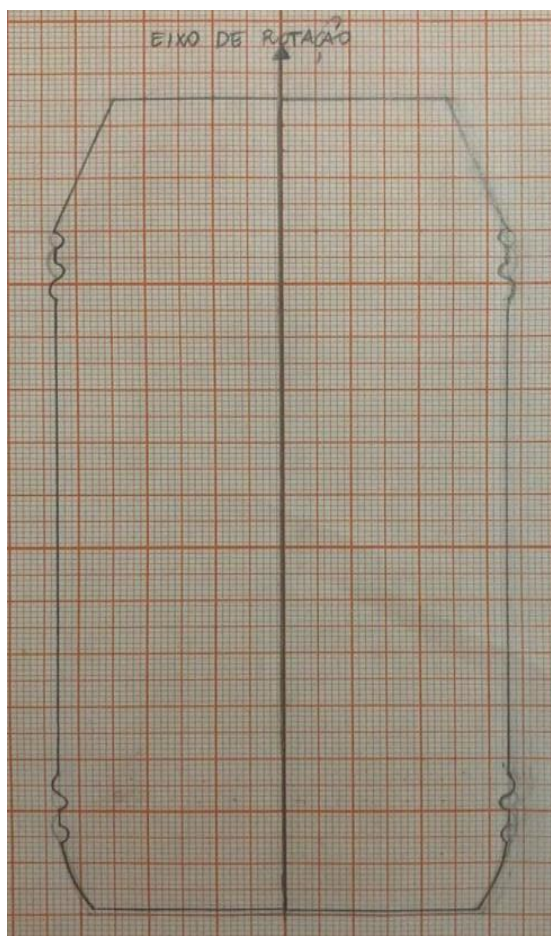


Fonte: Autor

- 2) Contorna-se uma das partes do recipiente em um papel milimetrado (ver figura 32), traçando o eixo de simetria da figura plana obtida (subtrai-se da figura a espessura do recipiente igual a  $0,5\text{ mm}$  na lateral e  $1\text{ mm}$  na base e para facilitar os cálculos, arredonda para milímetros inteiros ou milímetros e meio, as dimensões horizontais e verticais do recipiente).



**Figura 32-** Figura plana obtida pelo contorno do recipiente

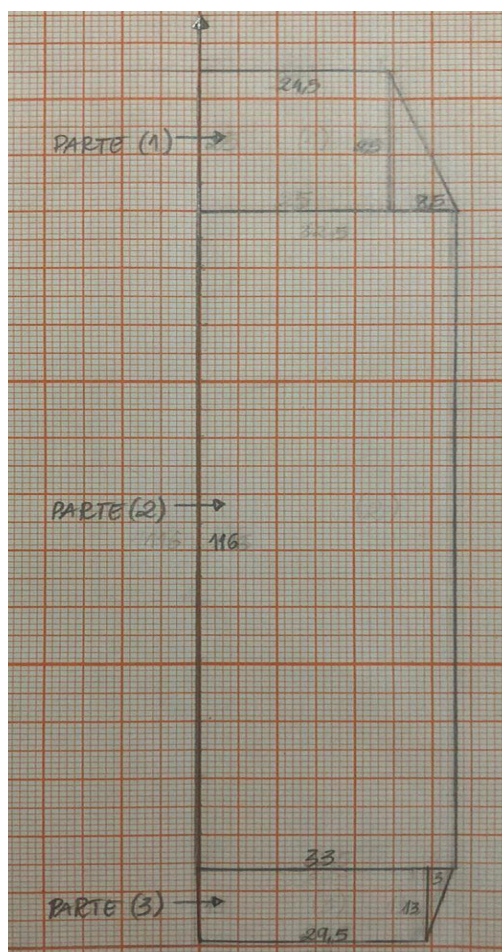


Fonte: Autor

- 3) Utiliza-se o Teorema de Pappus Guldin para determinar o volume do sólido gerado pela rotação da figura plana em torno do eixo dado. Entretanto, esta figura é formada por alguns lados curvos, e por isso deve-se substituí-los por segmentos retos. Observa-se que na substituição dos dois primeiros e dos dois últimos lados curvos laterais centrais existe ganho de área e na substituição dos outros dois lados curvos laterais centrais e do lado curvo lateral inferior resulta em perda de área. Para facilitar o cálculo, divide-se a figura plana em três partes, conforme a figura 33.

(Da mesma forma que o caso do removedor de esmalte, pode-se usar o Teorema de Cavalieri para calcular o volume do cilindro e dos dois troncos de cone, porém como tronco de cone não foi abordado, é conveniente usar o Teorema de Pappus Guldin)

**Figura 33-** Figura plana após substituição dos lados curvos



Fonte: Autor

A parte (1) é um trapézio. Deve-se dividi-lo em um retângulo e um triângulo retângulo. O retângulo tem medida da base igual a  $24,5 \text{ mm}$  e altura mede  $25 \text{ mm}$ , logo sua área mede  $612,5 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $12,25$ . O triângulo retângulo tem base medindo  $8,5 \text{ mm}$  e a altura mede  $25 \text{ mm}$ , portanto sua área mede  $106,25 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $27,33$ , já que o triângulo está à distância de  $24,5 \text{ mm}$  do eixo. O volume gerado pela parte (1) da figura é igual ao volume gerado pela rotação do retângulo somado com o volume gerado pela rotação do triângulo retângulo. Pelo Teorema de Pappus Guldin, tem-se que:

$$V_1 = 2\pi \cdot 12,25 \cdot 612,5 + 2\pi \cdot 27,33 \cdot 106,25$$

$$V_1 = 47119,625 + 18235,9425$$

$$V_1 = 65355,5675 \text{ mm}^3$$

A parte (2) é um retângulo que tem medida da base igual a  $33 \text{ mm}$  e altura mede  $116 \text{ mm}$ , logo sua área mede  $3828 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $\frac{33}{2}$ . Pelo teorema de Pappus Guldin, o volume é dado por:

$$V_2 = 2\pi \cdot \frac{33}{2} \cdot 3828$$

$$V_2 = 396657,36 \text{ mm}^3$$

A parte (3) da figura é um trapézio. Deve-se dividi-lo em um retângulo e um triângulo retângulo. O retângulo tem base medindo  $29,5 \text{ mm}$  e a altura mede  $13 \text{ mm}$ , portanto sua área mede  $383,5 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $14,75$ . O triângulo retângulo tem base medindo  $3 \text{ mm}$  e a altura mede  $13 \text{ mm}$ , portanto sua área mede  $19,5 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $30,5$ , já que o triângulo está à distância de  $29,5 \text{ mm}$  do eixo. O volume gerado pela parte (3) da figura é igual à soma dos volumes gerados pelas rotações do retângulo e do triângulo retângulo. Pelo teorema de Pappus Guldin, tem-se que:

$$V_3 = 2\pi \cdot 14,75 \cdot 383,5 + 2\pi \cdot 30,5 \cdot 19,5$$

$$V_3 = 35523,605 + 3735,03$$

$$V_3 = 39258,635 \text{ mm}^3$$

O volume gerado pela figura plana será igual à soma dos volumes:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V = 501271,562 \text{ mm}^3$$

Como  $1 \text{ l} = 1000000 \text{ mm}^3$ , então  $V = 0,501271562 \text{ l}$

E, como  $1 \text{ l} = 1000 \text{ ml}$ , então  $V \cong 501,27 \text{ ml}$ .

#### 4.2.5 Cálculo do volume do recipiente contendo achocolatado

Na figura 34, temos a imagem de uma embalagem de um achocolatado, que tem volume de 270 ml.

**Figura 34-** Recipiente com 270 ml de achocolatado



Fonte: Autor

**Objetivo:** Determinar se o volume de achocolatado corresponde ao indicado no rótulo do recipiente.

**Procedimento:**

- 1) Primeiramente faz-se um corte horizontal paralelo à base do recipiente na altura do líquido e posteriormente, um corte vertical simétrico para dividi-lo em duas partes iguais, conforme a figura 35 (no recipiente vem marcando o local deste corte simétrico).

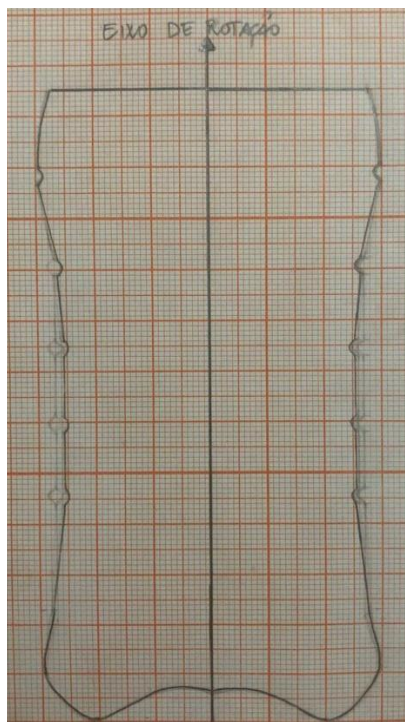
**Figura 35-** Recipiente após corte simétrico



Fonte: Autor

- 2) Contorna-se uma das partes do recipiente em um papel milimetrado (ver figura 36), traçando o eixo de simetria da figura plana obtida (subtrai-se da figura a espessura do recipiente igual a  $0,5\text{ mm}$  e para facilitar os cálculos, arredonda-se para milímetros inteiros ou milímetros e meio, as dimensões horizontais e verticais do recipiente).

**Figura 36-** Figura plana obtida pelo contorno do recipiente

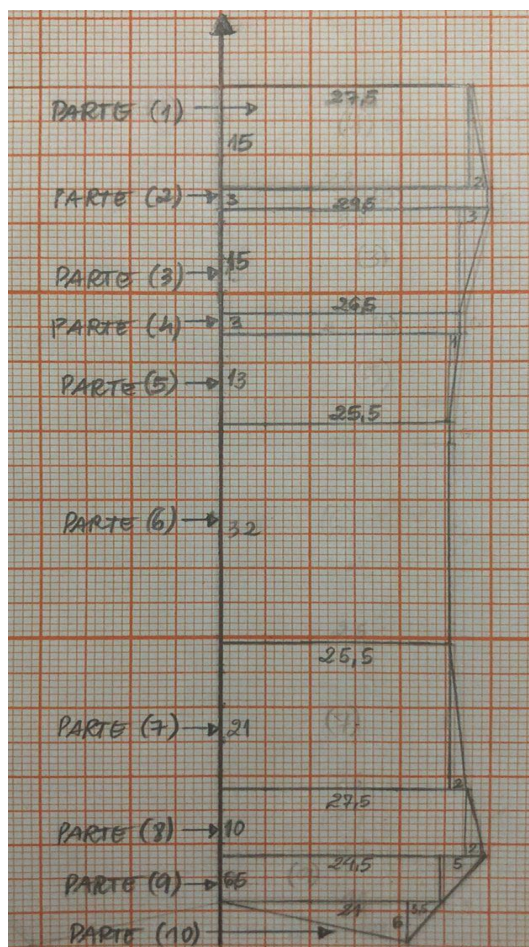


Fonte: Autor

3) Utiliza-se o Teorema de Pappus Guldin para determinar o volume do sólido gerado pela rotação da figura plana em torno do eixo dado. Entretanto, esta figura é formada por alguns lados curvos, e por isso deve-se substituí-los por segmentos retos. Observa-se que na substituição do primeiro lado curvo lateral superior e dos dois últimos laterais inferiores resultam em perda de área e na substituição dos lados curvos laterais centrais e da base resultam em ganho de área. Para facilitar o cálculo, divide-se a figura plana em dez partes, conforme a figura 37.

(Neste caso não é conveniente usar o Teorema de Cavalieri, porque a parte (10) da figura gera um sólido que não possui o formato dos sólidos de revolução comuns)

**Figura 37-** Figura plana após substituição dos lados curvos



Fonte: Autor

A parte (1) é um trapézio. Deve-se dividi-lo em um retângulo e um triângulo retângulo. O retângulo tem medida da base igual a  $27,5\text{ mm}$  e altura mede  $15\text{ mm}$ , logo sua área mede  $412,5\text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $13,75$ . O triângulo retângulo tem base medindo  $2\text{ mm}$  e a altura mede  $15\text{ mm}$ , portanto sua área mede  $15\text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $28,17$ , já que o triângulo está à distância de  $27,5\text{ mm}$  do eixo. O volume gerado pela parte (1) da figura é igual ao volume gerado pela rotação do retângulo somado com o volume gerado pela rotação do triângulo retângulo. Pelo Teorema de Pappus Guldin, tem-se que:

$$V_1 = 2\pi \cdot 13,75 \cdot 412,5 + 2\pi \cdot 28,17 \cdot 15$$

$$V_1 = 35619,375 + 2653,614$$

$$V_1 = 38272,99\text{ mm}^3$$

A parte (2) é um retângulo que tem medida da base igual a  $29,5\text{ mm}$  e altura mede  $3\text{ mm}$ , logo sua área mede  $88,5\text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $14,75$ . Pelo teorema de Pappus Guldin, o volume é dado por:

$$V_2 = 2\pi \cdot 14,75 \cdot 88,5$$

$$V_2 = 8197,755\text{ mm}^3$$

A parte (3) da figura é um trapézio. Deve-se dividi-lo em um retângulo e um triângulo retângulo. O retângulo tem base medindo  $26,5\text{ mm}$  e a altura mede  $15\text{ mm}$ , portanto sua área mede  $397,5\text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $13,25$ . O triângulo retângulo tem base medindo  $3\text{ mm}$  e a altura mede  $15\text{ mm}$ , portanto sua área mede  $22,5\text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $27,5$ , já que o triângulo está à distância de  $26,5\text{ mm}$  do eixo. O volume gerado pela parte (3) da figura é igual à soma dos volumes gerados pelas rotações do retângulo e do triângulo retângulo. Pelo teorema de Pappus Guldin, tem-se que:

$$V_3 = 2\pi \cdot 13,25 \cdot 397,5 + 2\pi \cdot 27,5 \cdot 22,5$$

$$V_3 = 33075,975 + 3885,75$$

$$V_3 = 36961,725 \text{ mm}^3$$

A parte (4) é um retângulo que tem medida da base igual a  $26,5 \text{ mm}$  e altura mede  $3 \text{ mm}$ , logo sua área mede  $79,5 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $13,25$ . Pelo teorema de Pappus Guldin, o volume é dado por:

$$V_4 = 2\pi \cdot 13,25 \cdot 79,5$$

$$V_4 = 6615,195 \text{ mm}^3$$

A parte (5) da figura é um trapézio. Deve-se dividi-lo em um retângulo e um triângulo retângulo. O retângulo tem base medindo  $25,5 \text{ mm}$  e a altura mede  $13 \text{ mm}$ , portanto sua área mede  $331,5 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $12,75$ . O triângulo retângulo tem base medindo  $1 \text{ mm}$  e a altura mede  $13 \text{ mm}$ , portanto sua área mede  $6,5 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $25,83$ , já que o triângulo está à distância de  $25,5 \text{ mm}$  do eixo. O volume gerado pela parte (5) da figura é igual à soma dos volumes gerados pelas rotações do retângulo e do triângulo retângulo. Pelo teorema de Pappus Guldin, tem-se que:

$$V_5 = 2\pi \cdot 12,75 \cdot 331,5 + 2\pi \cdot 25,83 \cdot 6,5$$

$$V_5 = 26543,205 + 1054,3806$$

$$V_5 = 27597,5856 \text{ mm}^3$$

A parte (6) é um retângulo que tem medida da base igual a  $25,5 \text{ mm}$  e altura mede  $32 \text{ mm}$ , logo sua área mede  $816 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $12,75$ . Pelo teorema de Pappus Guldin, o volume é dado por:

$$V_6 = 2\pi \cdot 12,75 \cdot 816$$

$$V_6 = 65337,12 \text{ mm}^3$$

A parte (7) da figura é um trapézio. Deve-se dividi-lo em um retângulo e um triângulo retângulo. O retângulo tem base medindo  $25,5 \text{ mm}$  e a altura mede



21 mm, portanto sua área mede  $535,5 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a 12,75. O triângulo retângulo tem base medindo 2 mm e a altura mede 21 mm, portanto sua área mede  $21 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a 26,17, já que o triângulo está à distância de 25,5 mm do eixo. O volume gerado pela parte (7) da figura é igual à soma dos volumes gerados pelas rotações do retângulo e do triângulo retângulo. Pelo teorema de Pappus Guldin, tem-se que:

$$V_7 = 2\pi \cdot 12,75 \cdot 535,5 + 2\pi \cdot 26,17 \cdot 21$$

$$V_7 = 42877,485 + 3451,2996$$

$$V_7 = 46328,7846 \text{ mm}^3$$

A parte (8) da figura é um trapézio. Deve-se dividi-lo em um retângulo e um triângulo retângulo. O retângulo tem base medindo 27,5 mm e a altura mede 10 mm, portanto sua área mede  $275 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a 13,75. O triângulo retângulo tem base medindo 2 mm e a altura mede 10 mm, portanto sua área mede  $10 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a 9,17, já que o triângulo está à distância de 27,5 mm do eixo. O volume gerado pela parte (8) da figura é igual à soma dos volumes gerados pelas rotações do retângulo e do triângulo retângulo. Pelo teorema de Pappus Guldin, tem-se que:

$$V_8 = 2\pi \cdot 13,75 \cdot 275 + 2\pi \cdot 9,17 \cdot 10$$

$$V_8 = 23746,25 + 575,876$$

$$V_8 = 24322,126 \text{ mm}^3$$

A parte (9) da figura é um trapézio. Deve-se dividi-lo em um retângulo e um triângulo retângulo. O retângulo tem base medindo 24,5 mm e a altura mede 6,5 mm, portanto sua área mede  $159,25 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a 12,25. O triângulo retângulo tem base medindo 5 mm e a altura mede 6,5 mm, portanto sua área mede  $16,25 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a 26,17, já que o triângulo está à distância de 24,5 mm do eixo. O volume gerado pela parte (9) da figura é igual à soma dos

volumes gerados pelas rotações do retângulo e do triângulo retângulo. Pelo teorema de Pappus Guldin, tem-se que:

$$V_9 = 2\pi \cdot 12,25 \cdot 159,25 + 2\pi \cdot 26,17 \cdot 16,25$$

$$V_9 = 12251,1025 + 2670,6485$$

$$V_9 = 14921,751 \text{ mm}^3$$

A parte (10) da figura é um triângulo. Deve-se dividi-lo em dois triângulos retângulos. O primeiro triângulo retângulo tem base medindo  $21 \text{ mm}$  e a altura mede  $6 \text{ mm}$ , portanto sua área mede  $63 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $7$ . O segundo triângulo retângulo tem base medindo  $3,5 \text{ mm}$  e a altura mede  $6 \text{ mm}$ , portanto sua área mede  $10,5 \text{ mm}^2$  e a abscissa de seu centro de gravidade é igual a  $22,17$ , já que o triângulo está à distância de  $21 \text{ mm}$  do eixo. O volume gerado pela parte (10) da figura é igual à soma dos volumes gerados pelas rotações dos dois triângulos retângulos. Pelo teorema de Pappus Guldin, tem-se que:

$$V_{10} = 2\pi \cdot 7 \cdot 63 + 2\pi \cdot 22,17 \cdot 10,5$$

$$V_{10} = 2769,48 + 1461,8898$$

$$V_{10} = 4231,3698 \text{ mm}^3$$

O volume gerado pela figura plana será igual à soma dos volumes:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + V_9 + V_{10}$$

$$V = 272786,402 \text{ mm}^3$$

Como  $1 \text{ l} = 1000000 \text{ mm}^3$ , então  $V = 0,272786402 \text{ l}$

E, como  $1 \text{ l} = 1000 \text{ ml}$ , então  $V \cong 272,77 \text{ ml}$ .

### 4.3 PROPOSTA DE ATIVIDADE 3

Nesta atividade será feita a análise crítica das soluções, na qual os estudantes deverão validar os resultados encontrados, comparando-os com os

indicados nos rótulos dos recipientes que contém os produtos e deverão explicar as diferenças entre estes resultados.

No problema para determinar o volume de creme de cabelo, notadamente, na substituição do lado curvo lateral há um aumento da área maior que a diminuição da área quando da substituição do lado curvo da base, portanto há mais ganho que perda de volume, o que explica o resultado ser maior que 300 ml. Já no problema para determinar o volume de removedor de esmalte, na substituição dos dois lados curvos há uma diminuição da área e, portanto, há perda de volume, o que explica o resultado ser menor que 100 ml.

No problema para determinar o volume de molho de alho, na substituição do lado curvo lateral superior e da base geram um aumento de área maior que a diminuição de área resultante da substituição do lado curvo lateral inferior e por isso o volume foi superior a 150 ml. Na determinação do volume de solução fisiológica, na substituição de quatro de seus lados curvos há aumento de área e em três há diminuição de área. Como são valores aparentemente bem próximos não permite afirmar se houve mais ganho que perda de volume, entretanto o resultado encontrado foi superior a 500 ml.

No problema para determinar o volume de achocolatado, na substituição de cinco lados curvos laterais e da base há um aumento de área maior que a diminuição gerada pela substituição dos outros três lados curvos laterais, portanto houve mais ganho que perda de volume, o que explica o resultado ser maior que 270 ml

#### 4.4 PROPOSTA DE ATIVIDADE 4

Nesta atividade, que é mais adequada que seja feita individualmente para melhor avaliar a aprendizagem dos estudantes, o professor deverá propor questões sobre o cálculo de volumes de sólidos de revolução, avaliando se os estudantes compreenderam os conceitos estudados e são capazes de aplicá-los na resolução de problemas. (Sugestão de avaliação no APÊNDICE A).

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A própria origem da palavra geometria já evidencia sua importância na compreensão e intervenção na realidade, como observamos, por exemplo, na sua utilização pelos povos antigos para a resolução de problemas práticos do cotidiano. A geometria promove, além disso, o desenvolvimento de habilidades mentais indispensáveis à formação do indivíduo como o raciocínio lógico, a abstração e a generalização.

Durante muito tempo seu ensino nas escolas tem sido feito com base na metodologia tradicional de transmissão do conhecimento, pelo professor, na qual o aluno demonstra aprendizagem quando reproduz de forma mecanizada esse conhecimento transmitido. Entretanto, essa metodologia conduz apenas à memorização de conceitos e fórmulas que não promove a compreensão e nem atribui significado aos conceitos geométricos. Dessa forma, a aprendizagem da geometria não se efetiva e a formação do estudante fica comprometida na medida em que ele não desenvolve habilidades essenciais para compreensão e intervenção na realidade.

Sendo assim, a utilização de estratégias de ensino como a modelagem matemática, pode promover a aprendizagem mais efetiva da geometria, uma vez que coloca o estudante como sujeito ativo no processo de construção do conhecimento e por partir de problemas reais contribui para atribuir significado ao conhecimento geométrico. Outro fator que pode contribuir para aprendizagem da geometria é a diversificação na abordagem de métodos e técnicas, a exemplo da utilização do Teorema de Pappus Guldin e do Princípio de Cavalieri no ensino de cálculo de volume de sólidos de revolução, em especial aos que aparecem no dia a dia do aluno.

A proposta de sequência didática mostra que o ensino de cálculo de volumes de revolução a partir da modelagem matemática faz com que o estudante adote uma postura investigativa frente a um problema da realidade e mostra que a utilização do Teorema de Pappus Guldin e do Princípio de Cavalieri facilita a determinação das

equações de volume dos sólidos de revolução cilindro, cone e esfera, uma vez que o aluno pode demonstrar estas equações e não apenas memorizá-las, como comumente acontece no ensino médio. Além disso, permite o cálculo razoavelmente aproximado do volume de sólidos de revolução cujo formato difere dos sólidos convencionais, expandindo assim o estudo do referido conteúdo. Desta forma, esta sequência didática constitui uma estratégia de ensino que pode ser aplicada no ensino de cálculo de volume de sólidos de revolução, no ensino médio, que vai ao encontro da perspectiva de um ensino que coloca o estudante como ativo no processo de ensino e aprendizagem, que promove a contextualização e atribui significado aos conceitos geométricos, o que acreditamos ser de extrema importância para o desenvolvimento da aprendizagem do aluno.

Ademais, recomenda-se que esta sequência didática seja aplicada no ensino médio para verificar sua efetividade na aprendizagem dos alunos relativo ao cálculo de volume de sólidos de revolução, e que possa ser utilizada como forma de mapear conteúdos geométricos do ensino médio que podem ser abordados por meio da modelagem matemática, tanto em termos de possibilidade de ensino como em termos de eficiência na aprendizagem.

## REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.
- BIEMBENGUT, M.S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.7-32, jul. 2009.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.
- BUENO, M. P. **Teorema de Pappus: conceitos e aplicações no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, 2018. Disponível em <<https://repositorio.unesp.br/>>. Acesso em 11 de outubro de 2021.
- BURAK, D. A Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. **Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 96-111, 24 abr. 2019.
- BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília. MEC/SEF, 1997.
- \_\_\_\_\_. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2018.
- \_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2002.
- CALDATTO, M.; PAVANELLO, R. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, [S. l.], v. 24, n. 1, p. 103–128, 2015. DOI: 10.48489/quadrante.22913. Disponível em: <https://quadrante.apm.pt/article/view/22913>. Acesso em: 5 jul. 2021.
- CARDOSO, I. C. S. **Centroides, Teorema de Pappus-Guldin e o cálculo de volume de sólidos de revolução: uma proposta para futuros professores do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2020. Disponível em <<https://www.repositorio.ufop.br/>> Acesso em 11 de outubro de 2021.
- CARVALHO, J. F. **Evolução do pensamento matemático, das origens aos nossos dias. 2012**. Artigos e Ensaios. Disponível em:

[http://cienciaecultura.bvs.br/scielo.php?pid=S00097252012000200021&script=sci\\_ar text](http://cienciaecultura.bvs.br/scielo.php?pid=S00097252012000200021&script=sci_ar text). Acesso em: 22/04/2021.

EVES, H. **Geometria**: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

FACISS, D. **Ansiedade à matemática em Estudantes do Ensino fundamental**: Alguns dados Comparativos e Desempenho em Matemática. 2011. 56f. Monografia (TCC) – Centro de Educação e Ciências Humanas Departamento de Psicologia, Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, 2011.

FAINGUELERNT, E. K. O Ensino de Geometria no 1º e 2º Grau. **A Educação Matemática em Revista**. SBEM, v.3, nº 4, p.45-53. Blumenau. 1º semestre, 1995.

FONSECA, Maria da Conceição F.R; LOPES, Maria da Penha; BARBOSA, Maria das Graças Gomes; GOMES, Maria Laura Magalhães; DAYRELL, Mônica Maria Machado S. S. **O ensino da geometria na escola fundamental**: Três questões para formação do professor de matemática dos ciclos iniciais. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

LIMA, L. O. **Estórias da Educação no Brasil: de Pombal a Passarinho**. Rio de Janeiro: Brasília, 1975.

LOPES, L.; ALVES, G.; FERREIRA, A. **A simetria por meio de uma proposta investigativa: história e implicações culturais**. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática, ULBRA, Canoas, 2013.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Aeducação Matemática em revista**, ano II, n.4 1º semestre, Blumenau: SBEM, 1995

MENEZES, R. S. **Uma história da geometria escolar no Brasil**: de disciplina a conteúdo de ensino. Dissertação (Mestrado)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

NEVES, J. M. **Uso de modelagem matemática no cálculo do volume e da área da superfície de uma maçã**. Dissertação (Mestrado)- Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.

OLIVEIRA, R. G. **O baricentro dos polígonos convexos**. Dissertação (Mestrado)- Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2016.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria**: uma visão histórica. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1989.

PRIMO, M.E. **O Princípio de Cavalieri para cálculo de volumes no ensino médio**: algumas possibilidades. Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

RAUTENBERG, R.R; PROBST, R. W. Os Teoremas de Pappus para os sólidos de revolução: a demonstração de James Gregory. **Hipátia**, v. 4, n. 2, p. 262-281, dez. 2019.

ROXO, E. **A matemática na educação secundária**. São Paulo: Cia. Editora Nacional, 1937.

SCHWARTZMAN, S. **Pesquisa acadêmica, pesquisa básica e pesquisa aplicada em duas comunidades científicas**. 1979. Disponível em: <[http://www.schwartzman.org.br/simon/acad\\_ap.htm](http://www.schwartzman.org.br/simon/acad_ap.htm)> Acesso em 30 de junho de 2021.

STRUİK, D. J. **História concisa das Matemáticas**. Tradução: João Cosme Santos Guerreiro. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1992.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1998



## **ANEXO A- TEXTO DE REPORTAGEM DO JORNAL EXTRA SOBRE REDUÇÃO DE CONTEÚDO, TAMANHO E VOLUME DE PRODUTOS**

### ***Pesquisa Extra mostra 55 produtos que tiveram o conteúdo ou tamanho reduzido nos supermercados***

*É um vale-tudo. Assim se resume a prática dos fabricantes de reduzir o tamanho ou o conteúdo das mercadorias vendidas nos supermercados. Por isso, a partir deste domingo, o EXTRA publica a série de reportagens “Querida, encolhi o produto”, que vai mostrar o que está por trás do artifício de entregar menos pelo mesmo preço, ou seja, de fazer o consumidor pagar mais caro sem que, muitas vezes, perceba o prejuízo. Mesmo quando se dá conta, o comprador não sabe a quem reclamar.*

*Numa pesquisa feita em três redes de supermercado do Rio, foram encontrados 55 produtos que tiveram a dimensão, o peso ou o volume reduzido em até 34%. Para 38 deles — 69% do total —, os fabricantes admitiram que os preços foram mantidos, sem respeito ao bolso do consumidor, ou se recusaram a informar se houve redução dos valores cobrados nas gôndolas. Em apenas 17 casos, segundo as empresas, houve corte de custo para o comprador.*

*Todas as embalagens dos 55 itens encontrados pelo EXTRA nos supermercados até informavam sobre a redução do produto, como determina a Portaria 81/2002 do Ministério da Justiça — o único dispositivo jurídico que regulamenta a prática. A legislação, porém, não impede que irregularidades continuem a existir, como a comunicação sobre a diminuição da mercadoria em letras tão minúsculas que o comprador não percebe a inscrição.*

*Segundo a portaria, ao diminuírem o conteúdo, o tamanho ou o volume, os fabricantes são obrigados a informar as reduções nos pacotes por um período mínimo de três meses. Se descumprirem, podem pagar multas de R\$ 400 e R\$ 7,9 milhões, conforme o faturamento.*

*Apesar de a determinação estar em vigor há 13 anos, casos de empresas que burlam essa regra persistem. Em 30 de junho, a Secretaria Nacional do Consumidor,*

do Ministério da Justiça (Senacon-MJ), instaurou cinco processos administrativos contra Unilever, Nestlé e Pepsico, que não teriam comunicado aos consumidores sobre a redução de cinco produtos ou não teriam divulgado a informação de forma clara, como exige a portaria.

Os produtos que fazem parte dessa investigação são: sorvetes Kibon de passas ao rum e Laka Especial (redução de 21,2%), Rexona Men V8 (14,3%), sabão em pó Omo (10%), aveia em flocos Quaker (20%) e sorvetes Choclover, de vários sabores (25%). A Pepsico e a Unilever não comentam processos em andamento. A Nestlé informou que avisou sobre a mudança no rótulo.

### **Troca de marca para combater a prática**

Os consumidores mais atentos percebem que o produto que costumam comprar encolheu. Mas nem todos são assim. A engenheira eletricista Dione Costa, de 39 anos, conta que já constatou a redução, mas apenas em alguns casos.

— Apesar disso, muitas vezes acabo comprando mesmo assim. Preciso da maioria dos produtos no dia a dia. Então, não há como deixar de comprar. Mas, quando há outras opções, eu troco a marca para poder ter o mesmo retorno (financeiro).

É exatamente essa a recomendação do diretor jurídico do Procon-RJ, Carlos Eduardo Amorim. Como não há ilegalidade quando a empresa reduz a quantidade ou o tamanho e mantém o preço, cabe ao consumidor recusar essa “inflação às avessas”, optando por produtos da concorrência.

— Não existe controle sobre precificação no Brasil. Ou seja, o preço é livre. A melhor forma de o comprador combater esse tipo de irregularidade (reduzir mercadorias) é fugir das marcas líderes e buscar outras que sejam tão boas quanto. Observamos que os produtos de marcas líder que costumam fazer isso.

Apesar de não haver ilegalidade na prática, os consumidores reprovam a medida:

— *Acho a diminuição um absurdo, porque é um sinônimo de descaso com o consumidor. Se você está pagando o mesmo valor, tem que ter a mesma quantidade anterior. Ou, então, o fabricante tem que reduzir o preço.*

*Simone Terra, professora da Pós-Graduação de Marketing Estratégico da Escola Superior de Propaganda e Marketing (ESPM Rio), explica que, quando o consumidor percebe a tática das empresas, sente-se lesado:*

— *Se não trocar de marca por alguma razão, no mínimo vai ficar com uma imagem ruim do fabricante. Na hora em que aparecer um produto que consiga entregar uma qualidade similar, ele não vai pensar duas vezes (em trocar de marca).*

Disponível em  
<https://extra.globo.com/economia/pesquisa-do-extra-mostra-55-produtos-que-tiveram-conteudo-ou-tamanho-reduzido-nos-supermercados-16734867.html>

## APÊNDICE A- SUGESTÃO DE AVALIAÇÃO PARA A ATIVIDADE 4.4

A pesquisa do Jornal Extra mostrou casos em que os consumidores são enganados pagando pela quantidade de determinados produtos, mas levando menos para casa. Diante dessa situação, que tal fazer um teste para verificar se o volume indicado nos rótulos de alguns produtos que consumimos realmente corresponde ao volume real contido nos recipientes? Propomos a seguir três produtos (que podem ser adaptados de acordo com a realidade do aluno) que são comumente vendidos na maioria dos supermercados ou farmácias para que você calcule seus volumes utilizando o procedimento descrito abaixo, o mesmo utilizado para calcular o volume dos produtos na atividade 4.3, verificando se o valor encontrado corresponde ao indicado nos rótulos e em caso de valores divergentes, justificar essa diferença.

### **Procedimento:**

- 1) Primeiramente faça um corte horizontal paralelo à base do recipiente na altura do líquido e posteriormente, um corte vertical simétrico para dividi-lo em duas partes iguais (no recipiente vem marcando o local deste corte simétrico).
- 2) Contorne uma das partes do recipiente em um papel milimetrado, traçando o eixo de simetria da figura plana obtida (subtraia da figura a espessura do recipiente e para facilitar os cálculos, arredonde para milímetros inteiros ou milímetros e meio, as dimensões horizontais e verticais do recipiente).
- 3) Use o Teorema de Pappus Guldin ou o Princípio de Cavalieri para determinar o volume do sólido gerado pela rotação da figura plana em torno do eixo dado. Caso a figura seja formada por lados curvos, substitua-os por segmentos retos, observando nesta substituição se há perda ou ganho de área. Para facilitar o cálculo, poderá dividir a figura plana em partes menores.

### **Material necessário:**

Papel milimetrado (uma folha para cada recipiente), lapiseira, de preferência 0.5 mm, borracha, régua, embalagens cheias dos produtos.

De posse dos materiais e utilizando o procedimento descrito acima, determine o volume dos recipientes a seguir:

- 1) Calcular o volume do recipiente contendo uma medicação.



- 2) Calcular o volume do recipiente contendo condicionador de cabelo.



3) Calcular o volume do recipiente contendo bebida mista de guaraná com açaí.

